

УДК 533.6.011.5

© 1993 г. А. Н. КРАЙКО

## О СВОБОДНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСШИРЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В рамках модели сплошной среды изучаются асимптотические закономерности нестационарного течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) совершенного газа при его свободном расширении из плоского, цилиндрического или сферического объема. При истечении в вакуум найденные закономерности реализуются в области, принадлежащей некоторой окрестности плоскости, оси или центра симметрии для таких времен, когда плотность (или удельная энтальпия) газа в результате его расширения становятся много меньше своей начальной величины. Особенностью указанной области является ее «вытянутость» в направлении оси времени  $t$  плоскости  $xt$  ( $x$  — соответствующая пространственная координата). По  $x$  она также расширяется неограниченно, однако медленнее, чем по  $t$ . Для больших  $t$  те же закономерности справедливы для течения газа в окрестности плоскости, оси или центра симметрии двух симметрично расширяющихся плоских, цилиндрического или сферического поршней. Для стационарных гиперзвуковых течений аналогичные закономерности изучались в [1—6].

1. Пусть  $p$ ,  $\rho$ ,  $e$ ,  $h = e + p / \rho$  и  $s$  — давление, плотность, удельные внутренняя энергия, энтальпия и энтропия газа, из которых независимы лишь две термодинамические переменные (например,  $h$  и  $s$ ,  $p$  и  $s$ ,  $\rho$  и  $s$  и т. п.), а остальные — известные их функции. Если  $v = 0$ , 1 и 2 соответственно в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях,  $x$  — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии, а  $u$  —  $x$ -компонента скорости (при нулевых прочих компонентах), то одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами описываются уравнениями [7]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + v \frac{\rho u}{x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) этой системы (условие «сохранения энтропии в частице») имеет характеристическую форму, определяя  $c^+$ -характеристики — траектории частиц:  $dx / dt = u$ , а уравнения (1.1) и (1.2) эквивалентны уравнениям, справедливым вдоль  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик

$$c^+: \frac{dx}{dt} = u + a, \quad du + \frac{1}{\rho a} dp + v \frac{au}{x} dt = 0 \quad (1.4)$$

$$c^-: \frac{dx}{dt} = u - a, \quad du - \frac{1}{\rho a} dp - v \frac{au}{x} dt = 0 \quad (1.5)$$

где  $a$  — скорость звука:  $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ .

Исследуя безударные течения, возникающие при свободном расширении первоначально покоящегося газа, естественно рассмотреть случай  $s = \text{const}$ . Такие изэнтропические течения в силу (1.3) реализуются не только при постоянной начальной энтропии, но и при свободном расширении для больших  $t$  в любой

такой окрестности плоскости, оси или центра симметрии, куда приходят частицы, занимавшие при  $t = 0$  достаточно малую окрестность начала координат. В этом случае  $dh - (1/\rho)dp = Tds = 0$ , где  $T$  — абсолютная температура, и уравнение (1.2) и «условия совместности» из (1.4) и (1.5) заменятся на

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (h + u^2/2)}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

$$d(u \pm \varphi) \pm v \frac{au}{x} dt = 0, \quad \varphi = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho a} = \int_{h_0}^h \frac{dh}{a} = \frac{2}{\kappa - 1} (a - a_0) \quad (1.7)$$

Здесь верхние (нижние) знаки, как и в (1.4) и (1.5), отвечают  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристикам, индекс «ноль» приписан некоторым «начальным» параметрам, интегралы берутся при  $s \equiv s_0$ , а последнее выражение для  $\varphi$  справедливо для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты  $\kappa \neq 1$ . Для совершенного газа с любым  $\kappa$

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa, \quad \frac{a}{a_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\kappa-1)/2} \quad (1.8)$$

В окрестности  $x = 0$ , малой по сравнению с характерным масштабом течения,  $\rho u/x \approx \partial(\rho u)/\partial x$  и поэтому с высокой степенью точности уравнение (1.1) можно заменить на

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (1 + v) \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

При свободном расширении в вакуум конечного объема газа область, занятая расширяющимся газом, растет пропорционально  $t$ , так как его передний фронт движется с постоянной скоростью  $u^m$ , равной максимальной скорости нестационарного истечения в пустоту. Для совершенного газа  $u^m = 2a_0/(\kappa - 1)$ . Поэтому в рассматриваемых задачах переход от (1.1) к (1.9) справедлив при  $x \ll u^m t$ .

Замена (1.1) на (1.9), не меняя типа системы уравнений одномерного нестационарного течения идеального газа, которая остается гиперболической, модифицирует при  $v \neq 0$  уравнения  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик. Теперь вместо (1.4) и (1.5) будем иметь

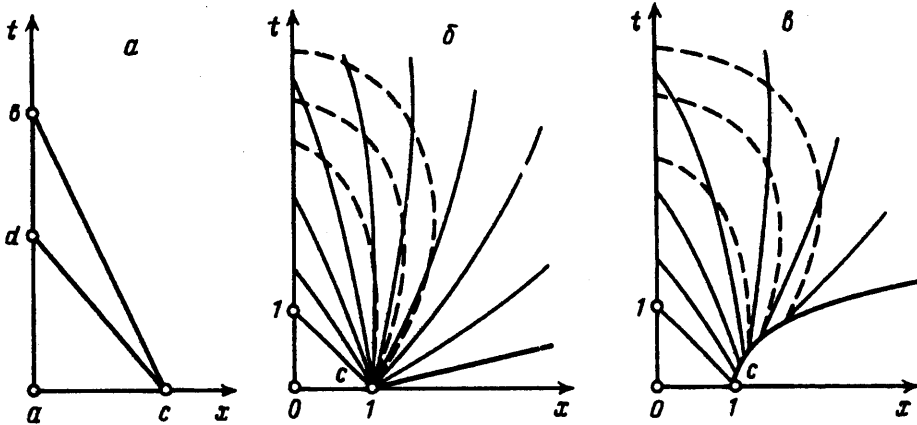
$$\frac{dx}{dt} = \lambda^\pm + (1 + v)u \approx \pm \sqrt{1 + v} a + \left(1 + \frac{v}{2}\right)u \approx \pm \sqrt{1 + v} a \quad (1.10)$$

$$du + \frac{1}{\rho \lambda^\pm} dp = 0, \quad \lambda^\pm = \pm \sqrt{(1 + v)a^2 + \frac{v^2}{4}u^2} - \frac{v}{2}u \approx \pm \sqrt{1 + v} a - \frac{v}{2}u \approx \pm \sqrt{1 + v} a$$

где верхние знаки и индекс отвечают  $c^+$ -характеристикам, а нижние —  $c^-$ -характеристикам; первые приближенные равенства верны при  $(u/a)^2 \ll 1$ , вторые — при  $u/a \ll 1$ .

Очевидное для  $v \neq 0$  отличие (1.10) от (1.4) и (1.5) и по направлению характеристик и по отвечающим им условиям совместности порождает сомнения в законности сделанного выше перехода от (1.1) к (1.9) при любых малых  $x$ , а следовательно, и  $u \ll a$ . Покажем, что эти сомнения необоснованны, ибо различие уравнений  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик отнюдь не обязательно ведет к столь же существенному отличию в распределениях параметров. Чтобы продемонстрировать это, вычислим  $\partial p/\partial t$  при  $x = 0$ , воспользовавшись либо уравнениями (1.5), либо отвечающими  $c^-$ -характеристике соотношениями из (1.10).

Так как  $u \equiv 0$  при  $x = 0$ , то, согласно (1.2),  $\partial p/\partial x = 0$  при  $x = 0$ . Поэтому для близкой к оси  $t$  точки с  $p_c = p_a + O(x_c^2)$ , где индексы  $a, c, \dots$  приписываются параметрам в точках, обозначенных на фиг. 1, а теми же буквами. На той же фигуре  $cb$  и  $cd$  — отрезки  $c^-$ -характеристик, получающихся



Фиг. 1

соответственно по (1.5) и (1.10), в силу чего:  $t_{bc} = \sqrt{1 + v} t_{dc}$ , где  $\varphi_{mn} = \varphi_m - \varphi_n$ . С другой стороны, при  $u/a \ll 1$ , согласно (1.10)

$$p_{dc} = \sqrt{1 + v} \rho_c a_c u_{dc} = -\sqrt{1 + v} \rho_c a_c u_c$$

В согласии же с (1.5)  $p_{bc} = -(1 + v) \rho_c a_c u_c$ , т. е.  $p_{bc} = \sqrt{1 + v} p_{dc}$ . При получении из (1.5) выражения для  $p_{bc}$  в последнем слагаемом условия совместности, как это обычно делается в методе характеристик, отношение  $u/x$  заменялось на  $u_{bc}/x_{bc} \equiv u_c/x_c$ . Учтем, что  $t_{mc} = t_{ma}$ ,  $p_{mc} = p_{ma} + O(x_c^2)$ , а  $p_{mc} = O(u_c) = O(x_c)$ , где  $m$  — либо  $b$ , либо  $d$ . В результате найдем, что, несмотря на различие в  $\sqrt{1 + v}$  раз приращений ординат точек  $b$  и  $d$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p_{ba}}{t_{ba}} = \frac{p_{da}}{t_{da}} = -\rho_c a_c u_c$$

2. Пусть в конечном по  $x$  объеме  $|x^0| \leq L^0$  для  $v=0$  или  $x^0 \leq L^0$  для  $v \neq 0$  при  $t^0 < 0$ , где индекс «градус» приписывается размерным величинам, находился однородный по термодинамическим параметрам покоящийся газ. Тогда, взяв за масштабы длины, времени, скорости, плотности, давления, удельных внутренней энергии и энтальпии  $L^0$ ,  $L^0/a_0^0$ ,  $a_0^0$ ,  $\rho_0^0$ ,  $\rho_0^0 a_0^0{}^2$  и  $a_0^0{}^2$ , где  $a_0^0$  и  $\rho_0^0$  — размерные начальные скорость звука и плотность, и перейдя к безразмерным переменным, для которых оставим обозначения без индексов «градус», придем к уравнениям разд. 1 и к условиям

$$\rho_0 \equiv \rho(0, x) = 1, \quad a_0 \equiv a(0, x) = 1, \quad u_0 \equiv u(0, x) = 0, \quad |x| \leq 1$$

$$u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.1)$$

причем в плоском случае последнее условие предполагает симметрию течения, которая обеспечивается симметрией условий на левой и правой границах объема, занимаемого газом при  $t > 0$ .

Пусть в момент  $t=0$  стенки, ограничивающие газ при  $x = \pm 1$  для  $v=0$  или при  $x=1$  для  $v \neq 0$ , мгновенно исчезают и начинается его истечение в вакуум. Диаграмма возникающего при этом течения изображена на фиг. 1, б, где тонкими сплошными кривыми нарисованы  $c^-$ -характеристики, выходящие из точки  $c$  с  $t_c = 0$ ,  $x_c = 1$ . Если в (1.7) индекс «ноль» приписан тем же начальным параметрам, что и в (2.1), то из равенства (1.7), отвечающего  $c^+$ -характеристикам, в точке  $c$  получим

$$u + \varphi(p) = 0 \quad (2.2)$$

Если  $\varphi(0) = -\infty$ , что для совершенного газа в силу (1.7) и (1.8) могло бы быть при  $\kappa \leq 1$ , то, согласно (2.2), максимальная скорость, достигаемая при истечении в вакуум,  $u^m = \infty$ . Если же, как и предполагается всюду ниже,  $-\varphi(0) < \infty$ , чему в случае совершенного газа отвечают  $\kappa > 1$ , что также далее предполагается, то с учетом (2.1)

$$u^m = -\varphi(0) = 2a_0/(\kappa - 1) = 2/(\kappa - 1)$$

Здесь и далее формулы, содержащие  $\kappa$ , относятся к совершенному газу. На фиг. 1, б жирная прямая — траектория «переднего фронта» частиц:  $x = 1 + u^m t$ .

В соответствии со способом обезразмеривания в точку  $t = 1$  оси ординат приходит прямолинейная  $c^-$ -характеристика — граница покоящегося газа. В любую другую точку  $a$  той же оси с  $t_a > 1$  и  $0 \leq p_a \leq p_0$  приходит некоторая  $c^-$ -характеристика пучка, определяемая величиной скорости газа  $u_{c+}$  в точке выхода характеристики из пучка. В силу (2.2), (1.7) и того, что  $u_a = 0$ , имеем

$$u_{c+} + \frac{v}{2} \int_0^{t_a} \frac{au}{x} dt = -\frac{1}{2} \varphi(p_a)$$

где интеграл берется вдоль  $c^-$ -характеристики  $c_+a$ . Так как  $u_{c+}$  и подынтегральное выражение неотрицательны, то  $u_{c+} < -\varphi_a/2 \leq -\varphi(0)/2 = u^m/2$ . Отсюда следует, что существует  $c^-$ -характеристика пучка, которой отвечают  $p_a = 0$  и  $u_{c+} = u_{c\infty} \leq u^m/2$ , приходящая на ось  $t$  лишь на бесконечности ( $u_{c\infty} = u^m/2$  только при  $v = 0$ );  $c^-$ -характеристики, отвечающие  $u_{c+} > u_{c\infty}$ , ось  $t$  не пересекают. Поэтому течение в неограниченной по  $t$  и, вообще говоря, также неограниченно расширяющейся по  $x$  (как некоторая  $c^-$ -характеристика с  $u_{c+} > u_{c\infty}$ ) области, примыкающей к оси  $t$ , перестает зависеть от условий на ее правой границе. В частности, истечение в вакуум можно заменить выдвижением непрерывно ускоряющегося поршня, скорость которого растет, начиная с  $u_{c+} \geq u_{c\infty}$ . Применительно к стационарным гиперзвуковым течениям на указанное свойство, по-видимому, впервые обращено внимание в [1], где оно названо «параболическим вырождением». В силу вырождения течение в неограниченной вытянутой вдоль  $t$  области  $\Sigma$ , в которой  $p \leq p_{c+}$  и  $h \leq h_{c+}$ , полностью определяется условием «непротекания»  $u(t, 0) = 0$  на оси  $t$  и распределением  $u$  на некоторой кривой  $h = h_{c+}$ , а также формой этой кривой. Три такие кривые  $\Gamma$ , отвечающие трем уменьшающимся значениям  $h_{c+}$ , нарисованы на фиг. 1, б штрихами. Каждая кривая  $\Gamma$  соединяет точку  $c$  с некоторой точкой оси  $t$ . Чем меньше  $h_{c+}$ , характеризующее кривую  $\Gamma$ , тем в более «широкой» области  $\Sigma$  имеет место указанное вырождение. Аналогичная ситуация будет реализовываться, если истечение в вакуум с самого начала заменить непрерывно ускоряющимся поршнем (фиг. 1, в, траектория поршня — жирная кривая, остальные обозначения те же, что на фиг. 1, б). Для достаточно малых  $h_{c+}$  параболическое вырождение с  $s = \text{const}$  имеет место и при  $s_0 \neq \text{const}$ . Действительно, в таких случаях на ось  $t$  попадают лишь  $c^-$ -характеристики, выходящие с примыкающего к ней также небольшого участка  $\Gamma$ , течение на котором с уменьшением  $h_{c+}$  становится все ближе к изэнтропическому.

Для дальнейшего, исследуя течение в  $\Sigma$ , удобно поменять местами независимые и зависимые переменные. Если  $t$  и  $x$  — функции  $h$  и  $u$ , то

$$x(h, 0) = 0, \quad 0 \leq h \leq \Delta < h_0 \tag{2.3}$$

$$t(\Delta, u) = T(u), \quad x(\Delta, u) = X(u), \quad 0 \leq u \leq U$$

где константы  $\Delta$  и  $U$  и функции  $T(u)$  и  $X(u)$  считаются известными из расчета «начального» участка течения.

Для перехода от  $t$  и  $x$  к  $h$  и  $u$  воспользуемся записью уравнений в форме якобианов [8]

$$\frac{\partial(A, x)}{\partial(t, x)} - \frac{\partial(B, t)}{\partial(t, x)} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

или после умножения на  $\partial(t, x) / \partial(h, u)$

$$\frac{\partial(A, x)}{\partial(h, u)} - \frac{\partial(B, t)}{\partial(h, u)} = 0$$

Подставив сюда  $A$  и  $B$  соответственно из (1.6) и (1.9) и учтя, что при исследуемом изэнтропическом в области  $\Sigma$  течении  $\rho_h = \rho_p \rho_h = \rho a^{-2}$ , придем к системе

$$x_h - ut_h + t_u \equiv (x - ut)_h + t_u = 0 \quad (2.4)$$

$$(1 + \nu) a^2 t_h + x_u - (1 + \nu) ut_u = 0 \quad (2.5)$$

в которой индексы  $h$  и  $u$  означают частное дифференцирование по этим переменным.

Уравнение (2.5) допускает введение потенциала Лежандра  $\Phi = \Phi(h, u)$ , такого, что

$$t = -\Phi_h, \quad x = ut + \Phi_u = \Phi_u - u\Phi_h \quad (2.6)$$

Подстановка  $t$  и  $x$  из (2.6) в (2.5) приводит к линейному уравнению для  $\Phi$

$$(1 + \nu) a^2 \Phi_{hh} + \Phi_h - \Phi_{uu} - \nu u \Phi_{hu} = 0 \quad (2.7)$$

В плоском случае ( $\nu = 0$ ) уравнение (2.7) точное, а при  $\nu \neq 0$  — приближенное, для рассматриваемого далее случая совершенного газа  $a^2 = (\kappa - 1)h$ .

Для потенциала  $\Phi$  условия (2.3) принимают вид

$$\Phi_u(h, 0) = 0, \quad 0 \leq h \leq \Delta \quad (2.8)$$

$$\Phi_h(\Delta, u) = f_1(u), \quad \Phi_u(\Delta, u) = f_2(u), \quad 0 \leq u \leq U$$

где  $f_k(u)$  — известные комбинации  $T(u)$  и  $X(u)$  из (2.3).

3. В плоском случае уравнение (2.7) при условиях (2.8) допускает разделение переменных. Для этого продолжим  $f_1(u)$  четно, а  $f_2(u)$  — нечетно на  $-U \leq u \leq 0$ , а затем с периодом  $2U$  распространим  $f_k(u)$  на всю ось  $u$ . В силу параболического вырождения и линейности уравнения (2.7) такое доопределение области решения до полосы  $0 \leq h \leq \Delta$ ,  $-\infty \leq u \leq \infty$ , обеспечивая выполнение условий (2.8), не изменяет решения исходной задачи. Представив  $\Phi(h, u)$  в виде

$$\Phi(h, u) = \sum_m \Phi_{1m}(h) \Phi_{2m}(u) \quad (3.1)$$

после подстановки (3.1) в (2.7) с  $\nu = 0$  найдем

$$\Phi_{2m}(u) = \cos(\pi m u / U), \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Функции (3.2) образуют полную систему четных функций, удовлетворяющих условию из (2.8) при  $u = 0$ , а их совокупность — при  $h = \Delta$ . Для  $\Phi_{1m}(h)$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\kappa - 1) h \Phi_{1m}'' + \Phi_{1m}' + \mu^2 \Phi_{1m} = 0, \quad \mu = \pi m / U$$

Точка  $h = 0$  является для него правильной особой точкой [9]. Решение в ее окрестности представляется либо в виде суммы двух обобщенных

степенных рядов, либо содержит  $\ln h$ . Просуммировав входящие в (3.1) функции, получим

$$\Phi(h, u) = \chi_1(h, u) + h^{1-\lambda} \chi_2(h, u), \quad 1/(\lambda - 1) \equiv \lambda \neq 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

$$\Phi(h, u) = (1 + A \ln h) \chi_1(h, u) + h \chi_2(h, u), \quad \lambda = 1$$

$$\Phi(h, u) = (1 + A \ln h) \chi_1(h, u) + h^{1-\lambda} \chi_2(h, u), \quad \lambda = 2, 3, \dots$$

Здесь и далее  $A$  — константа, а  $\chi_k(h, u)$  — функции, аналитические в окрестности точки  $h = u = 0$ . В силу (2.8)  $\chi_{1u}(h, 0) = \chi_{2u}(h, 0) = 0$ . Разложения  $\chi_{1u}$  и  $\chi_{2u}$  по  $u$  начинаются с  $u$ .

Для  $\nu \neq 0$  уравнение (2.7) не допускает разделения переменных. Однако выше разделение переменных при получении решения в форме (3.3) использовалось лишь в качестве промежуточного этапа. Поэтому для любых  $\nu$  решение можно сразу искать в виде (3.3). Продолав необходимые выкладки и учтя граничные условия (2.8), вновь придем к (3.3) с

$$\lambda = 1/[(\lambda - 1)(1 + \nu)] \quad (3.4)$$

и с функциями  $\chi_1(h, u)$  и  $\chi_2(h, u)$  и теми же свойствами, что и выше.

Согласно (2.6),  $x = ut + \Phi_u$ . Продифференцируем это равенство вдоль траектории частиц, где  $dx = u dt$ , и подставим для  $\Phi(h, u)$  выражения из (3.3). В результате найдем, что для всех  $\lambda$  вдоль траектории

$$du = \chi(h, u) dh = [\chi(0, u) + O(h, h^\lambda, h \ln h)] dh$$

с ограниченной при конечных  $u$  и малых  $h$  функцией  $\chi(h, u)$ , такой, что  $\chi(h, 0) = 0$ . Если  $u_\infty$  — значение  $u$  в бесконечно удаленной (в плоскости  $xt$ ) точке траектории, то отсюда при  $h \leq \Delta < h_0$

$$u = u_\infty + \alpha(u_\infty) h + o(h), \quad \alpha(0) = 0 \quad (3.5)$$

Это, тем не менее, не означает, что в плоскости  $xt$  отрезки траекторий, отвечающие  $h \leq \Delta$ , при любых  $\lambda$  мало отличаются от полупрямых, уходящих в бесконечность. Действительно, из (2.6), (3.3) и (3.5) имеем

$$x = ut + \chi_3(h, u) + h^{1-\lambda} \chi_4(h, u) + \dots = \chi_3(0, u_\infty) + u_\infty t + \alpha(u_\infty) ht + h^{1-\lambda} \chi_4(0, u_\infty) + \dots, \quad \lambda \neq 1 \quad (3.6)$$

$$x = ut + \chi_3(h, u) + \chi_4(h, u) \ln h + \dots = \chi_3(0, u_\infty) + u_\infty t + \alpha(u_\infty) ht + \chi_4(0, u_\infty) \ln h + \dots, \quad \lambda = 1$$

где вторые формулы дают уравнения траекторий, многозначия означают слагаемые, малые по сравнению с выписанными, а  $\chi_3(h, 0) = \chi_4(h, 0) = 0$ . Аналогично по формуле  $t = -\Phi_h$  из (2.6) и (3.3) получим

$$h^\lambda t = (\lambda - 1) \chi_2(h, u) + h \chi_5(h, u) + h^\lambda \chi_6(h, u), \quad \lambda \neq 1 \quad (3.7)$$

$$ht = -A \chi_1(h, u) + \chi_5(h, u) h \ln h + h \chi_6(h, u), \quad \lambda = 1$$

Выразив отсюда  $h^\lambda$  как функцию  $t$  и  $u$  из (3.5), т. е. для траекторий, и подставив результат в их уравнения из (3.6), придем к уравнениям траекторий в форме

$$x = \chi(u_\infty) + u_\infty t + \varphi(u_\infty) t^{(\lambda-1)/\lambda} + \dots, \quad \lambda \neq 1 \quad (3.8)$$

$$x = \chi(u_\infty) + u_\infty t + \varphi(u_\infty) \ln t + \dots, \quad \lambda = 1$$

Здесь  $\chi(u_\infty)$  и  $\varphi(u_\infty)$  — ограниченные при конечных  $u_\infty$  функции  $u_\infty$ , такие, что  $\chi(0) = \varphi(0) = 0$ ; многозначием, как и ранее, обозначены члены, при больших

$t$  малые по сравнению с выписанными. В (3.8) третьи слагаемые при  $t \gg 1$  всегда много меньше, чем  $u_{\infty} t$ . Однако, если при  $\lambda < 1$  ими можно пренебречь (следовательно, траектории при больших  $t$  близки к прямым, пересекающим ось  $x$  в точках  $x = \chi(u_{\infty})$ ), то при  $\lambda \geq 1$  это не так. Именно при  $\lambda \geq 1$ , чему в силу (3.4) отвечают

$$1 < \kappa \leq \kappa_c = 1 + (1 + \nu)^{-1} \quad (3.9)$$

$$\kappa_c = 2, \quad \nu = 0; \quad \kappa_c = 3/2, \quad \nu = 1; \quad \kappa_c = 4/3, \quad \nu = 2$$

отличие траекторий от полупрямых становится при  $t \rightarrow \infty$  сколь угодно большим. Исключение — траектория, совпадающая с осью  $t$ , на которой  $x \equiv 0$ . Согласно (3.9), в плоском случае данный эффект имеет место для всех  $\kappa$ , которые может иметь совершенный газ ( $1 < \kappa \leq 5/3$ ).

Так как  $h \sim \rho^{x-1}$ , и поэтому в силу (3.4)  $h^{\lambda} \sim \rho^{1/(1+\nu)}$ , то формулы (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho^{1/(1+\nu)} [t - \tau(u)] &= m(u) + n(u) \rho^{x-1} + \dots, \quad \lambda \neq 1 \\ \rho^{1/(1+\nu)} [t - \tau(u)] &= m(u) + n(u) \rho^{x-1} \ln \rho + \dots, \quad \lambda = 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где функции  $\tau(u)$ ,  $m(u)$  и  $n(u)$  определяются течением на начальном участке, т. е. формой кривой  $h = \Delta$  и распределением  $u$  вдоль нее.

Если в правой части (3.10) оставить только первое слагаемое, то вне зависимости от величины  $\lambda$

$$\rho = \frac{m^{\circ}(u)}{[t - \tau(u)]^{1+\nu}} \approx \frac{m^{\circ}(u)}{t^{1+\nu}}, \quad m^{\circ} = m^{1+\nu} \quad (3.11)$$

причем второе равенство справедливо при  $t \gg \tau(u)$ .

Формула (3.11) имеет простой физический смысл, описывая для больших  $t$  изменение  $\rho$  в газе, лишенном давления. В таком газе частицы двигались бы по инерции с постоянной скоростью, в общем случае разной для разных частиц. При этом падение плотности обусловлено двумя эффектами. Во-первых, «расходимость траекторий», связанной с различием скоростей различных частиц при их разгоне (когда давление еще было существенно). При свободном расширении газа для любых  $\nu$  при  $t = \text{const}$ , большим  $x$  отвечают большие  $u$ , т. е.  $\partial u / \partial x > 0$ . Поэтому при разлете частиц по инерции от некоторого «начального сечения»  $t = t_i$  ширина  $\Delta x$  слоя фиксированных частиц «растет по закону

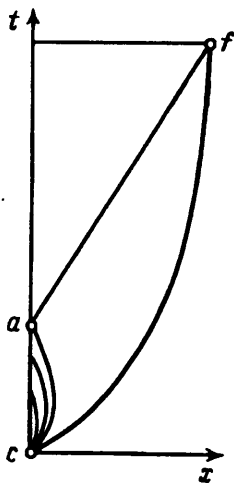
$$\Delta x = \Delta x_i + (\partial u / \partial x)_i \Delta x_i (t - t_i) = \Delta x_i [1 + \beta (t - t_i)]$$

Во-вторых, также линейно по  $t$  растет координата  $x$  центральной точки указанного слоя:  $x = x_i + u_i (t - t_i)$ .

В результате условие сохранения массы слоя  $\rho x^{\nu} \Delta x = \rho_i x_i^{\nu} \Delta x_i$  дает

$$\rho (t - t_i)^{1+\nu} \approx \frac{\rho_i x_i^{\nu}}{\beta u_i^{\nu}} \left[ 1 - \frac{u_i + \nu \beta x_i}{\beta u_i (t - t_i)} \right] \approx \frac{\rho_i x_i^{\nu}}{\beta u_i^{\nu}} \quad (3.12)$$

Сравнение (3.11) и (3.12), обнаруживая для больших  $t$  тождественность обеих формул, раскрывает смысл  $m^{\circ}(u)$  и  $\zeta(u)$  в (3.10) и (3.11). С другой стороны, пренебрежение слагаемыми с  $n(u)$  в (3.10) при учете слагаемых с  $\zeta(u)$  законно лишь при  $\lambda < 1$ , когда  $\kappa > \kappa_c$  с  $\kappa_c$  из (3.9). Если же это не так (т. е.  $1 < \kappa \leq \kappa_c$ ), то учет члена с  $\zeta(u)$  при пренебрежении слагаемым с  $n(u)$  не имеет смысла. При этом второе равенство (3.11), полученное из (3.10) отбрасыванием слагаемых и с  $\zeta(u)$  и с  $n(u)$ , описывает уменьшение  $\rho$  вплоть до  $\rho = 0$  не менее точно, чем первое. Для достаточно малых  $\rho$  и  $\kappa > \kappa_c$  второе равенство из (3.11), разумеется, также применимо. Однако для этих  $\kappa$  поправка на  $\zeta(u)$  увеличивает точность формулы для  $\rho$ . Последнее естественно, ибо, согласно установленному выше, для  $\kappa > \kappa_c$  траектории частиц при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к полупрямым, как



Фиг. 2

для среды без давления. Несмотря на высказанные соображения для реальных  $\chi$ , особенно близких к  $\chi_*$ , порядки слагаемых с  $\zeta(u)$  и  $n(u)$  в (3.10), как и при стационарном гиперзвуковом истечении [6], близки. Поэтому следует либо использовать простейшую формулу из (3.11), либо учитывать все сохраненные в (3.10) члены.

В качестве иллюстрации применения полученных результатов найдем временные интервалы, необходимые для разгона и безударного торможения первоначально покоящегося однородного газа ( $a_0 = p_0 = 1$ ,  $u_0 = 0$ ), который с помощью расширяющегося поршня переводится в аналогичное состояние с  $\rho \equiv \rho_f \ll 1$  и  $u \equiv u_f = 0$ . Можно показать, что время  $t_f$  указанного процесса минимально, если поршень начинает расширяться из точки  $c$  с координатами  $x_c = 1$ ,  $t_c = 0$  с некоторой конечной скоростью  $u_{c+}$ , которая должна подбираться так, чтобы в точке  $a$  пересечения оси с замыкающей  $c^-$ -характеристикой  $c_+a$  пучка волн разрежения плотность достигла заданной величины  $\rho_a = \rho_f$ . При наличии ограничений на ускорение поршня  $u_{c+} = 0$  и к точке  $c$  примыкает участок максимального допустимого ускорения  $cc_+$ . Траектория поршня  $c_+f$  после расчета течения до  $c_+a$  определяется из решения задачи Гурса с известными: криволинейной  $c^-$ -характеристикой  $c_+a$  и прямолинейной  $c^+$ -характеристикой  $af$ , на которой  $a \equiv a_f$  и  $u \equiv 0$ .

В плоскости  $xt$  схема течения для  $t_f \gg 1$  изображена на фиг. 2, причем в масштабе фигуры точка  $c$  совпадает с началом координат (в увеличенных размерах его окрестность аналогична показанной на фиг. 1, б или в), а жирная кривая — траектория поршня.

Общее время процесса расширения газа  $t_f = t_{fa} + t_a$ , где  $t_{fa} = t_f - t_a$  — «время торможения» и  $t_a$  — «время разгона». В силу условия сохранения общей массы газа и того, что  $\rho \equiv \rho_f$  при  $t = t_f$  и  $0 \leq x \leq x_f$ ,  $\rho_f x_f^{1+\nu} = 1$ . Отсюда, из второго равенства (3.11), уравнения прямолинейной  $c^+$ -характеристики  $af$  и связи (1.8) между  $a$  и  $\rho$  с  $a_0 = p_0 = 1$  найдем, что

$$x_f = \rho_f^{-1/(1+\nu)}, \quad t_a = k \rho_f^{-1/(1+\nu)}, \quad t_{fa} = x_f a_f^{-1} = k^{-1} t_a \rho_f^{(1-\nu)/2}$$

где  $k = m(0)$  — константа, определяемая из расчета начального течения разрежения либо с  $u_{c+} > 0$ , либо с конечным ускорением и  $u_c = 0$ . Согласно выписанным формулам

$$\varepsilon \equiv t_a / t_{fa} = k^2 \rho_f^{(\nu-1)/2} \quad (3.13)$$

и, следовательно,  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\rho_f \rightarrow 0$ . Как быстро происходит стремление  $\varepsilon$  к нулю, зависит от  $\chi$ , а также от величины  $k^2$ . Последняя есть функция  $\chi$ ,  $\nu$  и того, движется ли поршень сразу с конечной скоростью или разгоняется с конечным ускорением (и с каким). Определение  $k^2$  требует проведения специальных расчетов. Однако оценки этой величины для  $\nu = 0$  и 1 можно дать, опираясь на нестационарную аналогию и стационарные расчеты [6]. Согласно им, для  $\nu = 0$  при разгоне поршня с бесконечным ускорением ( $u_{c+} > 0$ )  $k^2$  не превышает 0,01, 0,1 и 1 соответственно для  $\chi = 5/4, 5/3$  и 2. Замена внезапного разгона непрерывным при ускорении поршня  $\dot{u} \leq 5$  увеличивает приведенные значения  $k^2$  примерно вдвое. Если  $\nu = 1$  и  $u_{c+} > 0$ , то на основе результатов [6]  $k^2$  не превышает соответственно 0,05, 0,3, 2 и 3 для  $\chi = 5/4, 5/3, 2$  и 3, возрастая примерно вдвое при переходе к разгону с  $\dot{u} \leq 5$ . Рост  $k^2$ , имеющий место с увеличением  $\chi$ , более чем компенсируется ростом показателя степени  $(\chi - 1) / 2$ . Поэтому в силу (3.13) для малых  $\rho_f$  величина  $\varepsilon < 1$  при любых  $\chi > 1$ . Если же  $1 - \rho_f \rightarrow +0$ , то в рамках схемы фиг. 2  $t_{fa} \rightarrow t_a$ , т. е.  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Естественно предположить, что с уменьшением  $\rho_f$  от 1 до 0  $\varepsilon$  изменяется в тех же пределах.

Сдвиг начала отсчета  $t$  на  $t_f$  и замена  $t$  на  $-t$  приводит к схеме течения, отвечающего безударному сжатию газа, причем, как и при разрежении, время всего процесса не более чем вдвое превышает время распространения по объему звуковой волны в газе с меньшей плотностью (при сжатии это его начальное состояние). Сказанное демонстрирует необоснованность рассмотрения процессов изэнтропического расширения и сжатия газа из одного состояния покоя в другое в качестве идеального предела, возможного лишь при бесконечно медленном («квазистатическом») движении поршня. Более того, для траектории поршня, определенной из решения сформулированной выше задачи Гурса, указанный процесс оказывается чрезвычайно быстрым.

Автор признателен В. А. Вострецовой за помощь в работе.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженский М. Д.* О некоторых свойствах гиперзвуковых течений. Тр. ЦАГИ. 1960. Вып. 778. 24 с.
2. *Ладыженский М. Д.* О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью//Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 289—299.
3. *Ладыженский М. Д.* Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 2. С. 296—299.
4. *Ладыженский М. Д.* О гиперзвуковых течениях в соплах//ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 99—105.
5. *Ладыженский М. Д.* Пространственные гиперзвуковые течения газа. М.: Машиностроение, 1968. С. 82—120.
6. *Крайко А. Н., Шеломовский В. В.* О свободном расширении двумерных струй идеального газа//ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 271—280.
7. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1962. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.XII.1992