

УДК 532.527

© 1993 г. С. И. ЧЕРНЫШЕНКО

## СТРАТИФИЦИРОВАННОЕ ПО ПЛОТНОСТИ ТЕЧЕНИЕ САДОВСКОГО В КАНАЛЕ

Рассмотрены устойчиво стратифицированные по плотности и не стратифицированные невязкие течения в канале, на оси симметрии которого располагается пара симметричных вихревых областей с замкнутыми линиями тока. Проведены численные расчеты, перекрывающие весь диапазон докритической стратификации и возможных длин зоны замкнутых линий тока. Построено асимптотическое решение для очень большой длины зоны замкнутых линий тока. Полученные результаты могут быть непосредственно использованы в асимптотической теории отрывных течений при больших числах Рейнольдса.

Течениями Садовского называют плоские течения невязкой жидкости, в которых присутствует пара областей замкнутых линий тока с постоянной завихренностью, в то время как вне этих зон течение потенциально. Граница области замкнутых линий тока может быть тангенциальным разрывом. Ниже рассмотрение ограничено случаем непрерывного распределения скоростей: скачок постоянной Бернулли на границе вихревой зоны равен нулю. Расчеты неограниченных нестратифицированных течений такого рода описаны в [1, 2]. Соответствующее течение в канале рассматривалось К. Турфусом<sup>1</sup>, однако расчеты в этой работе были проведены лишь для сравнительно широких каналов. Близкие задачи рассмотрены также в [3, 4].

**1. Формулировка задачи.** Ввиду симметрии задачи можно ограничиться рассмотрением только одной из областей замкнутых линий тока. Общая картина течения показана на фиг. 1. Обезразмерим переменные по ширине канала и скорости на бесконечности. Безразмерная функция тока удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi = -\omega(\psi), \quad \psi > 0, \quad \omega(\psi) = \text{Ri}(\psi - y), \quad \psi < 0, \quad \omega(\psi) = -\Lambda = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\text{Ri} = (\Delta\rho/\rho)gH/U^2$$

Здесь  $\text{Ri}$  — число Ричардсона,  $\rho$  — плотность,  $\Delta\rho$  — разность плотностей на оси симметрии и верхней стенке,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $H$  и  $U$  — размерные ширина канала и скорость на бесконечности.

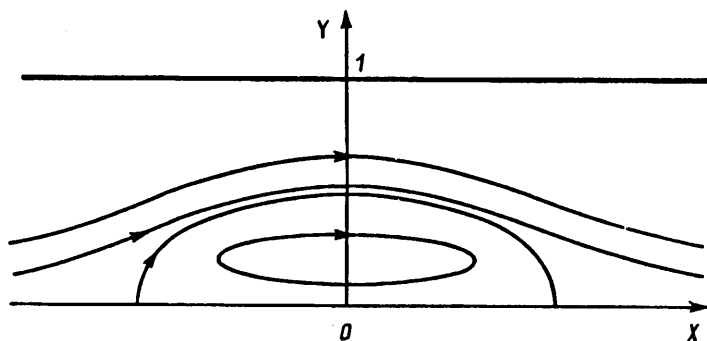
Стратификация устойчива при  $\text{Ri} > 0$  и докритическая при  $\text{Ri} < \pi^2$ . При  $\text{Ri} > \pi^2$  возможны стационарные волны [5]. Параметр  $\Lambda$  должен быть задан, причем, как показывает проведенное ниже исследование, имеет место ограничение  $\Lambda > \Lambda_\infty(\text{Ri})$ . При выводе (1.1) предполагается, что вне вихревой зоны плотность линейно зависит от функции тока, всюду непрерывна, а внутри вихревой зоны постоянна.

Граничные условия таковы

$$y = 0, \quad \psi = 0; \quad y = 1, \quad \psi = 1; \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad \psi \rightarrow y$$

Скачок постоянной Бернулли на границе области замкнутых линий тока полагается равным нулю, так как именно этот случай представляет интерес в асимптотической теории отрывных течений при больших числах Рейнольдса [6]. В этом случае при  $\text{Ri} = 0$  течения Садовского в неограниченном потоке для любых значений  $\Lambda$  подобны, различаясь лишь размерами вихревой зоны [1]. В случае течения в канале подобия уже нет, и существует однопараметрическое

<sup>1</sup> Статья *Turfus C. Prandtl-Batchelor flow past a flat plate at normal incidence in a channel.* Представлена в *J. Fluid Mech.*



Фиг. 1

семейство решений. Увеличение  $\Lambda$  влечет за собой уменьшение размеров зоны замкнутых линий тока подобно тому, как это имеет место в неограниченном потоке [1]. В пределе при  $\Lambda \rightarrow \infty$  влияние стенок исчезает, и получается течение Садовского в неограниченном потоке. Более того, с уменьшением размеров вихревой зоны на ее масштабе влияние стратификации (для фиксированного числа Ричардсона) тоже исчезает. С уменьшением  $\Lambda$  область замкнутых линий тока растет. Этот рост, однако, ограничен стенками канала. Численные расчеты, которые будут описаны ниже, дают основания предположить, что при стремлении  $\Lambda$  сверху к некоторому значению, зависящему от числа Ричардсона, длина вихревой зоны стремится к бесконечности, в то время как ее ширина остается конечной и меньшей ширины канала. Такое поведение соответствует асимптотике, описанной ниже.

2. Асимптотика бесконечно длинной вихревой зоны. Нормируем продольную координату  $x$  на длину области замкнутых линий тока  $L \rightarrow \infty$ :  $x = LX$ ,  $X = 0$  (1). Асимптотическое разложение в этом пределе, конечно, не является равномерно-пригодным. Вблизи точек торможения необходимо рассмотреть соответствующие характерные пределы. Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega(\psi, y)$$

Предположим, что при  $L \rightarrow \infty$   $\Lambda \rightarrow \Lambda_\infty$ ,  $\psi \rightarrow \Psi$ . В рассматриваемом пределе получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega(\Psi, y)$$

Используя граничные условия, отсюда легко получить

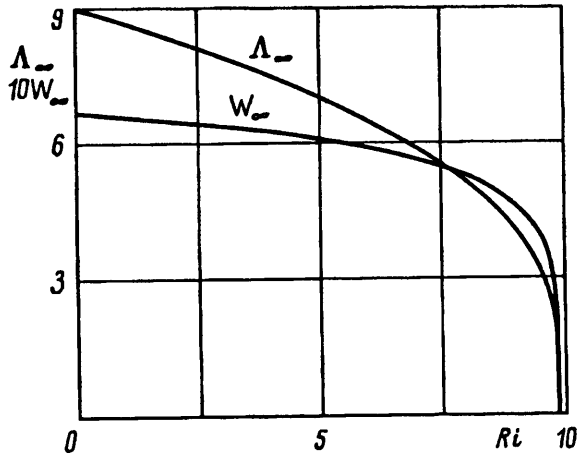
$$\Psi = y - \frac{\sin(\sqrt{Ri}(y-1))}{\sin(\sqrt{Ri}(W_\infty-1))} W_\infty, \quad y > W_\infty$$

$$\Psi = \frac{\Lambda_\infty}{2} (y^2 - W_\infty y), \quad y < W_\infty \quad (2.1)$$

$$\Lambda_\infty = \frac{2(1 + \sqrt{Ri} W_\infty \operatorname{ctg}(\sqrt{Ri}(1 - W_\infty)))}{W_\infty} \quad (2.2)$$

Здесь  $W_\infty$  — ширина вихревой зоны. Значение  $\Lambda_\infty$  при этом остается неизвестным и должно быть получено из анализа течения в другом характерном масштабе вблизи оконечностей зоны замкнутых линий тока.

Характерным масштабом длин в обоих направлениях для течения вблизи оконечности вихревой зоны является ширина канала. Поэтому уравнение для



Фиг. 2

функции тока сохраняет вид (1.1). Отличие от полной задачи обусловлено разницей в граничных условиях. Для задней оконечности условие на бесконечности вниз по потоку  $x \rightarrow \infty$ ,  $\psi \rightarrow y$  сохраняется, в то время как условие вверх по потоку заменяется на условие срачивания с решением (2.1), (2.2):  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\psi \rightarrow \Psi(y)$ . Расчет течения в этом характерном пределе можно провести только численно. Оказывается, однако, что значение  $\Lambda_\infty$  можно определить и без полного расчета течения в этой области.

Далеко вниз и вверх по потоку скорость и давление перестают зависеть от  $x$ . Поток импульса в проекции на  $x$  не зависит от  $x$ . Поэтому

$$\int_0^1 \left( u^2 + \frac{p}{\rho} \right) dy \Big|_{x \rightarrow -\infty} = \int_0^1 \left( u^2 + \frac{p}{\rho} \right) dy \Big|_{x \rightarrow +\infty}$$

Интеграл Бернулли на верхней стенке дает

$$y = 1, \quad \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \Big|_{x \rightarrow -\infty} = \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \Big|_{x \rightarrow +\infty}$$

Здесь  $u$  — скорость вдоль оси  $x$ ,  $p$  — давление,  $\rho = \text{const}$  — плотность. Подставив в эти соотношения выражения для  $u$  и  $p$ , следующие из (2.1), (2.2) и граничных условий, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:  $W_\infty$  и разностью давлений на верхней стенке при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$ , деленной на  $\rho$ . Эта система имеет единственное нетривиальное решение, дающее изображенные на фиг. 2 зависимости  $W_\infty(Ri)$  и  $\Lambda_\infty(Ri)$ . Для  $Ri > 0$  формулы, выражающие эти функции, громоздки и могут быть получены лишь в параметрической форме. Обозначив  $\lambda = \sqrt{Ri}(1 - W_\infty)$ , можно получить уравнение

$$[(1 - \lambda \text{ctg } \lambda)^2 + \lambda^2 + 3\lambda \text{ctg } \lambda - 3] W_\infty^2 + (4 - \lambda \text{ctg } \lambda) W_\infty - 2 = 0.$$

Условие  $0 < W_\infty < 1$  отбирает одно из двух решений. Значение  $\Lambda_\infty$  затем можно найти из (2.2). При  $Ri = 0$  это решение дает  $W_\infty = 2/3$  и  $\Lambda_\infty = 9$ .

**3. Численный расчет.** Расчет проведен в области между вертикальной осью симметрии и правой границей, расположенной при  $x = x$ , достаточно далеко вниз по потоку. Условие на бесконечности  $\psi = y$  было снесено на эту границу. Уравнение (1.1) было заменено на уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = \omega(\psi) \quad (3.1)$$

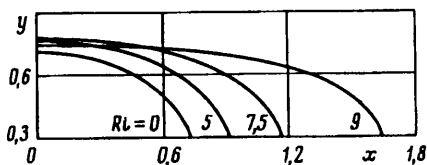
и использован метод установления. Разностная схема имела второй порядок

$\Gamma$	$Ri$	$\Lambda$	$C$	$L_{1/2}$	$W$	$b$	$\alpha$
0	0	$\infty$	73	0	0	0,55	0,44
0,5	0	74,1	74	0,088	0,052	0,544	0,44
2,5	0	17,0	85	0,409	0,244	0,541	0,442
5	0	11,1	111	0,735	0,414	0,538	0,419
10	0	9,27	186	1,23	0,572	0,527	0,355
20	0	9,01	360	2,09	0,651	0,515	0,254
40	0	9,00	720	3,76	0,666	0,508	0,157
50	0	9,00	900	4,59	0,666	0,506	0,132
$\infty$	0	9	$\infty$	$\infty$	2/3	1/2	0
0,5	5,0	69,7	70	0,090	0,054	0,546	0,44
2,5	5,0	11,1	57	0,507	0,301	0,541	0,440
5	5,0	7,62	80	0,920	0,471	0,532	0,388
10	5,0	7,05	149	1,56	0,572	0,519	0,292
30	5,0	7,01	441	3,91	0,608	0,513	0,231
$\infty$	5,0	7,01	$\infty$	$\infty$	0,608	1/2	0
0,5	8,5	63,0	64	0,095	0,056	0,544	0,44
2,5	8,5	5,40	39	0,784	0,388	0,530	0,376
5	8,5	4,72	71	1,42	0,468	0,516	0,262
10	8,5	4,68	136	2,49	0,499	0,508	0,172
15	8,5	4,69	201	3,55	0,503	0,505	0,127
$\infty$	8,5	4,68	$\infty$	$\infty$	0,502	1/2	0
0,5	9,0	59,0	60	0,099	0,058	0,546	0,43
2,5	9,0	4,40	41	0,946	0,389	0,522	0,317
5	9,0	4,12	75	1,67	0,447	0,512	0,219
10	9,0	4,11	141	2,97	0,465	0,506	0,138
$\infty$	9,0	4,08	$\infty$	$\infty$	0,464	1/2	0

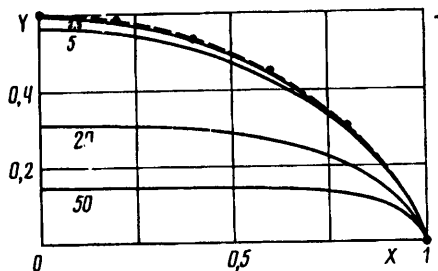
точности по пространственным координатам, за исключением границы области замкнутых линий тока, на которой вследствие разрыва вторых производных искомой функции порядок точности снижался до первого. Слабая логарифмическая сингулярность вблизи точки торможения [2, 7], как видно из сравнения полученных результатов с результатами других авторов, практически не влияет на точность расчета.

Разностные уравнения были решены методом переменных направлений. Чтобы подавить возможное влияние нелинейности на сходимость, шаг по времени был выбран равным 0,3 шага, оптимального для соответствующей линейной задачи.

Уравнение (3.1) с принятыми граничными условиями описывает процесс нестационарной теплопроводности в прямоугольной области, на нижней границе которой температура  $-\psi$  равна нулю, а на верхней и правой отрицательна. Левая граница теплоизолирована. Правую часть (3.1) можно интерпретировать как тепловыделение ( $\Lambda > 0$ , так как жидкость внутри вихревой зоны вращается по часовой стрелке). При  $Ri = 0$  тепловыделение имеет место только внутри зоны положительной температуры. Интенсивность тепловыделения при этом пропорциональна  $\Lambda$ . Можно провести аналогию с распространением пламени в некоторой среде, в которой при положительных температурах происходит горение с постоянным тепловыделением  $\Lambda$ , в то время как при отрицательных пламя гаснет. В такой системе, по всей вероятности, пламя со временем захватит почти всю область либо совсем погаснет. Анализ соответствующей одномерной ( $\psi$  зависит только от  $t$  и  $y$ ) задачи поддерживает такой вывод. Эта аналогия показывает, что стационарное решение (3.1), имеющее



Фиг. 3



Фиг. 4

подразумеваемую структуру (т. е. соответствующее конечной области горения), может быть неустойчивым. По этой причине попытки расчета с фиксированным  $\Lambda$  не проводились. Вместо этого на каждом шаге по времени вычислялось новое значение  $\Lambda = \Gamma/S$ , где  $\Gamma$  — заданная циркуляция вокруг зоны замкнутых линий тока, а  $S$  — ее площадь. При таком подходе уменьшение зоны горения ведет к увеличению тепловыделения и наоборот.

Было использовано обычное для медленно сходящихся процессов условие прекращения итераций

$$\|\psi^n - \psi^{n-1}\| \leq \varepsilon (1 - \lambda), \quad \lambda = \|\psi^n - \psi^{n-1}\| / \|\psi^{n-1} - \psi^{n-2}\|$$

$$\|\psi^n\| = \sqrt{\sum_{ij} (\psi_{ij}^n)^2 \Delta x \Delta y}$$

Здесь  $n$  — номер итерации (номер шага по времени),  $\varepsilon$  — точность,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  — шаги сетки.

Расчеты для  $\Gamma = 0,5-2,5$ ,  $Ri = 0$  были проведены на сетке  $161 \times 161$  при  $x_r = 1$ , а для  $\Gamma = 5-50$  — на сетке  $391 \times 61$  при  $x_r = 6$ . Для контроля точности были проведены расчеты на более грубых сетках и с увеличением  $x_r$ . Для  $Ri > 0$  и малых  $\Gamma$  использованы сетки  $241 \times 121$  и  $301 \times 101$  при  $x_r = 2$  и  $3$ .

Вниз по потоку от вихревой зоны имеет место разложение

$$\psi = \sum_n A_n \sin(\pi n y) \exp(-\lambda_n x), \quad \lambda_n = \sqrt{\pi^2 - Ri}$$

Поэтому для больших  $Ri$  требуются более длинные расчетные области. Относительная точность большинства расчетов составляет  $10^{-4}-10^{-5}$ . Так как использовались только равномерные сетки, течения с малыми размерами зон замкнутых линий тока (малые  $\Gamma$ , большие  $Ri$ ) были рассчитаны с меньшей точностью. Тем не менее результаты для  $Ri > 0$  имеют относительную точность не хуже 1%, кроме  $Ri = 8,5$  и  $9$  при  $\Gamma = 0,5-2,5$ , где ошибка, возможно, достигает 5%. Для  $Ri = 0$  все цифры, данные в таблице (последняя цифра округлена), верны, а на графиках ошибка не превосходит толщины линий.

Правильность программы помимо сгущения сетки контролировалась сравнением полных потоков импульса через левую и правую границы расчетной области. Полученные результаты подтверждаются также сравнением с результатами других авторов и с результатами асимптотической теории для длинных зон замкнутых линий тока, изложенной выше.

**4. Результаты.** Результаты даны в таблице и на фиг. 3—4. В таблице  $C = 2 \iint \omega^2 dx dy$  — коэффициент диссипации энергии,  $L_{1/2}$  — полудлина вихревой зоны (расстояние от вертикальной оси симметрии до оконечности зоны),  $b$  — отношение интеграла от скорости вдоль верхней границы зоны замкнутых линий тока между точками торможения к полной циркуляции вокруг зоны;  $\alpha$  — отношение удвоенной площади зоны замкнутых линий тока к квадрату ее длины. Эти величины приведены ввиду их роли в асимптотической теории отрывных течений при больших числах Рейнольдса. С уменьшением  $\Gamma$  размеры вихревой зоны уменьшаются. Как показал расчет, для  $Ri = 0$  значение  $\Gamma = 2,5$  столь мало, что влияние стенки на форму зоны практически несущественно. Значение

$\Gamma = 50$  при  $Ri = 0$  достаточно велико для того, чтобы произошел выход на асимптотику  $\Gamma \rightarrow \infty$ , поэтому картину линий тока при  $\Gamma = 50$  можно рассматривать как картину линий тока вблизи конечности зоны в этом пределе. На фиг. 3 показана форма зоны замкнутых линий тока при  $\Gamma = 5, Ri = 0; 5; 7,5$  и  $9$ . Длина вихревой зоны растет с числом Ричардсона. Интересно отметить немонотонность зависимости толщины вихревой зоны от  $Ri$ .

Зависимость формы зоны замкнутых линий тока от  $\Gamma$  при  $Ri = 0$  показана на фиг. 4. Здесь  $X = 2x/L, Y = 2y/L$ . Результаты Садовского, показанные штриховой линией, взяты из таблицы в [8], а результаты Мура с соавт., показанные точками, взяты из рисунка в [9]. Эти результаты соответствуют  $\Gamma = 0$ . Полученные в настоящей работе кривые для  $\Gamma = 0,5$  и  $1$  не показаны на рисунке, так как они лежат очень близко к кривой  $\Gamma = 0$ . Сплошные линии соответствуют  $\Gamma = 2,5; 5; 20$  и  $50$ . Видно очень хорошее согласие результатов разных авторов. Следует отметить, что расхождение значений  $\Delta L_{1/2}$ , полученных в [9] и [1], появилось в результате случайной ошибки в обработке данных расчета: исправленное значение  $6,5$  приведено в [10] и согласуется с полученным позднее в [9]. Экстраполяция результатов настоящей работы на  $\Gamma = 0$  дает значение  $6,44$ .

Автор выражает признательность проф. И. П. Кастро из университета графства Суррей, Англия, обратившему внимание автора на стратифицированные течения, и проф. Г. Ю. Степанову, настоявшему на публикации этой работы на русском языке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский В. С. О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 773--779.
2. Saffman P. G., Tanveer S. The touching pair of equal and opposite univorm vortices//Phys. Fluids. 1982. V. 25. № 11. P. 1929—1930.
3. Pierrehumbert R. T. A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity//J. Fluid Mech. 1980. V. 99. P. 129—144.
4. Smith F. T. Concerning inviscid solutions for large-scale separated flows//J. Eng. Math. 1986. V. 20. № 3. P. 271—292.
5. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
6. Чернышенко С. И. Асимптотика стационарного отрывного обтекания тела при больших числах Рейнольдса//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 958—966.
7. Садовский В. С. О некоторых свойствах потенциального и вихревого течений, граничащих на замкнутой жидкой линии тока//Уч. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 1. С. 113—116.
8. Садовский В. С. Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке//Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 4. С. 1—9.
9. Moore D. W., Saffman P. G., Tanveer S. The calculation of some Batchelor flows: The Sadovskii vortex and rotational corner flow//Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 5. P. 978—990.
10. Садовский В. С., Кожуро Л. А. О двух однопараметрических семействах вихревых течений невязкой жидкости//Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1977. Т. 8. № 7. С. 126—140.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XII.1992