

УДК 533.6.011.5

© 1993 г. М. И. ФОЛЛЭ

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ПОД УГЛОМ АТАКИ ЗВЕЗДООБРАЗНОГО ТЕЛА, НЕ ИМЕЮЩЕГО ПЛОСКОСТЕЙ СИММЕТРИИ

Изучение аэродинамики звездообразных тел имеет богатую результатами историю, начатую новаторской работой Г. Г. Черного и его ученика А. Л. Гонора [1]. Однако теоретических работ по сверхзвуковому обтеканию тел со звездообразным поперечным и продольным степенным контуром под углом атаки до последнего времени не было. В результате решения краевой задачи получена [2] формула подъемной силы. Было показано, что при сделанных предположениях подъемная сила не зависит от продольного контура, числа Маха, а также от угла поворота поперечного контура. Результаты сравнения с экспериментом оказались хорошими в неожиданно широком диапазоне (вплоть до значений $R\bar{B} < 2 - 2,5$, R — относительная толщина, $B^2 = M_\infty^2 - 1$, M_∞ — число Маха в набегающем потоке). Было также доказано отсутствие боковой силы для любого числа лучей звездообразного контура, начиная с $n = 3$.

При обсуждении этих результатов возникла дискуссия о том, связано ли отсутствие боковой силы с наличием плоскостей симметрии у рассматриваемого тела или это следствие звездообразности поперечного контура.

В данной работе будет рассмотрен более общий тип звездообразного тела — без плоскостей симметрии, т. е. поперечный контур останется только центрально-симметричным с $2n$ вершинами, преобразующийся сам в себя при повороте на угол $2\pi/n$. Для этого тела можно рассмотреть также и крутящий момент.

1. Систему координат вводим аналогично [1] — ось x по вектору скорости невозмущенного потока, в поперечной плоскости вводим $\omega = y + iz$

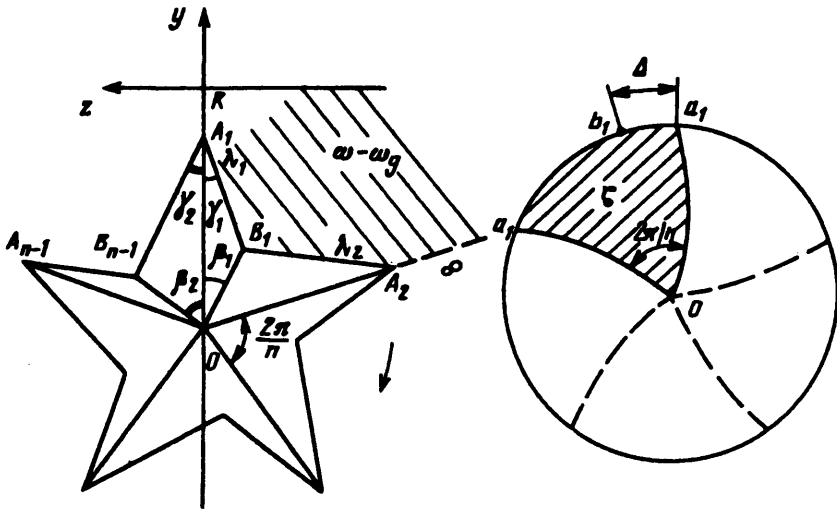
$$\omega - \omega_z = R_0(\beta) f(x) e^{i(\beta - \beta_0)} \quad \omega_z = -\alpha x$$

$$R_0(\beta) = R \frac{\sin \gamma_2}{\sin(\gamma_2 + \beta)} \quad (0 < \beta < \beta_2),$$

$$R_0(\beta) = R \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\gamma_1 - \beta)} \quad (-\beta_1 < \beta < 0) \quad (1.1)$$

Здесь угловой параметр β отсчитывается от луча звезды в плоскости поперечного сечения, β_0 — отклонение луча от оси y , α — угол атаки, ω_z — отклонение центра тяжести поперечного сечения; произвольная с учетом требования остроконечности [3] функция $f(x)$ описывает продольный контур; периодическая функция $R_0(\beta)$ — поперечный контур; R — отношение длины луча в миделевом сечении к длине тела. Смысл геометрических параметров γ_1 , γ_2 , β_1 , β_2 , $\beta_1 + \beta_2 = 2\pi/n$ ясен из фиг. 1. В частном случае $\alpha = 0$ $R(\beta)$ и β становятся полярными координатами.

Граничное условие для потенциала преобразуется для функции $\psi(x, y, z)$ (связанной с потенциалом условиями Коши — Римана в любой поперечной плоскости ω) к виду [2]



Фиг. 1

$$\psi(x, y, z) = \psi_0(x, y, z) + \psi_\alpha(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \psi_0(x, y, z)}{\partial \beta} = -f'(x) f(x) R_0^2(\beta) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha(x, y, z)}{\partial \beta} = \alpha f(x) [R_0'(\beta) \sin(\beta - \beta_0) + R_0(\beta) \cos(\beta - \beta_0)]$$

Конформное отображение внутренности единичного круга $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $|\zeta| < 1$ на внешность n -лучевой центрально-симметричной звезды, переходящей в себя при повороте $2\pi/n$, производится по формуле Кристоффеля — Шварца

$$(\omega - \omega_0) e^{i\beta_0} = C_1 \int \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + C_2 \quad (1.3)$$

Здесь a_k — комплексные координаты вершин звезды, $\alpha_k \pi$ — соответствующие внешние углы звезды. При этом бесконечно удаленной точке заштрихованного на фиг. 1 четырехугольника соответствует центр единичного круга, а точке $A_1(R(\beta) = R, \beta = 0)$ — точка $a_1(r = 1, \theta = 0)$. Кроме того, можно потребовать, чтобы точка $A_2(R_0(\beta) = R, \beta = -2\pi/n)$ перешла в точку $a_2(r = 1, \theta = 2\pi/n)$. Однако угловую координату точки b_1 , соответствующей B_1 , следует уже определять из конформного преобразования, как, впрочем, и константу C_1 .

При работе с симметричным конформным преобразованием [2, 3], которое является частным случаем преобразования (1.3), использовался принцип симметрии Шварца, причем так, что участок действительной оси переходил при отображении снова в участок действительной оси и таким образом получалось, что C_1 — действительная и положительная константа. К сожалению, в рассматриваемом более общем случае принципом симметрии Шварца пользоваться нельзя, C_1 , вообще говоря, — комплексная константа. Упростим (1.3)

$$(\omega - \omega_0) e^{i\beta_0} = C_1 \int_0^{\zeta} \frac{(\zeta^n - 1)^{F_1(\gamma)} d\zeta}{(\zeta^n - e^{i\Delta n})^{F_2(\gamma)} \zeta^2} + C_2 \quad (1.4)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \quad F_1(\gamma) = 1 - \frac{2\gamma}{\pi}, \quad F_2(\gamma) = 1 - \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{2}{n}, \quad C_2 = Rf(x)$$

Здесь угловые координаты внешних вершин $a_k \theta = 2\pi(k-1)/n$, внутренних $\theta = \Delta + 2\pi(k-1)/n$, $k=1, \dots, n$ (фиг. 1). Для нахождения величины $\Delta = \pi/n - \varepsilon$ (ε удобно ввести вместо Δ) воспользуемся известными длинами сторон звездообразного контура $|A_i B_i| = \lambda_i$

$$\lambda_i = Rf(x) \sin \beta_i / \sin (\beta_i + \gamma_i) \quad (i = 1, 2)$$

С другой стороны, полагая для точек контура звезды $\zeta = e^{\theta}$, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= |C| Rf(x) 2^{2/n} \int_0^{\pi/n-\varepsilon} G_+(\theta) d\theta \\ \lambda_2 &= |C| Rf(x) 2^{2/n} \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$C_i = Rf(x) C, \quad G_{\pm}(\theta) = \left(\sin \frac{n\theta}{2}\right)^{F_1} \left(\cos \frac{n}{2}(\theta \pm \varepsilon)\right)^{-F_2}$$

После чего ε легко находится из уравнения

$$\lambda_1 \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) d\theta = \lambda_2 \int_0^{\pi/n-\varepsilon} G_+(\theta) d\theta \quad (1.6)$$

Зависимость функций $G_{\pm}(\theta)$ также и от ε этому не мешает, решение уравнения (1.6) единственно. Теперь легко найти $|C|$ из соотношений (1.5). Для нахождения аргумента C следует правильно выбрать значение многозначной функции

$$\arg C = \gamma - \arcsin \left(\frac{r}{\lambda_2} \sin \beta_2 \right) - \frac{\varepsilon n}{2} F_2, \quad r = \frac{R \sin \gamma_2}{\sin (\gamma_2 + \beta_2)}$$

Обозначая на контуре $\psi^*(\theta) = \psi(\beta)$, следует аналогично [2, 3] ввести заглавные буквы Ψ^* и Φ^* для обозначения ограниченной части функций ψ^* , φ^* . Тогда для $\Psi_0^*(\theta, x)$ получим

$$\begin{aligned} \Psi_0^*(\theta, x) &= \frac{S'(x)\theta}{2\pi} - S'_{\Delta_1}(x) \int_0^{\theta} G_+(\theta) d\theta \left[\int_0^{\pi/n-\varepsilon} G_+(\theta) d\theta \right]^{-1} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{n} - \varepsilon) \\ \Psi_0^*(\theta, x) &= \frac{S'(x)\theta}{2\pi} - S'_{\Delta_2}(x) \int_0^{\theta} G_-(\theta) d\theta \left[\int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) d\theta \right]^{-1} \\ & \quad \left(- \left(\frac{\pi}{n} + \varepsilon \right) < \theta < 0 \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $S_{\Delta_1}(x)$ и $S_{\Delta_2}(x)$ — соответственно площади треугольников $A_1 B_1 O$ и $A_1 B_{n-1} O$, $S(x)$ — площадь поперечного сечения

$$S_{\Delta_i}(x) = S_i^* f^i(x) R^2, \quad S_i^* = \frac{\sin \beta_i \sin \gamma_i}{2 \sin (\beta_i + \gamma_i)} \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

Заметим, что формулы (1.7) можно использовать и в нуле $\Psi_0^*(0, x) = 0$, так что $\Psi_0^*(\theta, x)$ определена при $-(\pi/n + \varepsilon) < \theta < \pi/n - \varepsilon$, т. е. внутри дуги, составляющей $1/n$ часть окружности. На границах этой дуги

$$\begin{aligned} \Psi_0^* \left(\frac{\pi}{n} - \varepsilon, x \right) - \Psi_0^* \left(- \frac{\pi}{n} - \varepsilon, x \right) &= \frac{S'(x)}{2n} - \frac{S'(x)\varepsilon}{2\pi} - S'_{\Delta_1}(x) + \\ &+ \frac{S'(x)}{2n} + \frac{S'(x)\varepsilon}{2\pi} - S'_{\Delta_2}(x) = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, можно доопределить $\Psi_0^*(\theta, x)$ на границах дуги, причем, как и при $\theta = 0$, неважно, какой из двух формул (1.7) пользоваться. Итак, теперь при всех остальных значениях θ функцию $\Psi_0^*(\theta, x)$ можно определить по периодичности

$$\Psi_0^*(\theta, x) = \Psi_0^*(\theta \pm 2\pi/n, x)$$

Преобразование граничных условий для $\psi_\alpha^*(\beta)$ не требует выделения ограниченной части и в общем проводится аналогично симметричному случаю [2]. Для произвольного нечетного и соответственно четного секторов можно получить

$$-\frac{2\pi p}{n} - \beta_1 < \beta < -\frac{2\pi p}{n}, \quad \frac{2\pi p}{n} < \theta < \frac{2\pi p}{n} + \Delta, \quad p = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha^*(\theta, x)}{\partial \theta} = \alpha \sin\left(\gamma_1 - \frac{2\pi p}{n} - \beta_0\right) |C_1| G_+ \left(\theta - \frac{2\pi p}{n}\right) 2^{2/n}$$

$$-\frac{2\pi p}{n} < \beta < -\beta_1 - \frac{2\pi(p-1)}{n}, \quad \Delta + \frac{2\pi(p-1)}{n} < \theta < \frac{2\pi p}{n}, \quad p = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha^*(\theta, x)}{\partial \theta} = \alpha \sin\left(\gamma_2 + \frac{2\pi p}{n} + \beta_0\right) |C_1| G_- \left(\frac{2\pi p}{n} - \theta\right) 2^{2/n} \quad (1.9)$$

2. Комплексный потенциал в теории тонкого тела можно описать [4]

$$w(\omega, x) = a_0(x) \ln[(\omega - \omega_0) e^{i\beta_0}] + b_0(x) + W(\omega, x)$$

$$W(\omega, x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m} (\omega e^{i\beta_0})^{-m} \quad (2.1)$$

$$a_0(x) = \frac{S'(x)}{2\pi}, \quad b_0(x) = S'(x) \ln \frac{B}{2} - \int_0^x S(s) \ln(x-s) ds$$

Для оценки подъемной силы Y и боковой силы Z в поперечной плоскости вводится комплексная сила $F = Y + iZ$ [2]

$$\frac{F(x)}{1/2\rho_1 U^2} = \frac{4\pi b_{-1}(x)}{e^{i\beta_0}} - 2S'(x) \alpha \quad (2.2)$$

Опустим звездочку при обозначении функций в плоскости ζ . Разложим граничные условия для $\psi_\alpha(\rho, \theta, x)$, $\Psi_0(\rho, \theta, x)$ в ряд Фурье, понимая под $\Psi(\rho, \theta, x)$ любую из этих функций

$$\Psi(\rho, \theta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \Psi_k(\theta, x)$$

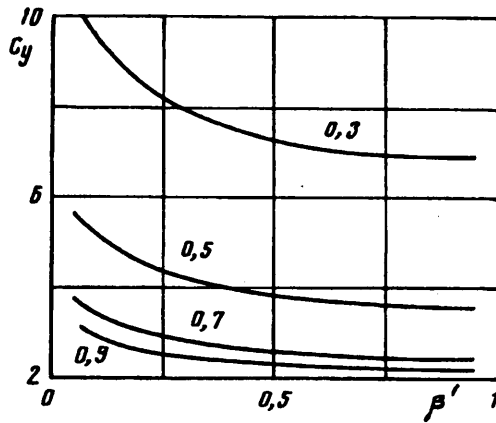
$$\Psi_k(\theta, x) = A_k(x) \cos k\theta + B_k(x) \sin k\theta, \quad A_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(\theta, x) d\theta$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\theta, x) \cos k\theta d\theta, \quad B_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\theta, x) \sin k\theta d\theta$$

$$W(\zeta, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (B_k(x) + iA_k(x)) \quad (2.3)$$

Коэффициент b_{-1} вычисляется с помощью теоремы о вычетах для интеграла (1.4)

$$b_{-1} = C_1 e^{i\pi F_2} (B_1 + iA_1) \quad (2.4)$$



Фиг. 2

В отличие от симметричного случая теперь C_1 — комплексная константа. Из-за периодичности $\Psi_0(\theta)$ — формула (1.9) — эта функция не дает вклада в b_{-1} и, следовательно, в формулу для сил в поперечной плоскости (2.2). Используем граничные условия (1.8) для нахождения коэффициентов A_1, B_1

$$A_1 = \frac{|C_1| 2^{2/n} \alpha}{\pi} \sum_{p=1}^n (S_-(p) - S_+(p))$$

$$B_1 = \frac{|C_1| 2^{2/n} \alpha}{\pi} \sum_{p=1}^n (T_-(p) + T_+(p))$$

$$S_{\mp}(p) = \sin \left(\gamma_{\mp} + \frac{2\pi p}{n} \mp \beta_0 \right) \int_0^{\pi/n\mp} \sin \left(\frac{2\pi p}{n} - \theta \right) G_{\pm}(\theta) d\theta$$

$$T_{\mp}(p) = \sin \left(\gamma_{\mp} + \frac{2\pi p}{n} \mp \beta_0 \right) \int_0^{\pi/n\mp} \cos \left(\frac{2\pi p}{n} - \theta \right) G_{\pm}(\theta) d\theta \quad (2.5)$$

Здесь $\gamma_1 = \gamma_-$, $\gamma_2 = \gamma_+$, берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Расчеты по формулам (2.2), (2.4), (2.5) приводят к следующим выводам.

Боковая сила $Z = 0$. Этот вывод не зависит от конкретной геометрии поперечного контура ($n = 3, 4, 5, \dots$). Следовательно, и для звездообразных тел без плоскостей симметрии равнодействующая сила сохраняется в плоскости угла атаки.

Подъемная сила Y не зависит от угла поворота поперечного контура β_0 .

На фиг. 2 в качестве примера приведена подъемная сила $c'_y = c_y/\alpha S(1)$ в зависимости от степени асимметричности $\beta' = \beta_1/\beta_2$ для $n = 4$ и различных значений $r' = r/R$ (r — радиус малой окружности OB_1 , фиг. 1). Для других n графики аналогичны. Зависимость подъемной силы от $n, \beta_1/\beta_2$ довольно слабая, от r/R — очень сильная, $c'_y = 2$ соответствует осесимметричному телу.

Область применимости формулы подъемной силы, полученной для симметричного звездообразного тела, подробно исследовалась [2]. Эта область оказалась неожиданно широкой ($RB \lesssim 2 - 2,5$, $B^2 = M_{\infty}^2 - 1$) — на порядок шире, чем соответствующая область для формулы волнового сопротивления [3]. Естественно предположить, что более общий вид звездообразного тела не должен существенно повлиять на ширину области применимости формул для сил в поперечной плоскости. Но теперь в отличие от симметричного случая следует рассмотреть

еще и крутящий момент звездообразного тела. Для возмущения давления будет использована формула

$$\frac{p - p_1}{1/2\rho_1 U^2} = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.6)$$

без квадратичных добавок, так как эти добавки, как показано в [5], ведут к улучшению результата в узкой области, а вне ее приносят вред.

3. В граничные условия для $\Psi_0(\theta, \rho, x)$ и $\psi_\alpha(\theta, \rho, x)$ параметр R и описывающая продольный контур функция $f(x)$ входят по-разному. Будем первую из них считать нормированной на $2R^2 f'(x)f(x)$, а вторую — на $\alpha R f(x)$. Тогда полученные после нормировки функции не будут уже зависеть от x (а также от R и α) и аргументами для них останутся только θ и ρ . Возвращаясь к соответствующим потенциальным функциям $\Phi_0(\theta, \rho)$, $\varphi_\alpha(\theta, \rho)$, с помощью соотношений Коши — Римана получим

$$\Phi_0(\theta, \rho) = -\rho \int_0^\theta \frac{\partial \Psi_0(\theta, \rho)}{\partial \rho} d\theta, \quad \varphi_\alpha(\theta, \rho) = -\rho \int_0^\theta \frac{\partial \psi_\alpha(\theta, \rho)}{\partial \rho} d\theta \quad (3.1)$$

Для подстановки $\Psi_0(\theta, \rho)$ и $\varphi_\alpha(\theta, \rho)$ в эти формулы следует использовать интеграл Пуассона в окрестности окружности $\rho = 1$. При дифференцировании под интегралом в соотношениях (3.1) удобно воспользоваться формулой Лагранжа, а сами интегралы понимать в смысле главного значения. Вводя инициированные потенциальными функциями Φ_0 и φ_α соответствующие компоненты коэффициента давления, получим

$$\begin{aligned} c_p &= c_{p0} + c_{p\alpha} \\ c_{p0}(\theta, x) &= 2R^2 [f^2(x)]' \Phi_0(\theta, 1) \\ c_{p\alpha}(\theta, x) &= 2\alpha R f(x) \varphi_\alpha(\theta, 1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

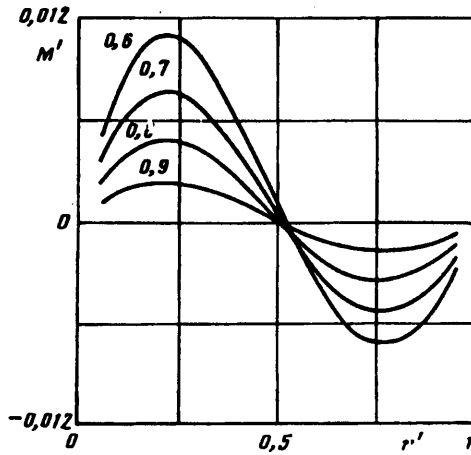
Если у $\Phi_0(\theta, 1)$ наименьший период $2\pi/n$, то у $\varphi_\alpha(\theta, 1)$ — только 2π , следовательно, то же самое можно сказать о $c_{p0}(x, \theta)$ и $c_{p\alpha}(x, \theta)$ как функциях θ .

После несложных выкладок получим момент для отрезка $A_1 B_1$ (в крутящий момент для всего тела он входит отрицательной величиной) и для отрезка $A_1 B_{n-1}$ (этот момент дает положительный вклад) (фиг. 1)

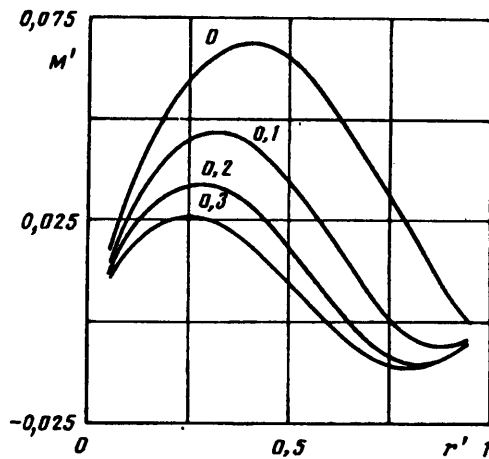
$$\begin{aligned} M_{A_1 B_1} &= R^2 f^2(x) |C| 2^{2/n} \left\{ |C| 2^{2/n} \int_0^{\pi/n-\epsilon} G_+(\theta) \left(\int_0^\theta G_+(\theta') d\theta' \right) c_p d\theta - \right. \\ &\quad \left. - \cos \gamma_1 \int_0^{\pi/n-\epsilon} G_+(\theta) c_p d\theta \right\} \\ M_{A_1 B_{n-1}} &= R^2 f^2(x) |C| 2^{2/n} \left\{ \cos \gamma_2 \int_0^{\pi/n+\epsilon} G_-(\theta) c_p d\theta - \right. \\ &\quad \left. - |C| 2^{2/n} \int_0^{\pi/n+\epsilon} G_-(\theta) \left(\int_0^\theta G_-(\theta') d\theta' \right) c_p d\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В формулах (3.2) для c_p два слагаемых, поскольку же решается линейная задача, можно выписать отдельно момент, инициированный потенциалом $\Phi_0(\theta, 1)$. Этот момент соответствует обтеканию при нулевом угле атаки. Здесь соответствующие формулы получаются проще из-за периодичности $\Phi_0(\theta, 1)$

$$M_0(x) = R^4 f^2(x) |C| 2^{(1+n/2)} [f^2(x)]' (M_{0+} + M_{0-})$$



Фиг. 3



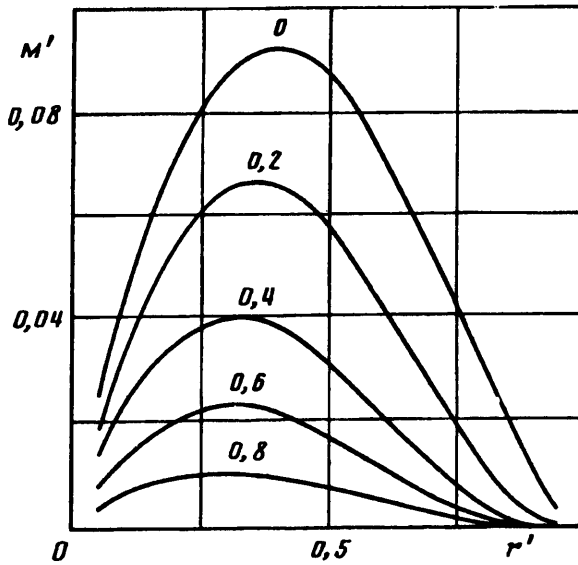
Фиг. 4

$$\begin{aligned}
 M_{0-} &= |C| 2^{2/n} \int_0^{\pi/n-\varepsilon} G_+(\theta) \left(\int_0^\theta G_+(\theta') d\theta' \right) \Phi_0(\theta, 1) d\theta - \\
 &- \cos \gamma_1 \int_0^{\pi/n-\varepsilon} G_+(\theta) \Phi_0(\theta, 1) d\theta \\
 M_{0+} &= \cos \gamma_2 \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) \Phi_0\left(\frac{2\pi}{n} - \theta, 1\right) d\theta - \\
 &- |C| 2^{2/n} \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) \left(\int_0^\theta G_-(\theta') d\theta' \right) \Phi_0\left(\frac{2\pi}{n} - \theta, 1\right) d\theta
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как все линейные размеры нормированы на длину тела [4], интегрируя по x , получим

$$M_0 = 2^{(1+n/2)} |C| nR^4 (M_{0+} + M_{0-}) K_0$$

$$K_0 = \int_0^1 f^2(x) [f^2(x)]' dx \quad (3.5)$$



Фиг. 5

В простейшем случае конической поверхности $f(x) = x$, $K_0 = 2/3$. В случае произвольного степенного контура $f(x) = x^\mu$ ($\mu < 0,5$, [3]), $K_0 = 2\mu(2\mu - 1)/(4\mu - 1)$.

На фиг. 3—5 представлены результаты расчетов крутящего момента при нулевом угле атаки. На оси абсцисс отложено $r' = r/R$ (r — внутренний радиус поперечного контура), на оси ординат — крутящий момент $M' = M_0/K_0R^4$ — формулы (3.5). Параметр β_1/β_2 (фиг. 1) характеризует асимметричность звездообразного тела и обозначает соответствующую кривую на фиг. 3—5. На фиг. 3, 4 представлены кривые для $n = 3$, причем на фиг. 3 для слабой, а на фиг. 4 для сильной асимметричности. Поведение кривых на этих фигурах совершенно разное. На фиг. 3 кривые имеют ярко выраженные максимумы и минимумы и все (кроме, может быть, кривой $\beta_1/\beta_2 = 0,6$) проходят через одну точку ($r/R \approx 0,5$, $M = 0$), которая одновременно является точкой перемены знака момента. Вся картина выглядит до известной степени центрально-симметричной относительно точки перемены знака, хотя «положительные горбы» все же больше «отрицательных горбов».

Сходная с фиг. 3 картина наблюдается и при $n = 4$ в случае слабой асимметричности — тоже все кривые проходят через точку перемены знака момента. При увеличении асимметричности (отношение β_1/β_2 — уменьшается) положительные горбы растут гораздо быстрее отрицательных. Максимумы сдвигаются вправо, минимумы постепенно сходят на нет, точка перемены знака момента теряет свою независимость от отношения β_1/β_2 , характерную для фиг. 3, и постепенно сдвигается вправо, графики для разных значений β_1/β_2 уже не пересекаются между собой (фиг. 4). При $n = 4$ этот процесс исчезновения отрицательных горбов и движения точки, в которой момент изменяет знак, вправо происходит гораздо быстрее, но качественно так же, как для $n = 3$.

При $n = 5$ (фиг. 5) кривые крутящего момента ведут себя иначе, чем при $n = 3$ и 4. Теперь крутящий момент — всегда положительный, вместо отрицательных горбов — пологий участок. Не существует точки перемены знака для крутящего момента. Видна известная пропорциональность крутящего момента с ростом асимметричности при всех значениях r/R . Аналогичная картина при $n > 5$.

Перейдем к формулам, описывающим крутящий момент звездообразного тела под углом атаки. Запишем аналогично формулам (1.2) и (3.2)

$$M(x) = M_0(x) + M_\alpha(x)$$

Формулы для $M_\alpha(x)$ несколько более сложны, чем формулы (3.4), из-за того, что минимальный период $\varphi_\alpha(\theta, 1)$ — только 2π

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha-} &= |C| 2^{2/n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_+(\theta) \left(\int_0^\theta G_+(\theta') d\theta' \right) \varphi_\alpha \left(\theta + \frac{2\pi k}{n}, 1 \right) d\theta - \\
 &- \cos \gamma_1 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_+(\theta) \varphi_\alpha \left(\theta + \frac{2\pi k}{n}, 1 \right) d\theta \\
 M_{\alpha+} &= \cos \gamma_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) \varphi_\alpha \left(\frac{2\pi(1+k)}{n} - \theta, 1 \right) d\theta - \\
 &- |C| 2^{2/n} \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/n+\varepsilon} G_-(\theta) \left(\int_0^\theta G_-(\theta') d\theta' \right) \varphi_\alpha \left(\frac{2\pi(1+k)}{n} - \theta, 1 \right) d\theta \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$M_\alpha(x) = \alpha R^3 f^2(x) 2^{(1+2/n)} |C| (M_{\alpha-} + M_{\alpha+})$$

$$M_\alpha = \alpha R^3 2^{(1+2/n)} |C| (M_{\alpha-} + M_{\alpha+}) K_\alpha$$

$$K_\alpha = \int_0^1 f^2(x) f'(x) dx = \frac{1}{3} \quad (3.7)$$

Таким образом, K_α не зависит от конкретного вида продольного контура (в отличие от коэффициента K_0). Здесь важно лишь, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Учет угла атаки α вводит дополнительно параметр β_0 — отклонение луча поперечного звездообразного контура от вертикали. Следовательно, если M_{0-} и M_{0+} зависели от трех параметров: r/R , β_1/β_2 , n , то теперь $M_{\alpha-}$ и $M_{\alpha+}$ зависят еще и от α и β_0 . Однако численные расчеты привели к очень простым выводам

$$M_{\alpha-} \left(\frac{r}{R}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, n, \beta_0 \right) \equiv M_{\alpha+} \left(\frac{r}{R}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, n, \beta_0 \right) \quad (3.8)$$

Следовательно, суммы моментов, приложенные отдельно к «коротким» и отдельно к «длинным» сторонам поперечного звездообразного контура, всегда тождественно равны между собой. Происходит компенсация слагаемых для дополнительного (по сравнению с M_0) крутящего момента M_α

$$M_\alpha \left(\frac{r}{R}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, n, \beta_0, R, \alpha \right) \equiv 0 \quad (3.9)$$

Сами по себе обе суммы при подсчете крутящего момента, т. е. $M_{\alpha-}$ и $M_{\alpha+}$, не являются нулями, однако в одном случае они обращаются в нуль и порознь. Это случай $\beta_0 = 0$, т. е. когда луч звездообразного поперечного контура совпадает с вертикалью. Таким образом, сумма моментов приложенных только к коротким сторонам поперечного звездообразного контура и только к длинным равны нулю и порознь

$$M_{\alpha-}(\beta_0) |_{\beta_0=0} \equiv 0, \quad M_{\alpha+}(\beta_0) |_{\beta_0=0} \equiv 0 \quad (3.10)$$

причем это выполняется для всех значений β_1/β_2 , r/R , n . Это, впрочем, не означает равенства нулю на каждом отрезке в отдельности, это именно компенсация на всех «коротких» отдельно и на всех «длинных» отрезках отдельно. Если же $\beta_0 \neq 0$, то компенсация тоже происходит, но уже на всем поперечном контуре в целом — формулы (3.8) — (3.9). Все эти выводы не зависят от входящих параметров r/R , β_1/β_2 , n , R , α .

Таким образом, сохранение равнодействующей силы в плоскости угла атаки — фундаментальное свойство звездообразных тел. Это свойство не связано с наличием плоскостей симметрии. Выяснены условия перемены знака крутящего момента при $n = 3$ и 4 ; крутящий момент не меняет своего знака при $n \geq 5$ (обтекание при нулевом угле атаки). Крутящий момент звездообразного тела не зависит от угла атаки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонор А. Л., Черный Г. Г. О телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 7. С. 89—93.
2. Фоллз М. И. Сохранение вектора равнодействующей силы в плоскости угла атаки при сверхзвуковом обтекании тонких звездообразных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 135—141.
3. Фоллз М. И. Волновое сопротивление удлиненных звездообразных тел при умеренных сверхзвуковых скоростях полета // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 146—151.
4. Ward G. N. Supersonic flow past slender pointed bodies // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1949. V. 2. № 1. P. 75—97.
5. Васильченко В. И., Притуло М. Ф. Высшие приближения к точному решению задачи обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1666. С. 29—41.

Москва

Поступила в редакцию
22.1.1993