

УДК 532.595+612.13

© 1993 г. И. Н. МОЙСЕЕВА, С. А. РЕГИРЕП

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ПУЛЬСОВЫХ ВОЛН В АРТЕРИЯХ

Распространение волн давления и скорости в заполненных жидкостью упругих трубках многократно подвергалось тщательному анализу [1, 2] как модель пульсовых волн в артериях. Практические потребности часто заставляют обращаться к этим теориям для выяснения различных частных деталей. Ниже рассматривается одна из задач такого рода, порожденная предложением использовать в качестве медицинского диагностического показателя амплитудные характеристики пульсовой волны [3, 4], а не характеристики ее распространения, как обычно.

1. Постановка основной задачи. В экспериментах было давно замечено, что при усиленной работе органа (например, мышц нижней конечности человека) сопротивление его микрососудистого русла падает за счет включения регуляторных механизмов, а вслед за этим перестраивается течение в главных артериях, подводящих к органу кровь: увеличивается расход крови и изменяется форма пульсовой волны [5—7]. Обычно растет диастолическое (т. е. минимальное за время сердечного цикла) значение скорости u_d . Для мышц конечности в покое оно отрицательно, а при работе — положительно (фиг. 1, кривые 1, 2, $u_0 = u(x=0)$).

Недавно было предложено [3, 4] использовать диастолическую скорость u_d как один из диагностических показателей, поскольку эта величина оказалась чувствительна к изменениям работы сердца и состояния сосудов выше и ниже места измерения скорости. Есть основания думать, что зависимость u_d от интенсивности работы мышц конечности содержит в себе дополнительную полезную информацию.

В связи с этим предложением возникает необходимость, во-первых, понять механизм изменения диастолической скорости и, во-вторых, расшифровать ее зависимость от условий течения крови, состояния сосудов и т. д.

Качественный ответ на первый вопрос очень прост: средний за пульсовой цикл расход крови через артерию при изменении выходного сопротивления меняется в широких пределах обратно пропорционально последнему, а амплитуда колебаний расхода, определяемая импедансом артерии и условием отражения волны от выходного сопротивления, может измениться не более чем в 2 раза [2]. Следовательно, теоретически всегда можно уменьшить это сопротивление настолько, что разность среднего значения и амплитуды расхода станет положительной.

Чтобы ответить на второй вопрос, приходится обратиться к математической модели движения крови по артерии.

Рассмотрим артериальный сосуд кругового сечения с тонкой упругой стенкой (фиг. 2), имеющий в равновесии постоянную площадь сечения F_0 при давлении p_0 . Сосуд соединен с входным и выходным сопротивлениями, полагаемыми для простоты чисто резистивными; длина сосуда L и значения сопротивлений Z_+ , Z_- принимаются постоянными. Давление $p_+(t) > 0$ на входе в систему — заданная функция с периодом T ; давление p_- на выходе полагается постоянным и равным p_0 . Через стенку сосуда возможен отток жидкости, но он невелик в сравнении с расходом во входном сечении. По артерии движется кровь (несжимаемая жидкость), причем числа Рейнольдса заведомо велики [2].

Для описания таких течений используются, как известно [8], уравнения в квазиодномерном приближении

$$\frac{\partial uF}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = -q_w \quad (1.1)$$

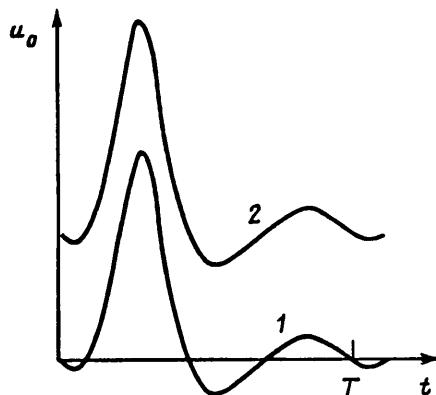
$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\tau_w}{\sqrt{F/\pi}} \quad (1.2)$$

$$F - F_0 = F_0 G \{p - p_0\} \quad (1.3)$$

с граничными условиями

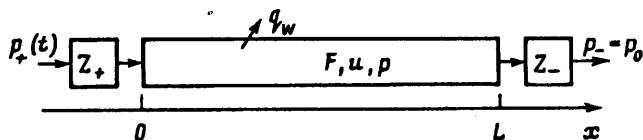
$$x = 0: p_+ - p = uFZ_+, \quad x = L:$$

$$p - p_0 = uFZ_- \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Здесь u — продольная скорость в артерии (средняя по сечению), p — давление, F — площадь сечения артерии, β — поправочный коэффициент, учитывающий форму истинного профиля скорости, q_w — интенсивность оттока в боковые ответвления, τ_w — вязкое трение на стенке, G — оператор, описывающий податливость артериальной стенки.



Фиг. 2

Для замыкания системы (1.1), (1.3) привлекаются дополнительные гипотезы о функциях

$$q_w = q_w(p, F), \quad \tau_w = \tau_w \left(F, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots \right) \quad (1.5)$$

$$Lq_w \ll uF|_{x=0}, \quad 2|\tau_w| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \frac{\sqrt{F/\pi}}{2} \quad (1.6)$$

Положим, как обычно, что податливость стенки невелика и поэтому отклонения ее от равновесной цилиндрической формы малы для всего диапазона амплитуд колебаний давления (и скорости). Если в (1.3) пренебречь всеми эффектами, кроме упругого сопротивления окружному растяжению, то

$$F - F_0 = F_0 k (p - p_0), \quad \varepsilon \equiv kp_* \ll 1 \quad (1.7)$$

где p_* — характерный масштаб $p - p_0$.

При $q_w = 0$, $\tau_w = 0$ из линеаризованной около состояния покоя системы (1.1), (1.2), (1.7) можно найти скорость распространения малых возмущений в бесконечно длинной артерии как $c_0 = 1/\sqrt{k\rho}$ [1, 2, 8]. При сделанных предположениях c_0 не зависит от давления p_0 в состоянии покоя. Периодические по времени малые возмущения распространяются в виде волн с длиной $\lambda = Tc_0$.

Исключив F из (1.1), (1.2), (1.4) при помощи (1.7) и перейдя к безразмерным величинам, получим

$$t^* = \frac{t}{T}, \quad x^* = \frac{x}{\lambda}, \quad u^* = \frac{u}{u_*}, \quad Z_{\pm}^* = \frac{u_* F_0 Z_{\pm}}{p_*}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{p_*},$$

$$q_w^* = \frac{q_w}{q_*}, \quad \tau_w^* = \frac{\tau_w}{\tau_*}, \quad M = \frac{u_*}{c_0}, \quad \varepsilon_q = \frac{q_* T}{F_0}, \quad \varepsilon_\tau = \frac{\tau_* T}{\rho u_* \sqrt{F_0}}, \quad p_* = \rho u_* c_0 \quad (1.8)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + M u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + M (1 + \varepsilon p^*) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = - \varepsilon_q q_w^* \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + M u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \varepsilon_\tau 2 \tau_w^* \sqrt{\frac{\pi}{1 + \varepsilon p^*}} \quad (1.10)$$

$$x^* = 0: p_+^* - p^* = Z_+^* u^* (1 + \varepsilon p^*) \quad (1.11)$$

$$x^* = L: p_0 = Z_-^* u^* (1 + \varepsilon p^*)$$

Масштаб скорости u оставлен пока не определенным. Легко убедиться, что $M \equiv \varepsilon$, т. е. малая податливость стенки обеспечивает сильно «дозвуковой» режим течения. Пренебрегая, где это допустимо, слагаемыми $\sim \varepsilon$, находим

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = - \left(\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \right) q_w^* \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = - 2 \varepsilon_\tau \sqrt{\pi} \tau_w^* \quad (1.13)$$

$$x^* = 0: p_+^* - p_0 = Z_+^* u^*, \quad x^* = L: p^* = Z_-^* u^* \quad (1.14)$$

Правые части в (1.12), (1.13) должны быть сохранены, если соответственно $\varepsilon \ll \varepsilon_q / \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon \ll \varepsilon_\tau \leq 1$. Во всех последующих разделах статьи, где не оговорено противное, этими членами пренебрегается.

2. Решение основной задачи. При $\varepsilon_q / \varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon_\tau \rightarrow 0$ система (1.12)–(1.14) заведомо становится линейной, так что для анализа достаточно ограничиться случаем

$$p_+^* = p_m^* (1 + \delta \cos 2\pi t^*) \quad (2.1)$$

где p_m^* — среднее значение и δ — относительная амплитуда колебаний давления на входе. Верхний индекс, отмечающий безразмерные величины, далее опускается.

Решение строится стандартным способом и дает в итоге следующие окончательные формулы для отрезка $0 < x < L$:

$$u = \frac{p_m}{Z_+ + Z_-} + \frac{p_m \delta}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{2\pi i t}}{\Delta} [(1 + Z_-) e^{2\pi i(x-L)} + (1 - Z_-) e^{-2\pi i(x-L)}] \right\} \quad (2.2)$$

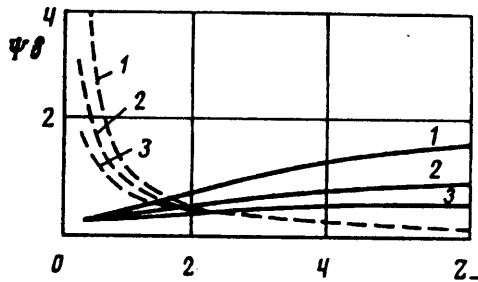
$$\Delta = (Z_+ + Z_-) \cos 2\pi L + i (1 + Z_+ Z_-) \sin 2\pi L$$

Отраженная волна существует всегда, исключая случай согласования импедансов $Z_- = 1$. Легко убедиться, что масштаб u , не влияет на результат перехода от (2.2) к соответствующему размерному представлению.

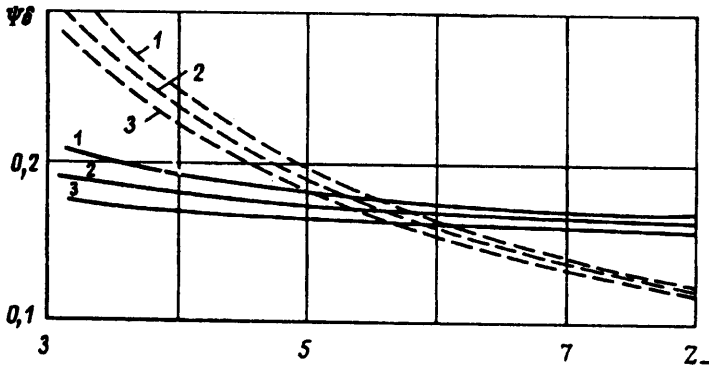
Примем для определенности, что точка измерения скорости — начало артерии $x = 0$. В этой точке амплитуда колебаний скорости, как следует после выкладок из (2.2), есть

$$U(0) = \delta p_* \Psi, \quad \Psi = \left\{ \frac{1 + Z_-^2 \operatorname{tg}^2 2\pi L}{(Z_+ + Z_-)^2 + (1 + Z_+ Z_-)^2 \operatorname{tg}^2 2\pi L} \right\}^{1/2} \quad (2.3)$$

Если возвратиться к размерным переменным, то отсюда получится, что амплитуда колебаний расхода есть произведение амплитуды колебаний давления, обратной величины характеристического импеданса артерии $Z_0 = \rho c_0 / F_0$ и функции, зависящей от отношений длины артерии к длине пульсовой волны и внешних



Фиг. 3



Фиг. 4

сопротивлений — к характеристическому импедансу. Этот результат можно было предсказать, опираясь на теорию размерностей и учитывая линейность задачи.

3. Свойства решения. Функция $\Psi(Z_-)$ в (2.3) непрерывна и ограничена при фиксированных Z_+ (в том числе и при $Z_+ = 0$) для всех $Z_- > 0$; ее предельные значения суть

$$\Psi(Z_+, 0, L) = (Z_+^2 + \operatorname{tg}^2 2\pi L)^{-1/2},$$

$$\Psi(Z_+, \infty, L) = |\operatorname{tg} 2\pi L| (1 + Z_+^2 \operatorname{tg}^2 2\pi L)^{-1/2} \quad (3.1)$$

причем $\Psi(Z_+, \infty, L) \geq \Psi(Z_+, 0, L)$, если $|\operatorname{tg} 2\pi L| \leq 1$. При $Z_+ = 0$ или $\operatorname{tg} 2\pi L = 0$ зависимость Ψ от Z_- монотонно убывающая, а при $Z_+ \neq 0$, $\operatorname{tg} 2\pi L \neq 0$ зависимость имеет минимум, положение которого сдвигается в сторону больших Z_- с ростом Z_+ , если $\operatorname{tg} 2\pi L \neq 0$. При этом порядки убывания минимального и предельного ($Z_- \rightarrow \infty$) значений Ψ с ростом Z_+ одинаковы. С уменьшением $\operatorname{tg} 2\pi L$ положение минимума также смещается вправо.

На фиг. 3, 4 представлены в качестве иллюстрации семейства кривых $\delta\Psi(Z_-)$ для $\delta = 0,3$ и $L = 0,1$ и $L = 0,2$ соответственно. Там же для сопоставления штриховыми линиями изображены зависимости $\varphi(Z_-) = 1/(Z_+ + Z_-)$. Номерам кривых 1—3 отвечают три значения Z_+ : 0; 0,2; 0,4. Соответственные кривые пересекаются в точке $Z_- = Z_c$, где $Z_c = Z_c(\delta, L, Z_+)$, при переходе через эту точку изменяется знак диастолической скорости

$$u_d = \min u = p_m (\varphi - \delta\Psi) \quad (3.2)$$

С увеличением входного сопротивления Z_+ оба слагаемых в (3.2) убывают, но убывает и сама диастолическая скорость.

4. Предварительное обсуждение. Длина реальных артерий нижней конечности человека не превосходит 50 см, тогда как длина пульсовой волны достигает 10 м.

Поэтому величина $2\pi L$ в (2.3) заведомо меньше $\pi/4$ и $\text{tg}2\pi L < 1$ [9]. В этом случае, как и следовало ожидать, диапазон изменения амплитуды скорости невелик и в зависимости диастолической скорости от Z_- главный вклад дают изменения средней скорости u_m .

Обозначим через W механическую работу, которую совершают мышцы конечности; именно эта величина, а не входное сопротивление Z_- , задается в экспериментах. Регуляторные механизмы обеспечивают снижение Z_- при росте W . При патологиях, связанных с обструкцией вышележащих сосудов, оказывается увеличенным входное сопротивление Z_+ , но одновременно значение Z_- в покое $Z_{-,0}$ понижено, чтобы обеспечить адекватное кровоснабжение. Иными словами, можно положить

$$Z_- = \varphi(Z_{-,0}, W), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial W} \leq 0; \quad Z_+ + Z_{-,0} = Z_+' + Z_{-,0}' = Z_{n,0}$$

где штрихами отмечены «нормальные» значения сопротивлений. Объединяя эти две формулы, получим

$$Z_- = \varphi(Z_{n,0} - Z_+, W); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Z_+} \leq 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial W} \leq 0 \quad (4.1)$$

Согласно теории, увеличение W тогда ведет к существенному росту средней скорости u_m при довольно слабых изменениях амплитуды U , что и было зафиксировано в опытах [3, 4]

$$W = 0: \quad u_d \simeq 0, \quad u_m = u_{m0}, \quad U = U_0$$

$$W \neq 0: \quad u_d \simeq 2u_m - U, \quad u_m > u_{m0}, \quad U \simeq U_0$$

Пользуясь данными измерений и формулами разд. 3, по u_{m0} , u_m и U_0 можно оценить $Z_{-,0}$, Z_+' , Z_-' , после чего проверить, обеспечивают ли найденные величины малое различие амплитуд U при $W = 0$ и $W \neq 0$. Привлекая данные для нескольких значений W , можно также проконтролировать стабильность оценок Z_+ , $Z_{-,0}$ и реконструировать зависимости типа (4.1) для нормальных и повышенных Z_+ .

Учет соотношения типа (4.1) обеспечивает возможность согласования с теорией тех результатов опытов, которые свидетельствуют о росте u_d и $\partial u_d / \partial W$ при патологически увеличенных Z_+ .

Все упомянутые здесь опытные данные относились к размерным переменным, тогда как теория оперирует с безразмерными, причем некоторые из масштабов могли изменяться в опытах. Так, например, если для изучаемой артерии имеет место регуляторный эффект увеличения просвета с ростом потока [10, 11], то при $W \neq 0$ уменьшаются характеристический импеданс $Z_0 = \rho c_0 / F_0$ и длина пульсовой волны $\lambda = c_0 T$. Учет этих обстоятельств при сравнении теории с результатами опытов имеет смысл при достоверно воспроизводимых в опытах изменениях амплитуды; пока что ее измерения довольно грубы.

Представленные в разд. 2—4 соображения касались только того частного случая, когда сопротивления Z_{\pm} — чисто резистивные. На самом деле они содержат в себе и другие составляющие. Соответствующее обобщение теории, как известно, достигается весьма просто: во втором слагаемом (2.2) следует заменить Z_{\pm} на их комплексные аналоги $Z_{\pm}^* = Z_{\pm} + iz_{\pm}$ и затем заново вычислить функцию Ψ . В итоге вместо (2.3) получится

$$\Psi = \left\{ \frac{(1 + z_- \text{tg} 2\pi L)^2 + Z_-^2 \text{tg}^2 2\pi L}{(Z_+ + Z_-)^2 + (z_+ + z_-)^2 + [(1 + Z_+ Z_- - z_+ z_-)^2 + (z_+ Z_- + z_- Z_+)^2] \text{tg}^2 2\pi L - \vartheta} \right\}^{1/2}$$

$$\vartheta = 2 [z_+ (Z_-^2 + z_-^2 - 1) + z_- (Z_+^2 + z_+^2 - 1)] \text{tg} 2\pi L$$

Эту формулу можно использовать для более детального анализа влияния внешних сопротивлений на амплитуду скорости. С той же целью полезно проанализировать влияние трения и оттока жидкости через боковую поверхность артерии, положив в (1.12), (1.13) $q_w^* = \xi p^*$, $\tau_w^* = -\zeta u^*$.

5. Заключение. В экспериментах [3, 4] получены сведения не только о величине u_d , но и о времени t_d , которое необходимо для возвращения u_d к исходному уровню после прекращения работы мышц, в зависимости от Z_+ и W . Предварительные оценки показывают, что чисто гидродинамические эффекты не могут быть ответственны за этот переходный процесс; скорее всего, как и утверждается в [3, 4], он является следствием постепенного ослабления действия сосудорасширяющих веществ, выделившихся во время работы мышц, и соответствующего восстановления сосудистого тонуса. Поэтому моделирование переходного процесса потребует привлечения дополнительных уравнений кинетики регуляции в духе [12]. Хотя период пульсового цикла заведомо мал в сравнении с длительностью работы мышц и переходного процесса, пульсирующая составляющая потока может быть важна для скорости выделения сосудорасширяющих агентов [11] и поэтому должна учитываться при вычислении средних значений модуля касательных напряжений, к величине которых чувствительны стенки артерий.

Постановку вопроса о диастолической скорости предложили В. Э. Кудряшев и С. В. Иванов, авторы выражают им свою признательность за предоставление опытных данных и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox R. H. Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis//J. Biomech. 1969. V. 2. № 3. P. 251—265. (Рус. перев.: Кокс Р. Г. Сравнение моделей артериального движения крови, основанных на линеаризованных теориях распространения волн//Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 43—60).
2. Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A. The mechanics of the circulation. Oxford etc.: Oxford Univ. press, 1978. 527 p. (Рус. перев.: Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.)
3. Иванов С. В., Кудряшев В. Э., Белецкий Ю. В., Золичев Г. Е. Диагностика и оценка тяжести артериальной недостаточности нижних конечностей методом ультразвуковой доплеровской флоуметрии в тредмил-тесте//Вестн. хирургии. 1990. № 2. С. 47—50.
4. Кудряшев В. Э., Белецкий Ю. В., Иванов С. В., Леонова С. Ф. Уровни анаэробного порога в оценке центральной и периферической гемодинамики//Кардиология. 1990. № 6. С. 33—37.
5. Rushmer R. F., Franklin D. L., Van Citters R. L., Smith O. A. Changes in peripheral blood flow distribution in healthy dogs//Circulat. Res. 1961. V. 9. № 3. P. 675—687.
6. Folkow D., Neil E. Circulation. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1971. 593 p. (Рус. перев.: Фолков Б., Нил Э. Кровообращение. М.: Медицина, 1976. 464 с.)
7. Rushmer R. F. Cardiovascular dynamics. Philadelphia; London: Saunders, 1976. 503 p. (Рус. перев.: Рашмер Р. Ф. Динамика сердечно-сосудистой системы. М.: Медицина, 1981. 600 с.)
8. Pedley T. J. The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press. 1980. 446 p. (Рус. перев.: Педли Т. Дж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.)
9. Westerhof N., Bosman F., De Vries C. J., Noordergraad A. Analog studies of the human systemic arterial tree//J. Biomech. 1969. V. 2. № 2. P. 121—143. (Рус. перев.: Вестергоф Н., Босман Ф., Де Вриз К. Д., Ноордерграад А. Аналоговое исследование артериальной системы человека//Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 181—241.)
10. Khaytin V. M. Active arterial function: prompt adaptation of the vascular lumen to the blood flow velocity and viscosity//Contemp. Probl. Biomech. Moscow: Voca. Raton, 1990. P. 142—207.
11. Недошивин В. П., Дворецкий Д. П. Влияние амплитуды и частоты пульсаций крови на тонус периферических сосудов//Физиол. журн. СССР. 1991. Т. 77. № 9. С. 76—82.
12. Егоров В. А., Резицер С. А., Шадрин Н. Х. Течение крови в микрососудистой сети мышц при регуляторных реакциях: квазистационарные задачи//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 137—145.