МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1993

УДК 532.5.013.2

 С. С. ГРИГОРЯН

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОНИКАНИИ ТЕЛА В ГРУНТ

Дается анализ качественных особенностей задачи проникания твердого тела в грунтовую среду и строится приближенное ее решение в виде явных конечных формул, позволяющих рассчитать все параметры процесса движения тела в функции времени.

Для количественного описания процесса входа твердого тела в мягкий грунт и последующего его движения в грунте необходимо иметь полную математическую модель грунтовой среды, в рамках которой и должна ставиться и решаться соответствующая математическая задача. Такая модель предложена и детализирована систематическими экспериментами в работах автора (см., например, [1—3]). С использованием этой модели задачу проникания можно сформулировать в точной постановке, однако решение такой задачи о неустановившихся пространственных движениях грунта вокруг движущегося в нем тела наталкивается на непреодолимые математические трудности. Конечно, задача в точной постановке доступна решению численными методами — для этого в настоящее время имеются хорошие вычислительные алгоритмы и мощные компьютеры. Однако получающиеся при численном решении результаты плохо обозримы, с их помощью трудно проводить параметрический анализ решения и важные для приложений инженерные оценки. В связи с этим интерес представляет построение приближенного решения задачи о проникании, учитывающего по возможности достаточно полно все основные механические эффекты, сопровождающие проникание. Ниже строится такое решение.

Прежде всего отметим, что основной интерес для приложений представляет задача о проникании тел, способных устойчиво двигаться в грунте после удара передней частью о его поверхность. Этим свойством обладают тела с затупленной передней частью. Движение заостренных тел, лишенных стабилизирующих органов, неустойчиво и траектории движений таких тел в грунте испытывают резкие изгибы, что приводит к дезорганизации последующего движения и разрушению тела. По этой причине будем рассматривать движение затупленных тел.

В момент соударения передней затупленной части поверхности тела с поверхностью грунта на поверхности контакта развиваются давления порядка

$$p = \rho_0 v_0 D \tag{1}$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность грунта, D — скорость ударной волны, возникающей в грунте при ударе телом, имевшим начальную скорость v_0. Давления, оцениваемые соотношением (1), действуют в течение времени порядка

$$\tau = k\frac{d}{D}, \quad k \sim 1—3 \tag{2}$$

где d — диаметр затупленной части поверхности тела. В течение этого времени тело получает тормозящий импульс i порядка

$$i = \frac{\pi}{4} d^2 p\tau \tag{3}$$

и его скорость уменьшается на величину Δv порядка

$$\Delta v = \frac{\pi d^2 p\tau g}{G} \tag{4}$$

где G — вес тела, g — ускорение силы тяжести.

Максимальную перегрузку тело испытывает на рассматриваемой кратковременной начальной стадии движения и эта перегрузка оценивается формулой

$$n_1 \equiv \frac{\max|\dot{v}|}{g} = \frac{\Delta v}{g\tau} = \frac{\pi d^2 p}{4G} \tag{5}$$

В приведенных формулах единственной величиной, пока не выраженной через исходные параметры задачи, является скорость ударной волны D. Для ее определения необходимо привлечь сведения о сжимаемости грунта. Динамическое уравнение объемной деформируемости мягкого грунта — ее «ударную адиабату» — в соответствии с опытными данными можно [3] аппроксимировать соотношением вида

$$p = A\rho_0 C_0^2 \theta^2, \quad \theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \tag{6}$$

где A — безразмерное число порядка 20, C_0 — скорость звука в невозмущенном грунте, ρ — текущая плотность грунта, соответствующая давлению p.

Соотношение (6) имеет место при $\theta \le \theta_*$, где $\theta_* = \text{const} \sim 0{,}3$—$0{,}4$. При $p > A\rho_0 C_0^2 \theta_*^2$ можно принять $\theta = \text{const} = \theta_*$.

Соотношения на ударной волне, за которой скорость частиц равна u, имеют вид

$$\theta = \frac{u}{D}, \quad p = \rho_0 u D \tag{7}$$

откуда при $\theta \le \theta_*$ имеет с учетом (6)

$$p = A^{1/3} \rho_0 C_0^2 \left(\frac{u}{C_0}\right)^{4/3} \tag{8}$$

$$D = A^{1/3} C_0 \left(\frac{u}{C_0}\right)^{1/3} \tag{9}$$

Условие $\theta \le \theta_*$ приводится при этом к виду $u \le (A\theta_*)^{1/2} C_0$ и при $A \approx 20$ и $\theta_* \approx 0{,}35$—$0{,}40$ дает $u/C_0 \le 0{,}9$—$1{,}1$ т. е. практически приведенные соотношения выполняются при дозвуковом движении тела, если $u = v_0$. Если же скорость грунта за ударной волной больше скорости звука C_0, то вместо (8), (9) имеем

$$p = \frac{1}{\theta_*} \rho_0 u^2 \tag{10}$$

$$D = \frac{1}{\theta_*} u \tag{11}$$

При ударе телом о поверхность грунта по грунту и по телу пойдут ударные волны. Однако если, как это обычно и бывает, акустическая жесткость тела $\rho_b C_b$ значительно превосходит таковую для грунта, то тело можно считать жестким и для расчета начальных параметров задачи по приведенным выше формулам полагать $u = v_0$.

В качестве примера рассмотрим случай: $d = 0{,}3$ м, $C_0 = 600$ м/с, $\rho_0 = 2000$ км/м^3 (суглинок), $v_0 = 600$ м/с, $G = 500$ кг. Будем иметь, по выведенным формулам: $D \approx 1600$ м/с, $p \approx 1{,}35 \cdot 10^4$ кг/см^2, $\tau \approx 0{,}2-0{,}6 \cdot 10^{-3}$ с, $\Delta v \approx 160$ м/с, $n_1 \approx 2000$. Смещение тела за время τ составит величину порядка $v_0\tau \approx 0{,}12$—$0{,}36$ м, т. е. величину порядка диаметра d передней части тела.

По истечении времени порядка величины τ, оцениваемой по формуле (2), начинается вторая, более продолжительная стадия движения, на которой нестационарные эффекты в движении грунта относительно тела незначительны, и это движение можно считать квазистационарным.

Важнейшим для дальнейшего анализа задачи и соответствующих аналитических построений свойством возникающего на второй стадии движения грунта является отрыв грунтового потока от обтекаемой поверхности тела, т. е. кавитационный характер обтекания. Это свойство движения, хорошо известное в гидродинамике капельной жидкости, естественным образом возникает и в рассматриваемой здесь задаче о движении тела с большой скоростью в грунте. Более того, из-за наличия у грунтов значительного сопротивления сдвиговому деформированию, а также значительной необратимости их объемной деформируемости отрыв потока от обтекаемой поверхности, т. е. кавитационное обтекание, в грунтах происходит при менее жестких требованиях к условиям обтекания, чем в жидкости, лишенной этих свойств. Это обстоятельство позволяет значительно упростить задачу определения действующей на тело со стороны обтекающего его грунта силы.

В самом деле, при кавитационном обтекании тела область контакта его поверхности с грунтом ограничена передней затупленной частью этой поверхности, имеющей характерный размер d, так что сила сопротивления F определяется выражением

$$F = C_x' S p_* + C_x'' S 4 \frac{l}{d} \sigma_{f*} . \tag{12}$$

где S — площадь миделя передней части тела, l — расстояние миделя от передней точки — вершины поверхности тела, C_x', C_x'' — «коэффициенты формы», определяемые характером распределения по поверхности контакта тела с грунтом нормальных и касательных напряжений соответственно p_n и σ_f, имеющих максимальные значения p_* и σ_{f*}.

В соответствии с условием пластичности для мягких грунтов [3] между σ_f и p_n имеется связь вида

$$\sigma_f = \alpha p_n + b \tag{13}$$

где $\alpha \sim 0{,}3$—$0{,}6$, $b \leq 1$ кг/см^2, поэтому, используя (13) также и для p_* и σ_{f*} и полагая $C_x'' \approx C_x' = C_x \sim 0{,}4$—$0{,}6$, приводим (12) к виду

$$F = C_x \left(1 + 4\alpha \frac{l}{d} \right) p_* S \tag{14}$$

Для завершения процедуры определения силы F, что позволит перейти к расчету движения тела на второй квазистационарной стадии движения грунта, остается определить величину максимального давления p_*, развивающегося на лобовой части тела. Здесь надо отдельно рассмотреть два существенно разных возможных случая квазистационарного движения — со сверхзвуковой и дозвуковой скоростями. В сверхзвуковом случае, как было показано выше, приближенно выполняется условие $\theta = \text{const} = \theta_*$, а давление и скорость за ударной волной в соответствии с формулами (10), (11), в которых в силу квазистационарности следует положить $D = v$, определяются формулами

$$p = \rho_0 \theta_* v^2, \qquad u = \theta_* v \tag{15}$$

Давление за фронтом ударной волны связано с давлением p_* в точке торможения на обтекаемой поверхности тела соотношением типа уравнения Бернулли в гидродинамике, получающимся из уравнений движения грунта, записанных для оси симметрии течения, при их интегрировании после оценки порядков входящих в них величин нормальных и касательных напряжений, и имеющим вид

$$p_* = p + \frac{1}{2}\rho_0 u^2 \tag{16}$$

что с учетом (15) дает

$$p_* = (1 + 0{,}5\theta_*)\, p \approx p = \rho_0\theta_* v^2 \tag{17}$$

Таким образом, для сверхзвуковой стадии движения имеем

$$F = C_X\left(1 + 4\alpha\frac{l}{d}\right) S\rho_0\theta_* v^2 \tag{18}$$

Уравнения движения тела массы m, испытывающего сопротивление, определяемое формулой (18), имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = -C_X\left(1 + 4\alpha\frac{l}{d}\right) S\rho_0\theta_* v^2, \qquad \frac{dx}{dt} = v \tag{19}$$

и решение для скорости v при начальном условии

$$v(0) = v_1 = v_0 - \Delta v = v_0\left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m}\right) \tag{20}$$

имеет вид

$$v = \frac{v_1}{1 + qv_1 t} \tag{21}$$

$$q = \frac{1}{m} C_X\left(1 + 4\alpha\frac{l}{d}\right)\theta_*\rho_0 S \tag{22}$$

Очевидно, условием существования сверхзвуковой стадии движения является неравенство $v_1 > C_0$, что с учетом (20) приводится к виду

$$\frac{v_0}{C_0}\left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m}\right) > 1 \tag{23}$$

Сверхзвуковая стадия завершается при $v = C_0$, т. е. при (см. (21))

$$1 + qv_1 t_1 = \frac{v_1}{C_0} \tag{24}$$

Интегрирование второго из уравнений (19) с учетом (21) при начальном условии

$$x(0) = x_0 = v_1\tau \tag{25}$$

дает

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{q}\ln(1 + qv_1 t) \tag{26}$$

что при $v = C_0$ определяет путь, пройденный телом к концу сверхзвуковой стадии движения (в момент времени t_1)

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + \frac{1}{q}\ln\frac{v_1}{C_0} \tag{27}$$

После перехода скорости тела через скорость звука ударная волна в грунте быстро удаляется от поверхности тела и дальнейшее движение происходит также в квазистационарных условиях. При этом давление p_* в точке торможения на поверхности тела определяется по оценочному соотношению типа уравнения Бернулли, получаемому подобно (16) и имеющему вид

$$p_* = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_0 v^2 \tag{28}$$

Здесь p_∞ — давление далеко впереди тела на оси симметрии движения, где достигнуто предельное состояние по сдвигу и начинается пластическое течение грунта. Для оценки p_∞ используем соотношение (при $v=0$), дающее условие равновесия приведенного в предельное состояние массива грунта впереди и вокруг головной части тела и имеющее вид

$$p_\infty d^2 \approx p_m d_m^2 \tag{29}$$

где d_m — диаметр указанного массива грунта, p_m — среднее напряжение на поверхности этого массива, отделяющей его от остального грунта, не перешедшего в предельное состояние. Это напряжение оценивается величиной исходного (невозмущенного) давления $\rho_0 gx$ на глубине x с добавкой величины порядка сцепления грунта b, т. е.

$$p_m \approx \rho_0 gx + b \tag{30}$$

Из статики грунтов известно, что соотношение между d и d_m имеет вид

$$d_m \approx Kd, \qquad K \sim 5\text{—}10 \tag{31}$$

Таким образом, для сопротивления F на дозвуковой стадии движения имеем приближенную формулу

$$F = C_x\left(1 + 4\alpha\frac{l}{d}\right) S\left[\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + K^2(\rho_0 gx + b)\right] \tag{32}$$

или

$$F = \frac{1}{2}C_x\left(1 + 4\alpha\frac{l}{d}\right) S\rho_0 (v^2 + v_*^2) \tag{33}$$

$$v_* = K\left[2\left(gx + \frac{b}{\rho_0}\right)\right]^{1/2} \tag{34}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{m}F(v^2,\ x) = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = v \tag{35}$$

и должны решаться при начальных условиях

$$v(0) = C_0, \qquad x(0) = x_0 + \frac{1}{q}\ln\frac{v_1}{C_0} \tag{36}$$

при соблюдении условия (23) и

$$v(0) = v_1, \qquad x(0) = x_0 \tag{37}$$

при нарушении условия (23), т. е. при отсутствии сверхзвуковой стадии.

Уравнения (36) допускают решение в квадратурах, однако для получения простых и достаточно точных формул заменим в выражении для $F = F(v^2,\ x)$ аргумент x постоянной величиной $x = H$, тогда квадратура

$$x = x(0) - m\int_{v(0)}^{v}\frac{v\,dv}{F(v^2)} \tag{38}$$

дает

$$x = x(0) + \frac{m}{C_x(1 + 4\alpha l/d)\, S\rho_0} \ln \frac{v^2(0) + v_*^2}{v^2 + v_*^2} \tag{39}$$

В итоге отсюда для полного пути L тела до остановки, т. е. при $v = 0$, получаем при наличии сверхзвуковой стадии, т. е. при соблюдении условия (23), выражение

$$L = \frac{m}{C_x(1 + 4\alpha l/d)\, S\rho_0} \left\{ \frac{1}{\theta_*} \ln \left[\frac{v_0}{C_0} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) \right] + \ln \left[1 + \left(\frac{C_0}{v_*} \right)^2 \right] \right\} \tag{40}$$

при $\frac{v_0}{C_0} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) > 1$

а при отсутствии сверхзвуковой стадии выражение

$$L = \frac{m}{C_x(1 + 4\alpha l/d)\, S\rho_0} \ln \left\{ 1 + \left[\frac{v_0}{v_*} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) \right]^2 \right\} \tag{41}$$

при $\frac{v_0}{C_0} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) < 1$

В выражениях (40), (41) опущено слагаемое $x_0 = v_1\tau$ в силу того, что оно всегда имеет порядок d и им можно пренебречь.

Максимальная перегрузка $n_2 = \max |\dot v| / g$ на втором, квазистационарном, этапе движения определяется выражениями

$$n_2 = C_x \left(1 + 4\alpha\frac{l}{d} \right) \theta_* \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right)^2 \frac{\rho_0 v_0^2 S}{G} \tag{42}$$

при

$$\frac{v_0}{C_0} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) > 1$$

и

$$n_2 = \frac{1}{2} C_x \left(1 + 4\alpha\frac{l}{d} \right) \left[\left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right)^2 + \left(\frac{v_*}{v_0} \right)^2 \right] \frac{\rho_0 v_0^2 S}{G} \tag{43}$$

при $\frac{v_0}{C_0} \left(1 - k\frac{\rho_0 S d}{m} \right) < 1$

Величину $x = H$ в выражении для v_* можно задать сначала по порядку величины, а затем уточнить, положив $H = 0{,}5L$, где L — рассчитанная глубина проникания в первом приближении. Для более точных расчетов можно воспользоваться точными квадратурами, которые допускают уравнения движения (35).

Рассмотрим пример. Пусть $\rho_0 = 2000$ кг/м^3, $C_0 = 600$ м/с, $\alpha = 0{,}3$, $b = 1$ кг/см^2, $\theta_* = 0{,}3$ (суглинок), $k = 3$, $K = 7$, $l/d = 1/6$, $d = 0{,}2$ м, $C_x = 0{,}8$, $G = 10^3$ кг, $v_0 = 600$ м/с, $H = 15$ м. Расчет дает $v_* = 140$ м/с, $v_0(1 - k\rho_0 S d/m)/c_0 = 0{,}96$, т. е. $\Delta v/v_0 = 4\%$.

По формуле (41) (дозвуковой случай) получаем $L = 48$ м. По формуле (5) для перегрузки при ударе с учетом (6)—(11) получается $n_1 \approx 7500$, тогда как по формуле для перегрузки (43) получаем $n_2 = 1000$.

Специально поставленными опытами — стрельбой в грунт металлическими пулями разной формы, изготовленными из металлов с разными удельными весами, при диаметрах $d = 7{,}45$ и 34 мм и при скоростях до 10^3 м/с — полученные выше соотношения подтверждены с хорошей точностью.

Сопоставление результатов теории и эксперимента проводилось следующим образом. В формулах (40), (41) все параметры, кроме C_x, считались задаваемыми и определялись по условиям эксперимента. Затем, приравнивая расчетные и экспериментальные значения глубины проникания L, определяли значение C_x, обеспечивающее такое равенство. Оказалось, что разброс полученных для разных опытов значений C_x составил величину порядка 10—15%, что с учетом влияния нестабильности свойств грунта и приближенности теории следует признать хорошим подтверждением соответствия теории реальному процессу. Аналогичная процедура была выполнена также для максимальной перегрузки (формулы (5)—(11)). Здесь разброс значений аналогичного C_x коэффициента формы оказался еще меньше (в пределах 10%).

В заключение укажем, что данная работа была выполнена в 1969 году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорян С. С.* Об общих уравнениях динамики грунтов//Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 2.
2. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов//ПММ. 1960. Т. 24. № 6. С. 1057—1072.
3. *Григорян С. С.* Исследования по механике грунтов: Докт. дис. М.: МГУ, 1965.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1993