

УДК 533.6.011.72 : 537.84

© 1993 г. А. А. БАРМИН, Е. А. ПУШКАРЬ

НЕРЕГУЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В предыдущих исследованиях авторов [1] установлено, что существуют области значений параметров, при которых регулярное взаимодействие ударных волн не имеет места. Формально это происходит, когда обобщенные поляры [2] перестают пересекаться. При параметрах, близких к критическим, аналогично газовой динамике [3—5] течение за преломленными быстрыми волнами становится негиперболическим (дозвуковым) и на взаимодействие может оказывать влияние состояние среды и поля на бесконечности вниз по потоку от точки пересечения. Это может привести к разрушению «регулярного» взаимодействия. Естественно предположить, что в этом случае имеет место более сложное течение, аналогичное «маховскому» взаимодействию в газовой динамике.

Маховская схема содержит плоскую маховскую ударную волну, движущуюся между взаимодействующими ударными волнами, соединяя их точки ветвления. В магнитной гидродинамике течение в окрестности каждой точки ветвления содержит помимо маховской до пяти волн, вид которых заранее непредсказуем. Такое решение построено численно в широком диапазоне определяющих параметров. Найден области существования нерегулярного решения, его связь с регулярным, характер перестройки решения при непрерывном изменении параметров.

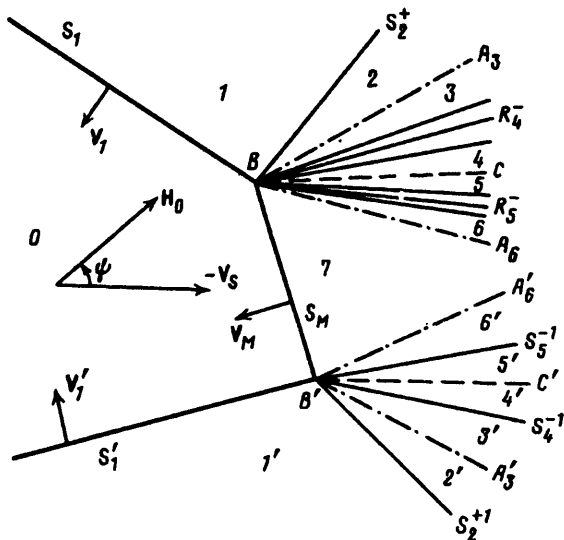
Выделены характерные особенности взаимодействия, выявлены зависимости физических характеристик возникающих течений от параметров задачи. На основании проведенного численного моделирования сформирована база данных, которая может быть использована в конкретных расчетах для анализа явлений в солнечном ветре, ближнем космосе и других приложениях [6, 7].

1. При пересечении ударных волн в магнитной гидродинамике [1] регулярное решение существует не при всех значениях определяющих параметров, когда течение за взаимодействующими волнами S_1 и S_1' имеет гиперболический тип. В квазистационарной постановке [1] определяющие параметры — это числа Маха M_1 и M_1' ударных волн S_1 и S_1' , движущихся со скоростями V_1 и V_1' , число Альфвена $N = a_A/a_0 = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0} a_0$ (или $\beta = 8\pi\rho_0/H_0^2 \equiv 2/\gamma N^2$), угол ϑ между S_1 и S_1' , угол ψ между V_1 и H_0 , где V_1 — скорость (фиктивной) точки пересечения S_1 и S_1' относительно среды перед ними

$$|V_1| = \sqrt{V_1^2 + 2V_1V_1' \cos \vartheta + V_1'^2} / \sin \vartheta \quad (1.1)$$

Производным параметром является отношение динамического напора в набегающем потоке к магнитному давлению, пропорциональное квадрату числа Маха — Альфвена $M_A = M/N$ (для быстрых ударных волн $M_A \geq 1$).

В случае достаточно сильных S_1 и S_1' существует критическое значение $\vartheta_c = \vartheta_c(M_1, M_1', N, \psi)$, такое, что при $\vartheta > \vartheta_c$ регулярное решение отсутствует. При достаточно близких $\vartheta < \vartheta_c$ характер течения за преломленными быстрыми волнами S^+ и S^+ негиперболический и взаимодействие оказывается под влиянием условий в среде на бесконечности вниз по потоку от точки пересечения S_1 и S_1' . Это может приводить к разрушению регулярного автомодельного решения. Такая ситуация аналогична газодинамической, когда при пересечении ударных волн



Фиг. 1

вблизи ϑ , течение за преломленными ударными волнами становится дозвуковым [3—5].

При одних и тех же M_1 , M_1' , N , ψ и ϑ наряду с рассмотренными ранее [1] «слабыми» существуют «сильные» решения с большим углом наклона быстрых ударных волн. Таким образом, имеет место аналогия между магнитной гидродинамикой и газовой динамикой, где в задачах об обтекании клина, взаимодействии ударных волн или отражении от стенки [3] решение двузначно. Однако если в газовой динамике волновая картина течения не меняется, то в магнитной гидродинамике сильное и слабое решения, как правило, качественно различны. Например, волновые картины течения при $N = 1,5$, $M_1 = 3$, $M_1' = 2$, $\psi = 90^\circ$ и ряда значений ϑ для слабого и сильного семейств решений имеют вид:

ϑ	20°	30°	40°	50°	60°
Слабое	$S^+ S^- C S^- A S^+$;	$S^+ S^- C S^- A S^+$;	$S^+ S^- C S^- A S^+$;	$S^+ S^- C R^- S^+$;	$S^+ A S^- C S^- S^+$;
Сильное	$S^+ R^- C R^- S^+$;	$S^+ R^- C S^- A S^+$;	$S^+ R^- C S^- S^+$;	$S^+ R^- C S^- S^+$;	$S^+ S^- C S^- S^+$

Здесь и далее буквы S , R , A и C обозначают ударные волны, волны разрежения, альфвеновские и контактные разрывы, индексы плюс и минус относятся к быстрым и медленным волнам соответственно. Порядок волн — от состояния за S_1 до состояния за S_1' , причем волны по разные стороны от C движутся в противоположных направлениях.

Построим аналог газодинамического элементарного маховского взаимодействия [5, 8, 9] для магнитной гидродинамики. Предположим, что по некоторым причинам, (например, из-за влияния вверх по потоку при эллиптическо-гиперболическом типе течения), между S_1 и S_1' возникает плоская «маховская» ударная волна S_M , фронт которой наклонен к V_1 под углом δ , движущаяся со скоростью V_M (число Маха $M_M = V_M/a_0$) в направлении своей нормали n_M (фиг. 1). Волна S_M (т. е. δ и M_M) определяется решением всей задачи. Для существования автомодельного решения необходимо, чтобы V_M была достаточно велика и в полукрестности т. B (или B') набегающий поток имел гиперболический тип.

Построим решение независимо для точек B и B' . В т. B ударная волна S_1 «приходящая» [4], она обусловлена внешними причинами, которые определяют

ее угол наклона φ_s' и скорость V_1 и, следовательно, состояние за ней. Поэтому в процессе решения параметры сред «0» (перед S_1 и S_1') и «1» (за S_1) могут изменяться только при изменении системы координат. Маховская ударная волна S_M — «уходящая», она определяется процессом столкновения S_1 и S_1' . Кроме S_M в т. B возможны уходящие волны: S_2^+ , A_3 и S_4^- (или R_4^-) — за S_1 ; A_6 и S_5^- (или R_5^-) — за S_M . Углы наклона быстрых и медленных волн обозначим φ_2^+ , φ_4^- , φ_5^- (фиг. 1). Они определяют состояние среды на контактном разрыве C , разделяющем потоки газа, протекшего через S_1 и S_M соответственно. Альфвеновские разрывы A_3 , A_6 , A_3' , A_6' не имеют свободного параметра [10], однако их наличие изменяет зависимости для P , V и H в течениях за ними. На C должны выполняться граничные условия, обусловленные непрерывностью P , H и V :

$$P(\varphi_2^+, \varphi_4^-) - P(\delta, M_M, \varphi_5^-) = 0, \quad V(\varphi_2^+, \varphi_4^-) - V(\delta, M_M, \varphi_5^-) = 0$$

$$H(\varphi_2^+, \varphi_4^-) - H(\delta, M_M, \varphi_5^-) = 0 \quad (1.2)$$

В плоскополяризованном случае пять условий (1.2) приводятся к четырем независимым, так как $cE_z = -V \times H \equiv \text{const}$.

Течение в окрестности т. B можно рассматривать как разветвление ударной волны S_1 на систему уходящих волн в результате воздействия нелинейного возмущения в виде ударной волны S_1' . Спонтанно такое разветвление не возникает. В отличие от газовой динамики течение в окрестности каждой из точек B и B' содержит дополнительно до четырех волн, состав которых заранее непредсказуем.

Если из условий (1.2) исключить φ_2^+ , φ_4^- , φ_5^- , то они определяют связь между δ , и M_M для S_M , в т. B : $M_M = M_M^{(B)}(\delta)$. Аналогично для т. B' получим $M_M = M_M^{(B')}(\delta)$. Поскольку S_M для точек B и B' одна и та же, получаем уравнение для δ

$$M_M^{(B)}(\delta) = M_M^{(B')}(\delta) \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) можно решать, опираясь на графические представления, так как зависимости $M_M = M_M^{(B)}(\delta)$ и $M_M = M_M^{(B')}(\delta)$ — линии на плоскости, а (1.3) определяет их точку пересечения.

Перепишем (1.3) в форме

$$\Delta M_M^{(B)}(\delta) = \Delta M_M^{(B')}(\delta) \quad (1.4)$$

$$\Delta M = \frac{M_M}{\cos \delta} - M_s, \quad M_s = \frac{|V_s|}{a_0}$$

Здесь ΔM имеет смысл приращения числа Маха волны S_M по сравнению с числом Маха т. O пересечения S_1 и S_1' относительно состояния «0».

При $\Delta M > 0$ S_M движется быстрее, чем т. O , при этом длина фронта S_M увеличивается, точки на фронте S_M перемещаются относительно точек B и B' . При $\delta < 0$ (как на фиг. 1) и $\delta > -\vartheta_2'$ в точках B и B' «рождаются» новые элементы фронта S_M , т. е. разветвляются как S_1 , так и S_1' . Здесь ϑ_{12}' — угол между скоростью V_s т. O и скоростью движения т. B . При $\delta < -\vartheta_{12}$ рождение происходит только в т. B , а в т. B' происходит «гибель» элементов фронта S_M , поэтому можно говорить, что под воздействием S_1' происходит ветвление S_1 , которая действует на S_1' посредством S_M .

Возможны физические ситуации, в которых $\Delta M < 0$. Например, если первоначальная маховская конфигурация с $\Delta M > 0$ приводит к фронту S_M конечной длины и в процессе движения S_1 и S_1' при изменении определяющих параметров ΔM становится отрицательным, то S_M может двигаться, приближаясь к т. O . Обращение в нуль длины S_M означает отсутствие автомодельного решения данного типа. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать решения

с $\Delta M > 0$, которые имеют смысл при любых ситуациях. Маховское взаимодействие является автомодельным в переменных x/t , y/t , но система координат, в которой все течение стационарно, отсутствует.

2. В решении можно выделить два этапа. Во-первых, необходимо найти течение отдельно в окрестности точек B и B' . Во-вторых, нужно эффективно построить общую маховскую конфигурацию, сопрягая на S_M решения в точках ветвления.

В отличие от регулярного взаимодействия ударных волн [1] начальные состояния для уходящих волн в точке ветвления не являются жестко определенными, поскольку скорость движения т. B заранее, до нахождения всего решения, не определена. В этом проявляется влияние вверх по потоку посредством маховской ударной волны течения, возникающего при нерегулярном взаимодействии. Поэтому задачу первого этапа можно сформулировать так: найти скорость и ориентацию системы координат, в которой существует стационарное решение задачи о разветвлении ударной волны S_1 на систему наклонных волн, и найти это решение. Такая постановка эквивалентна задаче о двумерном распаде разрыва, созданного одной ударной волной.

Из рассмотрения кинематики движения S_M следуют зависимости между δ , ϑ_{12} , ΔM , M_s , M_1 для т. B

$$\operatorname{tg} \vartheta_{12} = \Delta M (\sqrt{1 - M_1^2} (M_s + \Delta M) / M_1 + M_s \operatorname{tg} \vartheta)^{-1} \quad (2.1)$$

$$\Delta M = M_s \frac{\sin \vartheta_{12}}{\sin (\vartheta_1 - \vartheta_{12})} \frac{\cos (\vartheta_1 - \delta)}{\cos \delta}; \quad \sin \vartheta_1 = \frac{M_1}{M} \quad (2.2)$$

$$\varphi_M = \pi/2 + \delta - \vartheta_{12} \quad (2.3)$$

Здесь φ_M — угол наклона S_M к скорости т. B .

В качестве параметра, от которого зависит решение в т. B , выберем угол δ . Нахождение зависимости $\Delta M = \Delta M(\delta)$ имеет итерационный характер. Пусть имеется i -е приближение для ΔM , φ_2^+ , φ_4^- , φ_5^- . По нему из (2.1) вычисляется ϑ_{12} . В найденной стационарной системе координат определяются: φ_M (из (2.3)), наклон S_1 ($\varphi_1^+ = \vartheta_1 - \vartheta_{12}$) и магнитного поля ($\psi = \psi^{(i)} + \vartheta_{12}$), состояние среды за S_1 . Последнее вместе с исходным потоком определяют разрыв состояний, который надо сопрячь на C . Для этого используется алгоритм нахождения поправок к значениям φ_2^+ , φ_4^- , φ_M , φ_5^- , разработанный для регулярного взаимодействия [10, 11]. В нем S_M трактуется как быстрая уходящая ударная волна, движущаяся по состоянию 0. В известной системе координат φ_M , φ_2^+ , φ_4^- , φ_5^- находятся из граничных условий на C . По найденному значению φ_M из (2.3) находится ϑ_{12} и из (2.2) определяется ΔM . Затем вычисления повторяются для текущих значений ΔM , φ_2^+ , φ_4^- , φ_5^- . Итерации заканчиваются при выполнении условия $|\Delta M^{(i+1)} - \Delta M^{(i)}| < \epsilon$ и условий на C с заданной точностью.

Для нахождения всей маховской конфигурации разработан алгоритм [11], позволяющий эффективно получать маховские решения в зависимости от параметра ψ . В нем вместо нахождения всех кривых $\Delta M = \Delta M(\delta)$ для точек B и B' рассчитываются только по две достаточно близкие точки, определяющие концы дуг, на которых находится точка пересечения линий $M_M = M_M^{(B)}(\delta)$ и $M_{M'} = M_{M'}^{(B')}(\delta)$.

В расчетах задавались: числа Маха M_1 , M_1' в диапазоне 2—5, числа Альфвена N от 0,4 до 2,5 ($\beta = 7,5 - 0,18$), угол ψ варьировался от 90° до границы существования решения с шагом $1 - 5^\circ$, угол ϑ изменялся от границы существования регулярного решения ($60 - 70^\circ$) с шагом 10° до $90 - 100^\circ$. Всего было рассчитано около 1000 точек. Всюду в дальнейшем приводимая запись решения в виде последовательности букв S , R , A , C соответствует фиг. 1. Штрихом обозначены волны, величины и явления в окрестности т. B' .

3. Опишем общие свойства нерегулярного решения. При $M_1 = M_1'$ имеется симметрия решений относительно значения $\psi = 90^\circ$: случай $\psi > 90^\circ$ может быть

Параметры			Волновая картина течения
N	M	ϑ	
1,5	3,0	80, 90, 100	$S_2^+ S_4^- C S_5^- S_M (S_5^- C S_4^- S_2^+)$ '
2,0	4,0	90	
2,5	5,0	80, 90	
1,5	3,0	70	$S_2^+ R_4^- C S_5^- S_M (S_5^- C R_4^- S_2^+)$ '
2,0	5,0	80, 90	
2,0	3,0	80, 90	$S_2^+ S_4^- C R_5^- S_M (R_5^- C S_4^- S_2^+)$ '
2,5	3,0	90	
2,5	4,0	90	
1,1	5,0	90, 100	$S_2^+ A_3 S_4^- C S_5^- S_M (S_5^- C S_4^- A_3 S_2^+)$ '
1,5	5,0	90, 100	$S_2^+ A_3 R_4^- C S_5^- S_M (S_5^- C R_4^- A_3 S_2^+)$ '
0,7	5,0	100	$S_2^+ A_3 S_4^- C S_5^- A_6 S_M (A_6 S_5^- C S_4^- A_3 S_2^+)$ '
0,7	5,0	90	$S_2^+ A_3 R_4^- C S_5^- A_6 S_M (A_6 S_5^- C R_4^- A_3 S_2^+)$ '
0,4	5,0	90	$S_2^+ A_3 R_4^- C R_5^- A_6 S_M (A_6 R_5^- C R_4^- A_3 S_2^+)$ '
0,7	5,0	80	

получен заменой ψ на $180^\circ - \psi$ и переменной местами верхней и нижней частей картины взаимодействия. При $\psi = 90^\circ$ течение симметрично относительно оси, перпендикулярной N. Скорость S_M и, следовательно, ΔM достигают экстремума, $\delta = 0$.

Области существования регулярного и нерегулярного решений в пространстве определяющих параметров могут: а) пересекаться; б) иметь общую границу K_G ; в) разделяться некоторой промежуточной областью W , где $\Delta M < 0$ и в формально построенном решении точка пересечения S_1 и S_1' догоняет S_M за конечное время. Таким образом, регулярное и нерегулярное решения могут: а) существовать совместно, как в газовой динамике [3—5] (слабое и сильное регулярное и маховское); б) скачком трансформироваться одно в другое в результате «глобальной» катастрофы [1] на K_G при непрерывном изменении параметров; в) отсутствовать в рамках рассматриваемой схемы.

Характерным свойством области существования маховского решения является ее расширение при увеличении угла ϑ между S_1 и S_1' . Если при $\vartheta = 60$ или 70° маховское решение имеется только в узком диапазоне параметров при сильном поле ($M_A < 2$) и ψ , близких к 90° , то при $\vartheta = 80^\circ$ оно существует в двух подобластях, одна из которых соответствует сильному полю и ψ , близким к 90° , а другая — слабому полю ($M_A > 5$, ψ — любое). Когда $\vartheta = 90^\circ$, решение существует при $M_A > 4$ для любых ψ , а при $M_A = 3$ для $\psi \in (0^\circ, 31^\circ) \cup (52^\circ, 90^\circ]$. При $\vartheta = 100^\circ$ решение отсутствует только в сильных полях ($M_A < 2$) при $\psi < 40^\circ$.

Граница K_G связана с наличием исходных включающих ударных волн S_1^* , на которых N перпендикулярно S_1 и выполнены условия

ϑ°	ψ°	Регулярное решение	ψ_2°	Маховское решение
$N = 2,0; M_1 = M_1' = 3$				
70	55	$S^+ R^- C S^- S^+$	56	$S_2^+ S_4^- C R_3^- S_M (S_3^- C S_4^- S_2^+)'$
80	50	$S^+ R^- C S^- S^+$	51	$S_2^+ S_4^- C R_3^- S_M (S_3^- C S_4^- S_2^+)'$
90	45	$S^+ R^- C S^- A S^+$	46	$S_2^+ S_4^- C R_3^- S_M (S_3^- C S_4^- A_3 S_2^+)'$
$N = 2,5; M_1 = M_1' = 3$				
70	55	$S^+ R^- C R^- S^+$	56	$S_2^+ S_4^- C R_3^- S_M (S_3^- C S_4^- S_2^+)'$
$N = 1,5; M_1 = 3; M_1' = 2$				
90	121	$S^+ R^- C R^- S^+$	120	$S_2^+ S_4^- C S_3^- S_M (S_3^- C R_4^- S_2^+)'$

$$1 < N^2 < M^2 < [(\gamma + 1) N^2 - 2]/(\gamma - 1) \quad (3.1)$$

При $M_1 = M_1'$ имеем $\psi_{K_G}(\vartheta) = \pi/2 - \vartheta/2$.

Наличие магнитного поля приводит к сложной нелинейной зависимости волновой картины от параметров. Во всех рассчитанных случаях быстрые волны были ударными, тогда как при регулярном взаимодействии в сильном магнитном поле быстрые ударные волны могут трансформироваться в волны разрежения [1]. Медленные волны могут быть как ударными, так и волнами разрежения. В течении может присутствовать до четырех альфвеновских разрывов, причем их появление, вообще говоря, приводит к существенным изменениям всех характеристик среды, а особенно скорости газа, в слабых и умеренных магнитных полях. Примеры волновой картины течения при $M_1 = M_1'$, $\psi = 90^\circ$ приведены в табл. 1.

При $M_1 = M_1'$ и $\psi = 90^\circ$ медленные волны существенно слабее быстрых. При уменьшении ψ интенсивности медленных волн, как правило, увеличиваются и в ряде случаев могут приближаться к интенсивности быстрых ударных волн и даже превосходить их. Например, при $N = 1,5$, $M_1 = M_1' = 3,0$, $\vartheta = 100^\circ$, $\psi = 40^\circ$ $|S_3^-| = |S_4^-| > |S_2^+|$.

При непрерывном изменении определяющих параметров происходят качественные перестройки волновой картины взаимодействия: скачкообразные изменения течения и магнитного поля в области за сталкивающимися ударными волнами («катастрофы»). Все типы катастроф регулярного взаимодействия [1] имеют место и при нерегулярном.

Глобальная катастрофа K_G имеет другой характер: она происходит со сменой типа решения от регулярного к маховскому. Поэтому условия существования K_G совпадают с описанной выше границей K_G . Примеры глобальных катастроф приведены в табл. 2.

При глобальной катастрофе происходит существенное изменение физических величин в возникающем течении. Переход к маховскому приводит к значительно большему сжатию и ускорению газа по сравнению с регулярным взаимодействием, магнитное поле возрастает слабее. Значения давления и скорости на контактных

разрывах увеличиваются в 2—5 раз, а $|H|$ — не более чем в 1,5 раза. Если маховское решение существует совместно с регулярным, то давление и скорость в нем значительно превосходят соответствующие значения в слабом решении и больше P и V в сильном решении.

Структурная перестройка части течения может происходить при слиянии характеристик различных типов в окрестности точек B и B' . Последнее обусловлено тем, что система уравнений магнитной гидродинамики нестрого гиперболическая [12].

Ранее [1] были выделены локальные катастрофы, возникающие при совпадении двух характеристических скоростей: быстрой $a_+(N > 1)$ или медленной $a_-(N < 1)$ магнитозвуковых с альфвеновской a_A . Если это происходит за быстрой S^+ или перед медленной S^- ударными волнами, то они становятся особыми: включающей S^+ при $a_A = a_-$ (катастрофа K_{L+} : $S^+ \leftrightarrow S^+A$) или выключающей S^- при $a_A = a_+$ (катастрофа K_{L-} : $S^- \leftrightarrow AS^-$). Возникающий (исчезающий) при этом альфвеновский разрыв имеет конечную интенсивность ($|A| \neq 0$). При совпадении характеристических скоростей за R^+ или перед R^- $|A| = 0$ (непрерывные катастрофы K_{0+} : $R^+ \leftrightarrow R^+A$ и K_{0-} : $R^- \leftrightarrow AR^-$).

В магнитной гидродинамике возможно слияние сразу пяти характеристик: двух альфвеновских, двух медленных магнитозвуковых и энтропийной. Это происходит на линии тока, когда в стационарном течении вектор H_0 становится параллельным скорости газа. Существенная структурная перестройка происходит, если течение несимметрично относительно H_0 . Тогда оно меняется скачком в окрестности контактного разрыва. В противном случае при переходе через критическое направление H_0 картина течения меняется на зеркально отраженную относительно C , а они одинаковы в силу симметрии.

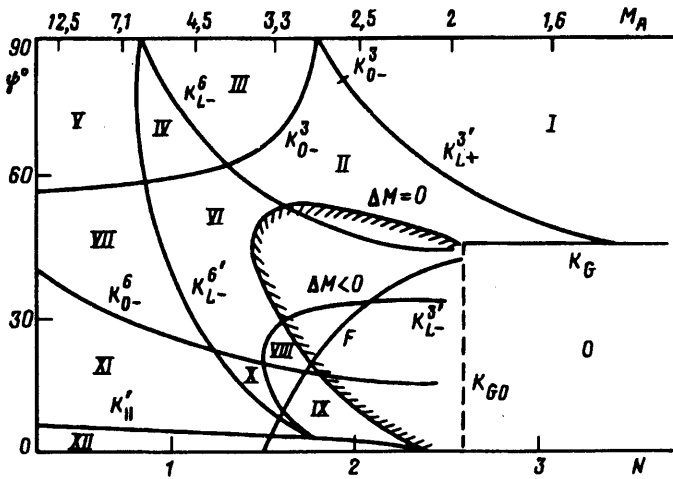
Локальная катастрофа такого типа («катастрофа параллельности» $K_{||}$) происходит в окрестности C' , когда в системе координат, движущейся вместе с т. B' , при $\psi = \psi_{12}' \equiv \psi_{||}'$ векторы V и H становятся параллельными в состоянии 0 и, следовательно, во всем течении вблизи т. B' и собственное электрическое поле $sE = -V \times H = 0$. При $E = 0$ из-за слияния характеристик медленные волны и вращательные разрывы вырождаются в токовые слои конечной (ограниченной) интенсивности вдоль линии тока. В автомодельном течении гиперболического типа могут существовать только быстрые волны и вместо контактного разрыва C' тангенциальный разрыв T' , направленный вдоль V и H . На T' выполнены два граничных условия: непротекания ($V_n = 0$) и непрерывности полного давления $p^* = p + H^2/8\pi$

$$(\delta_\omega)_7 = (\delta_\omega)_2', \quad (p^*)_7 = (p^*)_2' \quad (3.2)$$

где δ_ω — угол отклонения потока.

Решение строится аналогично газовой динамике как пересечение поляр-линий (сердцевидных кривых [3]) быстрых ударных волн в плоскости δ_ω, p^* . Скорость, магнитное поле и давление на T' могут испытывать произвольные скачки, ограниченные только условиями (3.2).

При $\psi \rightarrow \psi_{||}'$ область течения, ограниченная альфвеновскими характеристиками, стягивается к линии тока. При этом интенсивности медленных волн и вращательных разрывов остаются конечными и определяются из граничных условий на C' . В частности, по ним протекают конечные токи, обуславливающие конечный импульс, сообщаемый среде силой Лоренца $(1/c)j \times H$ (ток j направлен перпендикулярно плоскости течения). Однако поперек всей части течения между альфвеновскими характеристиками величины p^* и δ_ω не изменяются при $E \rightarrow 0$, как это следует из соотношений на МГД-разрывах. Возникающее в т. B' при $E = 0$ течение состоит из ударных волн S_M и S_2^+ и тангенциального разрыва T' , являющихся непрерывными продолжениями при $E \rightarrow 0$ ударных волн S_M и



Фиг. 2

S_2^+ с $E \neq 0$ и той части течения, которая содержится между альфвеновскими характеристиками и включает в себя A , S^- (или R^-) по обе стороны от C' и сам C' . Граничные условия на T' выполнены по непрерывности. Параметры потока по разные стороны от T' , кроме δ_v и p^* , вообще говоря, не совпадают и определяются их изменениями в S_μ и S_2^+ .

Из-за отсутствия симметрии в течении (с одной стороны система косых волн S_1^+ и S_2^+ , с другой — одна маховая ударная волна) знак поперечной компоненты электрического поля E_z существенно влияет на состояние среды на C и течение в его окрестности. Предельная волновая картина в окрестности C' различна при $\psi \rightarrow \psi_{||}' + 0$ ($E_z < 0$) и $\psi \rightarrow \psi_{||}' - 0$ ($E_z > 0$) из-за противоположного направления силы Лоренца $(1/c)\mathbf{j} \times \mathbf{H}$. Из-за геометрической симметрии течения в точках B и B' электрические поля с противоположными значениями E_z действуют в этих точках одинаково, а с одинаковыми значениями E_z — в противоположных направлениях. Поэтому при $\psi < \psi_{||}'$ состояние на C' ($E_z > 0$) определяется медленными волнами (и/или альфвеновскими разрывами), близкими к волнам в окрестности C , где $E_z < 0$.

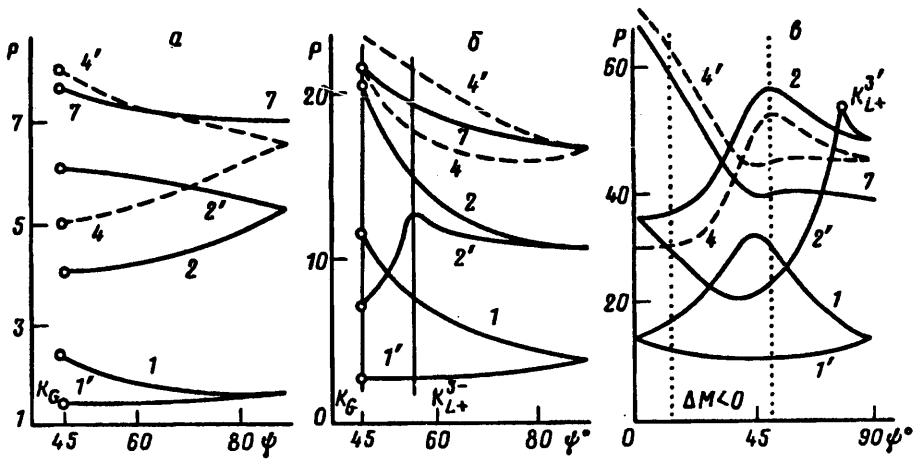
Переход ψ через значение $\psi_{||}'$ соответствует непрерывному изменению E_z , однако сила Лоренца, оставаясь конечной, меняется скачком, когда E_z проходит через ноль. Поэтому состав волн A , S^- (или R^-) и состояние на C' изменяются скачкообразно.

Катастрофа $K_{||}'$ — локальная катастрофа, так как в ней меняется только часть течения, однако она существенно отличается от локальных катастроф $K_{L\pm}$, $K_{0\pm}$. В случае $K_{||}'$ состояние на контактом разрыве C' испытывает разрыв 1-го рода: при $\psi \rightarrow \psi_{||}'$ ($E \rightarrow 0$) пределы слева и справа различны и не совпадают с состоянием для $\psi = \psi_{||}'$ ($E = 0$), когда сам контактный разрыв C' отсутствует.

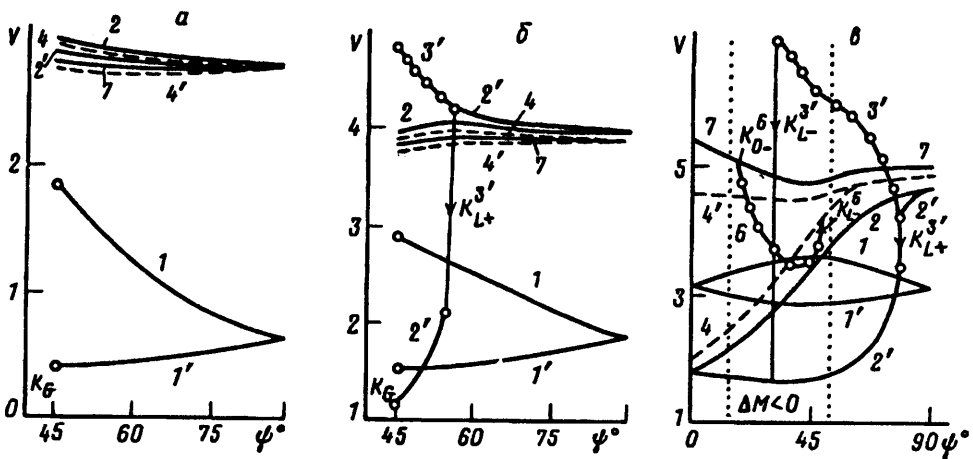
Течения между альфвеновскими характеристиками при $\psi \rightarrow \psi_{||}'$ можно трактовать как структуры тангенциального разрыва (токового слоя), когда скорость потока по направлению приближается к H_0 . Из-за противоположного влияния магнитного поля на течение эти структуры качественно и количественно отличаются друг от друга при $E_z > 0$ и $E_z < 0$.

Этот тип катастроф может иметь место при $\psi \rightarrow 0$ и при регулярном взаимодействии $M_1 \neq M_1'$.

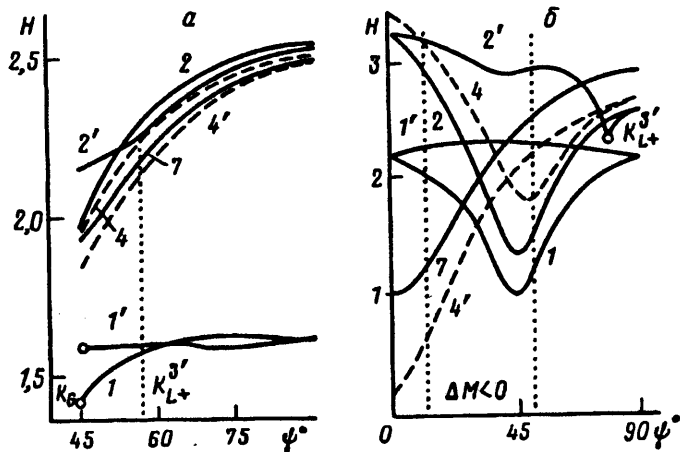
На фиг. 2 для $M_1 = M_1' = 5$, $\vartheta = 90^\circ$ в области параметров N , ψ , где существует маховое решение, построена карта катастроф. Сверху ($\psi = 90^\circ$) нанесены зна-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

чения $M_A = M/N$. Проведены линии $K_{L+}^3, K_{0-}^3, K_{0-}^3, K_{0-}^6, K_{L-}^3, K_{L-}^6, K_{L-}^6, K_{||}'$, соответствующие катастрофам течения, обозначенным нижним индексом и связанным с появлением (исчезновением) альфвеновских разрывов, указанным верхним индексом в соответствии с фиг. 1. Линии, где ударная волна меняется на волну разрежения, не проведены, поскольку эти изменения слабее влияют на течение. Штриховкой выделена область, в которой $\Delta M < 0$. Регулярное решение $S^+ R^- C S^- S^-$ существует в области 0, ограниченной линиями K_G ($\psi = \psi_{KG}$, $N > N_* = \sqrt{((\gamma - 1) M^2 + 2)/(\gamma - 1)}$) и F . На F совпадают слабое и сильное регулярное решения. Проведена линия K_{G0} ($N = N_*$, $\psi < \psi_{KG}$), где S_1^* становится газодинамической ударной волной с непрерывным полем.

4. Исследуем зависимости изменения физических величин в возникающем течении при варьировании безразмерных определяющих параметров M_1, M_1', N, ψ и θ . Для простоты рассмотрим случай $M_1 = M_1'$.

Из сравнения поведения зависимостей от ψ между собой следует их сходство при одних и тех же (или близких) значениях M_A . Совпадают катастрофы, характер поведения кривых, качественные особенности и даже количественные характеристики с учетом некоторых масштабных коэффициентов. Анализ всех рассчитанных случаев позволяет утверждать, что возникающее течение обладает приближенным подобием по числу Маха — Альфвена $M_A = M/N$.

Коэффициенты подобия для величин V и P близки к отношениям чисел Маха взаимодействующих волн и их квадратов соответственно. Подобие тем лучше, чем больше значения параметров отличаются от предельных, связанных с границей существования S_1 и S_1' : $M_1 > \max(1, N)$, или с изменением характера качественной перестройки при $N > 1$ или $N < 1$. В магнитной гидродинамике $N = 1$ является особой точкой, где возможно слияние трех характеристик и одни катастрофы могут сменяться другими. Наличие подобия позволяет распространить результаты, полученные при некоторых $M_1 = M_1'$ и N на другие значения посредством умножения на коэффициенты подобия.

Пример набора графиков $P(\psi), V(\psi), H(\psi)$ для $\theta = 90^\circ$ приведен на фиг. 3, 4: $a - M = 3, N = 2,5$; $b - M = 4, N = 2,5$; $c - M = 5, N = 2$, и фиг. 5: $a - M = 4, N = 2,5$; $b - M = 5, N = 2$, соответственно. Все величины отнесены к значениям в невозмущенном состоянии перед S_1 и S_1' : $P = p/p_0, V = |V|/a_0, H = |H|/H_0$. Кривые 1—7 задают состояния в соответствии с фиг. 1: 1 — за S_1 , 2 — за S_2^+ , 3 — за A_3 , 4 — 5 — на C (т. е. за S_4^-, S_5^- или R_4^-, R_5^-), 6 — за A_6 , 7 — за S_M . Штрихом обозначены соответствующие волны для т. B' . Скачок величины P и $|H|$ в S_1, S_1' и S_M на единицу меньше ординат кривых 1 и 1', а для V скачки равны разности ординат кривой 1 (или 1') и M_1 . Изменение величин в других волнах равно разности ординат кривых, задающих состояние за и перед волной в соответствии с фиг. 1. Например, на фиг. 3, $a - c$ изменение давления в $S_2^+ P_2 - P_1$, в S_4^- (или R_4^-) $P_4 - P_2$, в S_5^- (или R_5^-) $P_4 - P_7$, в $S_M P_7 - 1$, в S_5^- (или R_5^-) $P_5' - P_7$, в S_4^- (или R_4^-) $P_4' - P_2'$, в $S_2^+ P_2' - P_1'$. Изменения $|H|$ находятся из фиг. 5, a, b так же. При нахождении изменения V необходимо учесть, что в альфвеновских разрывах (кривые 3, 3', 6 и 6') скорость меняется.

Типы входящих в решение волн могут быть определены по изменению давления (в ударных волнах P растет, в R^\pm падает) или по изменению $|H|$: в $S^+ |H|$ растет, а в S^- уменьшается, в R^\pm положение обратное.

Влияние напряженности магнитного поля проявляется сложным образом: с одной стороны, оно воздействует на взаимодействующие ударные волны и приводит к изменению всех физических величин в S_1 и S_1' при варьировании H , в том числе существенной зависимости газодинамических параметров потоков (P и V) за S_1 и S_1' от N и ψ (кривые 1 и 1' на фиг. 3—5). С другой стороны, влияние исходного магнитного поля по-разному будет отражаться на маховской волне,

которая распространяется по невозмущенной среде, и на волнах, движущихся по сжатому и нагретому газу за S_1 и S_1' .

Зафиксируем $\vartheta = 90^\circ$, при котором наиболее представительно описывается структура изменения течения, и рассмотрим эволюцию зависимостей от угла ψ при уменьшении напряженности магнитного поля. Имеющиеся отличия для других ϑ опишем ниже.

В сильном магнитном поле, когда S_1 и S_1' близки к предельным ($M_A = 1,2$) из-за близости их скорости к a_{10} , они имеют небольшую интенсивность. Маховское решение с $\Delta M > 0$ существует при $\psi \in [\psi_{KG}, 90^\circ]$. Его волновая картина $S_2^+ S_4^- CR_3^- S_M (R_3^- CS_4^- S_2^+)'$ не меняется, за исключением непрерывного перехода $R_3^- \rightarrow S_3^-$, при уменьшении ψ .

Магнитное поле оказывает решающее влияние на свойства течения. Маховская волна S_M движется существенно быстрее, чем точка пересечения фронтов S_1 и S_1' , $\Delta V_{\max} \cong a_0$ при $\psi = 90^\circ$. При повороте Н S_M круто наклоняется навстречу ему: $\delta = 0$ при $\psi = 90^\circ$, $\delta_{\max}(\psi_{KG}) \simeq -30^\circ$. Влияние Н приводит к тому, что ударная волна S_2^+ ведет себя аномально: при всех ψ она наклонена вверх по потоку, $\varphi_2 + (\psi_{KG}) \cong 110^\circ$.

Скорость газа почти постоянна и совпадает за S_{*} , S_2^+ , $S_2^{+'}$ (фиг. 4, а). В медленных волнах $|V|$ и $|H|$ практически не меняются (фиг. 4, а), существенно меняется только газодинамическое давление (фиг. 3, а). Основной вклад в полное давление p^* вносит магнитное давление $H^2/8\pi$, оно составляет более 90% p^* .

Ослабление $|H_0|$ ($M_A = 1,6$) приводит к увеличению интенсивностей S_1 и S_1' (фиг. 3, б, 4, б, 5, а). Аномальное поведение S_2^+ исчезает: S_2^+ наклонена вниз по потоку, $\varphi_{2\max}(\psi_{KG}) \simeq 90^\circ$. При некотором ψ_{L+} $S_2^{+'}$ перпендикулярна H_1' и в состоянии 1' условия (3.1) выполнены, поэтому при $\psi = \psi_{L+}$ $S_2^{+'}$ расщепляется на $(S_2^+ A_3)'$ (катастрофа K_{L+}^3). Токи и, следовательно, силы Лоренца в $S_2^{+'}$ до и после катастрофы противоположны по величине, что приводит к скачкообразному падению скорости (фиг. 4, б) и резкому уменьшению давления за $S_2^{+'}$ (фиг. 3, б). Газ ускоряется током, текущим по A_3 , который вдвое больше тока в $S_2^{+'}$ и противоположен, до скорости, равной или большей скорости за $S_2^{+'}$ при $\psi > \psi_{L+}$ (фиг. 4, б), однако давление за $S_2^{+'}$ продолжает падать при уменьшении ψ под влиянием силы Лоренца.

Из-за перераспределения токов характер течений в областях I и II (фиг. 2) принципиально различен. В области II соответствующие волны в точках В и В' ведут себя по-разному: при уменьшении ψ давление в S_2^+ растет, а в $S_2^{+'}$ падает; скорость газа в S_2^+ увеличивается гораздо сильнее, чем в $S_2^{+'}$, где он может тормозиться; интенсивность S_4^- падает почти до нуля, а $|S_4^-|$ растет до величин больших, чем $|S_2^+|$ (изменение давления в S_4^- может втрое превосходить его изменение в S_2^+).

Случай $M_A = 2,5$ (фиг. 3, в, 4, в, 5, б) является переходным от сильного магнитного поля, определяющего течение, к более слабому, когда важны газодинамические эффекты. Из-за ослабления магнитного поля сильнее проявляется влияние давления и динамического напора. За S_1 и S_1' все силы имеют примерно один порядок, поэтому зависимости физических величин носят наиболее сложный характер. Магнитное поле во всех возникающих волнах существенно меняется.

При $M_A = 2,5$ маховское решение с $\Delta M > 0$ существует в двух областях по ψ (фиг. 2, области I, II, IX, XII). Скорость S_M уменьшается от $\Delta V_{\max}(90^\circ) = 0,47a_0$ до $\Delta V_{\min}(35^\circ) = -0,28a_0$, а затем растет: $\Delta V(0^\circ) = 0,25a_0$. Перекося маховской волны мал: $\delta_{\min}(60^\circ) = -6^\circ$. При уменьшении ψ в течении появляются катастрофы: $K_{L+}^3: S_2^{+'} \leftrightarrow (S_2^+ A_3)'$ (при этом интенсивность A_3' небольшая); $K_{L-}^6: S_3^- \leftrightarrow A_6 S_5^-$;

$K_{L-}^{3'}: (A_3 S_4^-)' \leftrightarrow S_4^-$ (альфвеновский разрыв A_3 , возникший при катастрофе K_{L+}^3 «отстает» от S_2^+ и сливается с S_4^-); $K_{0-}^6: A_6 R_5^- \leftrightarrow R_5^-$. Последние три катастрофы происходят при $\Delta M < 0$. Катастрофы $K_{||}'$ соответствуют скачкообразному изменению волн R_4^- и R_5^- (в области IX) на S_4^- и S_5^- (в области XII).

При $\psi = 0$ картина течения обладает симметрией относительно оси, направленной вдоль H_0 : $\delta = 0$, ΔV — максимально. Хотя в системе координат, связанной с точкой пересечения S_1 и S_1' , электрическое поле равно нулю ($H \parallel V$) и в регулярном решении медленные стационарные волны возникнуть не могут, в нерегулярном течении медленные волны присутствуют и имеют конечную интенсивность.

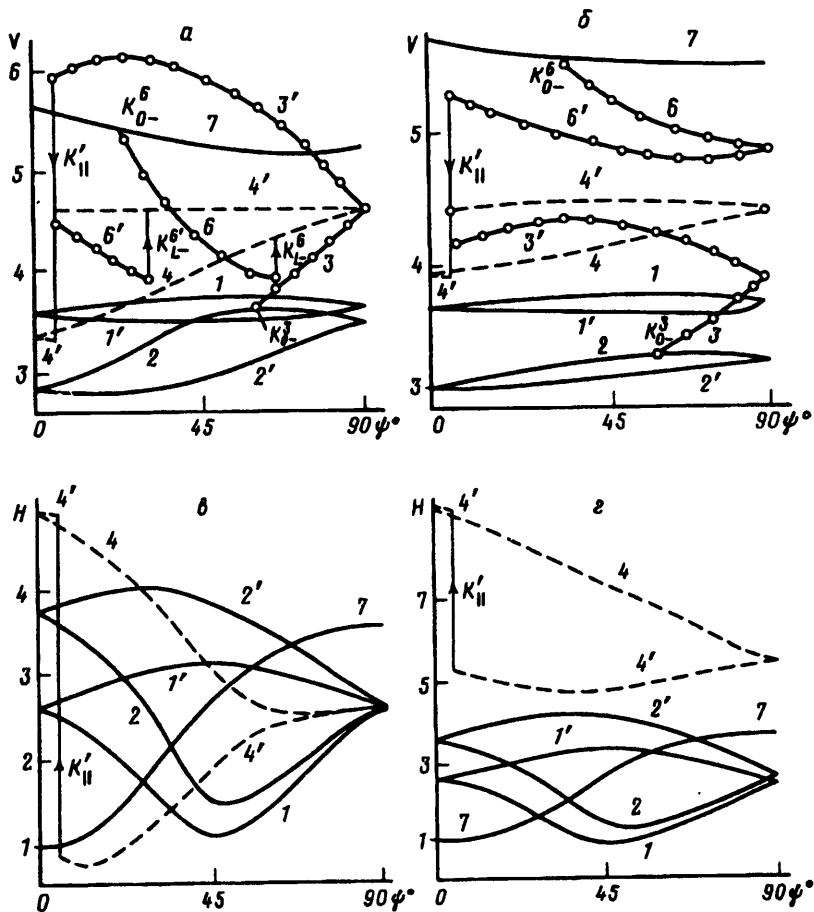
При уменьшении $|H_0|$ за S_1' не выполняются условия (3.1) (правое неравенство). Когда $M \rightarrow M_c = ([(\gamma + 1)N^2 - 2]/(\gamma - 1))^{1/2}$, ток в S_2^+ стремится к нулю и при $M = M_c$ S_2^+ вырождается в газодинамическую ударную волну с непрерывным магнитным полем. За такой S_2^+ $a_\perp = a_\parallel$, H перпендикулярно медленной магнитозвуковой характеристике. Из-за этого S^- невозможны (их максимальная интенсивность равна нулю, так как касательная компонента «выключена»), а передняя характеристика R^- примыкает сзади к S^+ . Происходит непрерывная трансформация катастрофы $K_{L+}^{3'}$ в катастрофу K_{0-}^3 . Волна S_4^+ не возникает, однако альфвеновские разрывы A_3' в течении присутствуют за счет отщепления от R_4^- (катастрофа K_{0-}^3). На фиг. 2 линия K_{0-}^3 непрерывно продолжает линию $K_{L+}^{3'}$. При некотором N катастрофа K_{0-}^3 происходит при $\psi = 90^\circ$ и в силу симметрии появляются катастрофы K_{0-}^3 . Область $\Delta M < 0$ уменьшается и катастрофы $K_{L-}^6: S_{-3}^- \leftrightarrow A_6 S_5^-$, $K_{L-}^{3'}: (A_3 S_4^-)' \leftrightarrow S_4^-$, $K_{0-}^6: A_6 R_5^- \leftrightarrow R_5^-$ происходят при $\Delta M > 0$.

Качественно новым при $M_A = 3,33$ является наличие близких катастроф $K_{L-}^3: S_4^- \leftrightarrow (A_3 S_4^-)'$, и $K_{L-}^6: S_5^- \leftrightarrow (A_6 S_5^-)'$ (фиг. 2). Эти катастрофы возникли одновременно при катастрофе параллельности $K_{||}'$, когда при $\psi = \psi_{||}'$ интенсивности S^- достигли максимально возможной величины (S_7^-) и от S_7^- отщепились альфвеновские разрывы с вдвое большим по модулю и противоположным по знаку током. Подобная многослойная токовая структура (все токовые слои почти сливаются) отмечалась при исследовании флангов магнитопаузы [13], где осуществляется только часть течения, связанная с вращательными разрывами и медленными волнами разрежения по одну сторону от C . Таким образом, переход через $K_{||}'$ из области XI в область XII на фиг. 2 приводит к одновременному исчезновению двух альфвеновских разрывов и трансформации R_4^- и R_5^- в S_4^- и S_5^- .

При небольших $\psi \approx 0$ течения в окрестности точек B и B' различаются кардинально при $\psi > \psi_{||}'$ и почти совпадают при $\psi < \psi_{||}'$. На C (т. B) достигается минимум давления и максимум напряженности магнитного поля. На C' (т. B') в случае $\psi > \psi_{||}'$ положение обратное, причем по давлению разница более чем двукратная, а по $|H|$ — десятикратная. Катастрофа параллельности $K_{||}'$ приводит к тому, что при разных знаках E_z вклад магнитного давления в полное давление на C' различен: при $\psi < \psi_{||}'$ оно составляет более половины, а при $\psi > \psi_{||}'$ — несколько процентов.

Влияние магнитного поля на давление заметно ослабляется, что выражается в уменьшении разброса значений P в различных волнах. Особенно сильно это проявляется в p^* , поскольку вклад магнитного давления пропорционален N^2 . Изменение p^* в медленных волнах уменьшается в 2—4 раза. Несмотря на существенное ослабление поля, его вклад в изменение скорости потока является определяющим. Все медленные волны и альфвеновские разрывы ощутимо тормозят или ускоряют поток. Характерна асимметрия воздействия магнитного поля в окрестности точек B и B' .

Зависимости $V(\psi)$ и $H(\psi)$ для $M_1 = M_1' = 5$, $N = 1,1; 0,4$ ($M_A = 4,54; 12,5$) приведены на фиг. 6, а, б и в, г.



Фиг. 6

Начиная с $M_A \approx 3,5 \Delta M > 0$ при любом ψ . При $M_A = 4,5 \Delta V_{\max} \approx 0,5a_0$ достигается при $\psi = 0$, $|\delta_{\max}| < 1^\circ$. Направление магнитного поля, влияя на скорость маховской волны, почти не сказывается на ее наклоне. При $M_A = 4,5$ в течении присутствуют катастрофы K_0^6 , $K_{||}^6$, K_L^6 и K_{L-}^6 . Две последние исчезают одновременно при $\psi = 90^\circ$, $M_A = 6,5$ (фиг. 2). Характерно слияние двух катастроф K_{L-}^6 при переходе от $M_A = 3,3$ к $M_A = 4,5$, после чего альфвеновский разрыв A_3' присутствует в течении при любых $\psi > \psi_{||}'$.

В медленных волнах при $M_A > 6$ полное давление почти не изменяется и изменение газодинамического давления может быть достаточно большим, хотя и существенно меньше его изменений в S_2^+ , $S_2^{+'}$ и S_M . С уменьшением $|H_0|$ масштаб изменений магнитного поля во всех медленных волнах растет, оставаясь практически неизменным в S_2^+ , $S_2^{+'}$, S_M (фиг. 6, в, г). Максимум $|H|$ достигается на С. Таким образом, при уменьшении модуля напряженности исходного магнитного поля доля магнитного давления в полном давлении сохраняется примерно на одном уровне.

Характерным остается влияние магнитного поля на изменение скорости: оно устанавливается для S_2^+ , $S_2^{+'}$, S_M примерно на одном уровне, независимом от ψ , и заметно в альфвеновских разрывах и медленных волнах (фиг. 6, а, б), так что вклад альфвеновских разрывов и медленных волн остается весьма существенным и им нельзя пренебрегать даже при небольшом начальном поле.

5. Особенности взаимодействия S_1 и S_1' при углах $\vartheta \neq 90^\circ$. Проведенное сравнение поведения физических величин позволяет утверждать, что зависимости $P(\psi)$, $V(\psi)$, $|N|(\psi)$, представленные на фиг. 3—6, достаточно адекватно характеризуют течение, возникающее при нерегулярном взаимодействии при других значениях ϑ .

При $\vartheta = 100^\circ$ сохраняются все катастрофы, формы зависимостей от ψ , относительное изменение величин в отдельных волнах. Масштабы изменения давления, магнитного поля и скорости уменьшаются, как правило, не более чем на 10%, лишь в очень сильных полях ($M_A = 1,2-1,5$) для некоторых волн давление может упасть на 50%.

При $\vartheta = 80^\circ$ подобие по параметру M_A выражено слабее из-за близости к границе существования решения и могут отсутствовать некоторые катастрофы. Характерно усиление динамического взаимодействия за счет уменьшения угла между сталкивающимися ударными волнами. Из-за этого скорости газа за всеми волнами пропорционально возрастают на величину порядка 10%, при усилении поля ускорение газа увеличивается. Газодинамическое давление растет по мере усиления поля: от 10% при $M_A = 2$ до 50—100% при $M_A = 1,2$. Магнитное поле изменяется слабо.

При углах $\vartheta = 70$ и 60° маховское решение существует только при сильном поле и ψ , близких к 90° . Тенденции ускорения среды и подъема давления резко усиливаются за счет преобразования большей части динамического напора в газодинамическое давление и увеличения скорости S_M относительно газа при уменьшении угла ϑ .

Например, при $\vartheta = 60^\circ$ скорость может увеличиваться до 60%, а давление возрастает втрое по сравнению с $\vartheta = 90^\circ$. При увеличении $|H_0|$ ускорение среды, подъем давления и $|N|$ возрастают.

6. Заключение. Найдено, что скорость и ориентация маховской ударной волны существенно зависят от вектора напряженности магнитного поля в исходном состоянии. Сильное магнитное поле ($M_A \geq 1$) приводит к дополнительному сильному ускорению маховской ударной волны (максимально при $\psi = 90^\circ$) и повороту S_M навстречу повороту поля. При ослаблении напряженности магнитного поля ($M_A > 5$) наклон S_M практически не изменяется при повороте поля, она ускоряется при $\psi \rightarrow 0$.

Волновая картина возникающего течения является функцией всех определяющих параметров и особенно чувствительна к наклону магнитного поля ψ . Имеет место приближенное подобие течения как функции ψ по числу Маха по альфвеновской скорости M_A . Найдены значения параметров, при которых происходят катастрофические перестройки волновой картины. При этом происходят скачкообразные изменения течения и магнитного поля в области за сталкивающимися ударными волнами.

Промежуточные значения напряженности магнитного поля ($M_A \approx 3$) характеризуются большим числом катастроф различных типов, при этом изменения магнитного поля и давления в быстрых и медленных волнах имеют один порядок. При слабом исходном магнитном поле его напряженность в течении многократно усиливается. Когда магнитное давление в исходном течении много меньше динамического напора, медленные волны и особенно альфвеновские разрывы генерируют большие ускорения и торможения среды.

Авторы благодарны Г. Г. Черному, А. Б. Ватажину, А. Г. Куликовскому и Г. А. Любимову за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А. А., Пушкарь Е. А. Пересечение ударных волн в магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 132—143.
2. Пушкарь Е. А. Обобщенные поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений в магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 111—119.

3. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
6. Neubauer F. M. Nonlinear oblique interaction of interplanetary tangential discontinuities with magnetogasdynamic shocks//J. Geophys. Res. 1975. V. 80. № 10. P. 1213—1222.
7. Пушкарь Е. А., Бармин А. А., Гриб С. А. Исследование в МГД-приближении падения ударной волны солнечного ветра на околоземную головную ударную волну//Геомагнетизм и аэрономия. 1991. Т. 31. № 3. С. 522—525.
8. Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 702 с.
9. Баженова Т. В., Геоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.
10. Бармин А. А., Пушкарь Е. А. Наклонное взаимодействие альфвеновского и контактного разрывов в магнитной гидродинамике//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 131—142.
11. Pushkar E. A. The numerical simulation methods of the oblique shock waves interaction in the magnetized conducting media//The Third Russian-Japan Joint Symposium on Computational Fluid Dynamics. Russia, Vladivostok, August 25—30, 1992. P. 158—159.
12. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ. Итоги науки и техн. Т. 30. 1987. 262 с.
13. Алимарин С. И., Тверской Б. А. Магнитогидродинамическое течение на границе магнитосферы//Геомагнетизм и аэрономия. 1979. Т. 19. № 3. С. 425—430.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1993