МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1993

УДК 532.5.031:517.9

© 1993 г. М. А. ГУЗЕВ, В. П. МЯСНИКОВ

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В данной работе на основе калибровочного подхода Янга — Миллса предлагается обобщение классической модели идеальной жидкости, локальная кинематика которой не описывается диффеоморфным отображением.

Применение формализма Янга — Миллса с целью построения новых моделей для макроскопического описания пластического деформирования различных материалов сложилось в настоящее время в одно из новых направлений современной теории пластичности [1—3]. Привлечение такого подхода именно к теории пластичности обусловлено тем, что физический механизм пластических деформаций определяется прежде всего дефектами кристаллической структуры материала, а изучение природы дефектов показало, что их возникновение нарушает диффсоморфную структуру поля смещений. В механике твердого деформируемого тела указанный формализм позволяет расширить набор кинематически допустимых состояний такой среды за счет введения дополнительных (внутренних) степеней свободы, описание которых в терминах калибровочных (или компенсирующих) полей характеризует отклонения от классической деффеоморфной кинематики. Структура этих полей определяется механическими свойствами рассматриваемого тела и группой симметрий, оставляющих инвариантными его уравнения движения. Математические основы калибровочного формализма Янга — Миллса, часто используемого в квантовой теории поля, подробно изложены в литературе (см., например, [4]).

1. Проанализируем особенности подхода Янга — Миллса к построению новых моделей в механике сплошной среды на примере обобщения модели идеальной жидкости. С этой целью используем вариационный принцип Лагранжа. Для идеальной жидкости уравнения движения могут быть обычным образом получены из условия экстремальности функционала действия [5]

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d\xi L = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d\xi \rho_0 \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|^2 - U(\rho) \right] \quad (1.1)$$

где внутренняя энергия жидкости $U(\rho)$ зависит от ее плотности ρ, изменение которой в процессе движения определяется уравнением неразрывности

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\det \|\partial x^i/\partial \xi^j\|} \quad (1.2)$$

Здесь $\rho_0 = \rho(\xi, t_0)$ — плотность жидкости в начальном состоянии. Решение уравнения движения определяет в каждый момент времени диффеоморфное отображение начального состояния $\mathbf{x}(\xi, t_0)$ в текущее $\mathbf{x}(\xi, t)$.

Лагранжиан L в (1.1) обладает группой внутренних симметрий: он инвариантен относительно преобразований $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = g\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный постоянный вектор, а g — матрица вращений с постоянными элементами. Наборы таких $\boldsymbol{\tau}$ и g образуют соответственно однородные группы трансляций $T(3)$ и вращений $SO(3)$, а группа внутренних симметрий L является полупростым произведением $SO(3)$ на $T(3)$ и обозначается $SO(3)\Delta T(3)$.

В соответствии с методикой Янга — Миллса для описания кинематически возможных состояний идеальной жидкости с дефектами локализуем группу внутренних симметрий лагранжиана L, т. е. будем считать, что элементы группы являются функциями лагранжевых координат и времени

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = g(\xi, t)\,\mathbf{x} + \tau(\xi, t) \tag{1.3}$$

Преобразования такого вида не коммутируют с операторами дифференцирования. Для сохранения инвариантности лагранжиана относительно действия неоднородной группы $SO(3)\Delta T(3)$, согласно общему правилу построения калибровочных полей [4], необходимо заменить обычные производные $\partial\mathbf{x}/\partial\xi^{\mu} \equiv \partial_{\mu}\mathbf{x}$, $\mu = t, 1, 2, 3$, на ковариантные

$$D_{\mu}\mathbf{x} = \partial_{\mu}\mathbf{x} + A_{\mu}\mathbf{x} + \varphi_{\mu}$$

где $A_{\mu} = A_{\mu}(\xi, t)$ — матрицы, $\varphi_{\mu} = \varphi_{\mu}(\xi, t)$ — векторы, и ввести вместо L лагранжиан

$$L_G = \rho_0\left[\frac{1}{2}\,|D_t\mathbf{x}|^2 - U(\rho)\right], \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\det\|D_j x^i\|} \tag{1.4}$$

Правила преобразования производных и калибровочных полей A_{μ}, φ_{μ} даются формулами

$$D_{\mu}'\mathbf{x}' = gD_{\mu}\mathbf{x} \tag{1.5}$$

$$A_{\mu}' = gA_{\mu}g^{-1} - \partial_{\mu}gg, \quad \varphi_{\mu}' = g\varphi_{\mu} - \partial_{\mu}\tau - A_{\mu}'\tau$$

Лагранжиан (1.4) остается инвариантным по отношению к преобразованиям (1.5) с произвольными функциями $g = g(\xi, t) \in SO(3)$, $\tau = \tau(\xi, t) \in T(3)$.

Калибровочные поля A_{μ}, φ_{μ} характеризуют отклонение локальной структуры поля смещений от классической структуры, описываемой диффеоморфизмом. Динамические уравнения для определения A_{μ}, φ_{μ} можно получить с помощью минимального динамического расширения принципа наименьшего действия [1—3] введением полевого лагранжиана

$$L_p = -\frac{1}{4\alpha}\,g^1_{\mu\lambda}g^1_{\nu\varkappa}\,(\mathbf{D}_{\mu\nu}, \mathbf{D}_{\lambda\varkappa}) - \frac{1}{4\beta}\,g^2_{\mu\lambda}g^2_{\nu\varkappa}\,\langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa}\rangle \tag{1.6}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}A_{\nu}], \quad [A_{\mu}A_{\nu}] = A_{\mu}A_{\nu} - A_{\nu}A_{\mu}$$

$$\mathbf{D}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\mu} + A_{\mu}\varphi_{\nu} - A_{\nu}\varphi_{\mu} + F_{\mu\nu}\mathbf{x} \tag{1.7}$$

$$g^{1,2}_{ik} = \varepsilon^{1,2}_i\delta_{ik} = -\delta_{ik}, \quad g^{1,2}_{tt} = \varepsilon^{1,2}_t = 1/C^2_{1,2}, \quad g^{1,2}_{it} = 0 \tag{1.8}$$

По повторяющимся индексам в (1.6) и далее подразумевается суммирование. Круглые и угловые скобки обозначают соответственно обычное евклидово скалярное произведение векторов и скалярное произведение матриц: для двух матриц $\langle AB\rangle = A_{ik}B_{ki} = S_p AB^{\mathrm{T}}$. Полевой лагранжиан L_p содержит четыре феноменологических параметра: константы связи α, β и постоянные C_1, C_2, характеризующие скорость распространения дефектов различных типов.

Из (1.5) видно, что калибровочные поля A_{μ} принимают значения в алгебре Ли группы $SO(3)$, следовательно, каждая из матриц A_{μ} может быть выражена через базис M^a алгебры (генераторы группы) в виде $A_{\mu} = -iA^a_{\mu}M^a$. В присоединенном представлении группы матричные элементы $(M^a)_{mn} = -i\varepsilon_{amn}$, где ε_{amn} — символ Леви — Чивиты (антисимметричный по всем индексам тензор). В результате ковариантные производные (1.5) и тензоры полей (1.7) записываются в виде

$$D_\mu \mathbf{x} = \partial_\mu \mathbf{x} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{x}] + \varphi_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = -iF^a_{\mu\nu}M^a, \ \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]$$

$$\mathbf{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \varphi_0] - [\mathbf{A}_\nu, \varphi_\mu] + [\mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{x}]$$

$$L_p = -\frac{1}{4\alpha} g^1_{\mu\lambda} g^1_{\nu\varkappa} (\mathbf{D}_{\mu\nu}, \mathbf{D}_{\lambda\varkappa}) - \frac{1}{4\beta} g^2_{\mu\lambda} g^2_{\nu\varkappa} (\mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}_{\lambda\varkappa})$$

Здесь квадратные скобки обозначают обычные векторные произведения.

Полный функционал системы жидкость — дефекты теперь определяется выражением

$$S_W = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d\xi \, [L_G + L_p]$$

Варьирование S_w по переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}_\mu$, φ_μ приводит к уравнениям динамики идеальной жидкости, включающим уравнения для материи и калибровочных полей

$$\{\partial_\mu \mathbf{F}_{\mu t} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}_{\mu t}]\} \varepsilon^2_\mu + \frac{\beta}{\alpha} \frac{C_2^2}{C_1^2} [\mathbf{p}_\mu, \varepsilon^1_\mu \mathbf{D}_{\mu t}] = 0$$

$$\{\partial_\mu \mathbf{F}_{\mu j} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}_{\mu j}]\} \varepsilon^2_\mu + \frac{\beta}{\alpha} [\mathbf{p}_\mu, \varepsilon^1_\mu \mathbf{D}_{\mu j}] = 0$$

$$\{\partial_\mu \mathbf{D}_{\mu t} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{D}_{\mu t}]\} \varepsilon^1_\mu = -\alpha \rho_0 C_1^2 \mathbf{p}_t \tag{1.9}$$

$$\{\partial_\mu \mathbf{D}_{\mu j} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{D}_{\mu j}]\} \varepsilon^1_\mu = \alpha \lambda \mathbf{M}_j$$

$$\alpha \rho_0 \partial_t \mathbf{p}_t = -\alpha \partial_i (\lambda \mathbf{M}_i) - \partial_\nu [\mathbf{A}_\mu, \varepsilon^1_\mu \mathbf{D}_{\mu\nu} \varepsilon^1_\nu] \tag{1.10}$$

$$\lambda = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}; \ \det \|p^i_j\| = \frac{\rho_0}{\rho}$$

Векторы $\mathbf{p}_t = D_t \mathbf{x}$, $\mathbf{p}_i = D_i \mathbf{x}$, компоненты M_k^i представляют алгебраические дополнения к элементу p_k^i и $\mathbf{M}_k \doteq \varepsilon_{kmn} [\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_n]/2$. Система полевых уравнений является совместной: из (1.9) при учете тождества $\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^1_\mu \varepsilon^1_\nu \mathbf{D}_{\mu\nu} = 0$ следует условие совместности, совпадающее с уравнением (1.10). Из-за калибровочной инвариантности решение уравнений связаны калибровочным преобразованием (1.5), поэтому для однозначного определения полей $\mathbf{A}_\mu$, φ_μ систему уравнений (1.9), (1.10) следует дополнить калибровочными условиями, которые выберем в виде

$$\partial_\mu \varepsilon^2_\mu \mathbf{A}_\mu = 0, \ \partial_\mu \varepsilon^1_\mu \varphi_\mu = 0 \tag{1.11}$$

Знаки при производных согласованы с полевой метрикой (1.6), (1.8). При ином выборе знаков задача нахождения калибровочных полей будет некорректной.

Решения уравнений (1.9)—(1.11) определяют состояние динамической системы жидкость — дефекты, для которой обобщенными координатами является совокупность величины $\{\mathbf{x}, \mathbf{A}_\mu, \varphi_\mu\}$. Дополнительные степени свободы, описываемые полями $\mathbf{A}_\mu$, φ_μ, появляются в результате расширения пространства кинематических состояний, в которых может находиться среда. Эта процедура, основанная на требовании калибровочной инвариантности, однозначно задает взаимодействие жидкости с ее дефектной структурой и указывает на источник происхождения последней: им является движущаяся жидкость. С точки зрения механики сплошной среды для предложенной калибровочной модели идеальной жидкости должен выполняться принцип относительности Галлилея, требующий инвариантность уравнений (11)—(13) по отношению к преобразованию

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{U}t, \; t = t' \tag{1.12}$$

где U — постоянный вектор. Из (1.3), (1.12) видно, что в группе внутренних симметрий лагранжиана L преобразования (1.12) образуют подгруппу, состоящую из элементов вида $g = I$, $\tau = \mathbf{U}t$, которая, естественно, оставляет инвариантной относительно галлилеева сдвига систему уравнений (1.9)—(1.11). При этом калибровочные поля изменяются следующим образом:

$$A_\mu' = A_\mu, \; \varphi_t' = \varphi_t - \mathbf{U} - A_t\mathbf{U}t, \; \varphi_j' = \varphi_j - A_j\mathbf{U}t$$

2. Исследуем состояния равновесия. Для классической модели идеальной однородной жидкости из равенства нулю скорости в состоянии равновесия следует постоянство давления во всем объеме, занятом жидкостью. Естественным обобщением классического условия равновесия для калибровочной модели идеальной жидкости является требование обращения в нуль полного калибровочного импульса: $\mathbf{p}_t = \partial_t\mathbf{x} + [\mathbf{A}_t, \mathbf{x}] + \varphi_t = 0$. Тогда система уравнений (1.9), (1.10) приобретает вид

$$\begin{gathered}
\{\partial_\mu \mathbf{F}_{\mu t} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}_{\mu t}]\}\, \varepsilon_\mu^2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{C_2^2}{C_1^2}\,[\mathbf{p}_i, \mathbf{D}_{it}] \\
\{\partial_\mu \mathbf{F}_{\mu j} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{F}_{\mu j}]\}\, \varepsilon_\mu^2 = \frac{\beta}{\alpha}\,[\mathbf{p}_i, \mathbf{D}_{ij}] \\
\{\partial_\mu \mathbf{D}_{\mu t} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{D}_{\mu t}]\}\, \varepsilon_\mu^1 = 0, \; \{\partial_\mu \mathbf{D}_{\mu j} + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{D}_{\mu j}]\}\, \varepsilon_\mu^1 = \alpha\lambda\mathbf{M}_j \\
\alpha\partial_t(\lambda\mathbf{M}_t) + \partial_\nu\,[\mathbf{A}_\mu, \varepsilon_\mu^1\mathbf{D}_{\mu\nu}\varepsilon_\nu^1] = 0 \\
\det \|\partial_j x^i + \varphi_j^i + [\mathbf{A}_j, \mathbf{x}]^i\| = \frac{\rho_0}{\rho}
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Определим значения наблюдаемых макроскопических параметров, для которых условия равновесия являются классическими, т. е. скорости движения частиц $\mathbf{v} = \partial_t\mathbf{x}$ и калибровочные поля $\mathbf{A}_\mu$, φ_μ обращаются в нуль. Для этого случая, как следует из (2.1), параметры $\lambda = 0$, $\rho = \rho_0$. При этом дисторсии $p_j^i \equiv D_j x^i = \delta_j^i$, что означает отсутствие в жидкости дефектов. Однако в общем случае равновесные состояния идеальной жидкости допускают более широкий класс динамических реализаций при фиксированных значениях термодинамических параметров λ, ρ.

Рассмотрим уравнения системы (2.1) при $\lambda = 0$ и постоянной плотности, т. е. жидкость в равновесии предполагается однородной. Решения для калибровочных полей $\mathbf{A}_\mu$ и дисторсий $\mathbf{p}_i$ определяются из соотношений

$$\mathbf{A}_t = \mathrm{const}, \; \mathbf{A}_j = 0, \; \mathbf{D}_{ti} = \partial_t\mathbf{p}_i + [\mathbf{A}_t, \mathbf{p}_i] = 0 \tag{2.2}$$

Отсюда видно, что матрица $\|p_j^i\|$ является элементом группы вращений $SO(3)$, вектор $\mathbf{A}_t$ задает направление оси вращения, время t характеризует угол поворота. Уравнение для x сразу следует после подстановки $\varphi_\mu = \mathbf{p}_\mu - \partial_\mu\mathbf{x} - [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{x}]$ во второе условие калибровки (1.11) и учета (2.2)

$$\Box\mathbf{x} + \frac{1}{C^2}\,[\mathbf{A}_t, \partial_t\mathbf{x}] = 0, \; \Box = \partial_\mu\partial_\mu\varepsilon_\mu^1$$

где $\Box$ — волновой оператор. Поля φ_μ имеют вид

$$\varphi_t = -\partial_t\mathbf{x} - [\mathbf{A}_t, \mathbf{x}], \; \varphi_i = \mathbf{p}_i - \partial_i\mathbf{x}$$

При постоянном значении $\lambda \neq 0$ для простоты рассмотрим двумерный случай при нарушении только трансляционной симметрии, что соответствует $A_\mu = 0$. Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\Box\varphi_t = 0, \quad \Box p_1^1 = \alpha\lambda p_2^2, \quad \Box p_2^2 = \alpha\lambda p_1^1$$

$$\Box p_2^1 = -\alpha\lambda p_1^2, \quad \Box p_1^2 = -\alpha\lambda p_2^1$$

$$\partial_1 p_2^1 = \partial_2 p_1^1, \quad \partial_1 p_2^2 = \partial_2 p_1^2, \quad \det \| p_i^j \| = \frac{\rho_0}{\rho}$$

Легко указать решение этой системы в классе ограниченных функций

$$p_1^1 = p_2^2 = R\cos\left(C_1\sqrt{-\alpha\lambda}\, t\right), \quad p_2^1 = -p_1^2 = R\sin\left(C_1\sqrt{-\alpha\lambda}\, t\right) \quad R = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2}$$

Уравнение для x получается аналогично трехмерному случаю и имеет вид $\Box x = 0$. Калибровочные поля $\varphi_j^i = p_j^i - \partial_j x^i = \partial_j (z_i - x^i)$, где $z^i = p_k^i \zeta^k$. Введем интеграл

$$J^i = \oint d\zeta^j \varphi_j^i = -\oint d\zeta^j \partial_j x^i$$

Равновесное состояние содержит дефекты, если $J^i \neq 0$. Перепишем в полярных координатах (r, φ) величину $d\zeta^j \partial_j = d_r \partial_r + d\varphi\partial\varphi$ и рассмотрим решение уравнения $\Box x = 0$, однозначное по r и не периодическое по φ: тогда $J^i \neq 0$.

Проведенный анализ состояния равновесия при постоянных значениях термодинамических параметров λ, ρ показывает, что соответствующие ему динамические состояния, обусловленные существованием дефектов, могут быть весьма различными. При возмущении равновесия выбор какого-либо из этих состояний в качестве начального должен определяться требованием согласования результатов теории с экспериментом.

Значения феноменологических параметров в лагранжиане зависят от основных механических характеристик среды, для описания движения которой используется модель рассмотренного выше типа. Они также должны определяться на основе экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987. 168 с .
2. *Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Данилов В. И. и др.* Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1980. 254 с.
3. *Олемский А. И., Скляр И. А.* Эволюция дефектной структуры твердого тела в процессе пластической деформации // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 6. С. 29—79.
4. *Райдер Л.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987. 512 с.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.

Владивосток

Поступила в редакцию 20.I.1993