

УДК 532.526.4

© 1993 г. И. И. ВИГДОРОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Уравнения турбулентного пограничного слоя содержат малый параметр — величину, обратную числу Рейнольдса, что дает возможность проведения асимптотического анализа решения по этому малому параметру. Такие исследования были предметом ряда работ [1—5]. В [2, 5] для замыкания уравнения импульсов использовались алгебраические модели Прандтля и турбулентной вязкости. В [1, 3, 4] анализ структуры пограничного слоя проводился в общем виде без формулировки конкретных гипотез замыкания, но при дополнительных предположениях о характере асимптотики предельных решений в различных областях.

В настоящей работе построено асимптотическое решение задачи о несжимаемом турбулентном пограничном слое на плоской пластине при больших значениях логарифма числа Рейнольдса, образованного по толщине слоя. Принята произвольная зависимость напряжения сдвига от плотности и вязкости жидкости, расстояния от стенки, толщины пограничного слоя и частных производных любого порядка от продольной составляющей осредненной скорости по поперечной координате. В этих предположениях выведен известный логарифмический закон для профиля скорости, получены асимптотические формулы для распределения осредненной скорости, компонент тензора рейнольдсовых напряжений, трения на пластине и интегральных параметров пограничного слоя, хорошо соответствующие экспериментальным данным.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине, обтекаемой равномерным потоком с постоянной по длине пластины скоростью на внешней границе пограничного слоя. Уровень турбулентных пульсаций в набегающем потоке будем считать пренебрежимо малым.

В соответствии с локальным или дифференциальным, согласно терминологии [6], подходом к определению напряжения сдвига $-\rho \langle u'v' \rangle$ и других компонент тензора Рейнольдса $-\rho \langle u'^2 \rangle$, $-\rho \langle u'v'^2 \rangle$ в установившемся плоскопараллельном течении или пограничном слое будем предполагать зависимость этих величин в данной точке потока от плотности ρ и вязкости ν жидкости, расстояния от стенки y , частных производных до порядка N ($N \geq 1$) включительно от продольной составляющей осредненной скорости u по поперечной координате, а также толщины слоя Δ , задающей глобальный масштаб турбулентного течения. Тогда из соображений размерности

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= - \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 T \left(\frac{y}{\Delta}, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1} \right) \\ \langle u'u'^2 \rangle &= \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 T_1 \left(\frac{y}{\Delta}, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1} \right) \\ \langle v'^2 \rangle &= \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 T_2 \left(\frac{y}{\Delta}, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1} \right) \\ \Pi_0 &= \nu \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1}, \quad \Pi_n = (-y)^n \frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}} \left(n! \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В дальнейшем будем предполагать существование производных функций T , T_1 , T_2 по всем аргументам.

В уравнении пограничного слоя, записанном для функции тока осредненного течения ψ , перейдем к новым переменным по формулам

$$\psi = \rho U_\infty \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \xi = \ln R_\Delta, \quad \eta = y/\Delta$$

Здесь U_∞ — скорость невозмущенного набегающего потока, $R_\Delta = U_\infty \Delta/\nu$ — число Рейнольдса, образованное по толщине слоя, которую будем рассматривать как некоторый параметр, характеризующий профиль продольной скорости. В дальнейшем удобно использовать различные определения этой величины. Для функций $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Lambda(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\Lambda(\xi) = dR_\Delta/dR_x, \quad R_x = U_\infty x/\nu \quad (1.2)$$

$$\Lambda [\Psi_\eta \Psi_{\eta\xi} - \Psi_{\eta\eta} (\Psi + \Psi_\xi)] = [(\eta \Psi_{\eta\eta}^2)^2 T(\eta, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1}) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} I_\eta] \quad (1.3)$$

$$\Pi_0 = \frac{e^{-\xi}}{\eta^2 \Psi_{\eta\eta}}, \quad \Pi_n = \frac{(-\eta)^n}{n! \Psi_{\eta\eta}} \frac{\partial^{n+2} \Psi}{\partial \eta^{n+2}}, \quad 1 \leq n \leq N-1$$

$$\xi > -\infty, \quad \eta = 0: \quad \Psi_\eta = 0, \quad \Psi + \Psi_\xi = 0 \quad (1.4)$$

$$\xi > -\infty, \quad \eta = \infty: \quad \Psi_\eta = 1 \quad (1.5)$$

Здесь x — расстояние от передней кромки. Соотношения (1.4) (1.5) задают граничные условия на пластине и внешней границе пограничного слоя соответственно.

Если функция $\Lambda(\xi)$ определена, толщина пограничного слоя $\Delta(x)$ и связь между переменными ξ и x могут быть найдены из уравнения (1.2).

Будем искать асимптотическое представление решения краевой задачи (1.3) — (1.5) при $\xi \rightarrow +\infty$, т. е. при больших значениях логарифма числа Рейнольдса, образованного по толщине пограничного слоя.

Предположим, что при $\xi \rightarrow +\infty$ имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\Lambda(\xi) = \lambda_1 \xi^{-1} + \lambda_2 \xi^{-2} \ln \xi + O(\xi^{-2}) \quad (1.6)$$

2. Внешняя область пограничного слоя. Рассмотрим внешнюю область пограничного слоя, где $1/\eta = O(1)$. Будем искать решение в виде

$$\Psi(\xi, \eta) = \eta + \Lambda(\xi) f(\eta) + O(\xi^{-2}) \quad (2.1)$$

Подстановка (1.6), (2.1) в уравнение (1.3) дает для функции f обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[(\eta f'')^2 T(\eta, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1})]' + \eta f'' = 0 \quad (2.2)$$

$$\Pi_n = (-\eta)^n f^{(n+2)} (n! f'')^{-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad f(0) = f'(\infty) = 0$$

Граничное условие на стенке получено из второго условия (1.4), на бесконечности — из (1.5).

В зависимости от вида функции T уравнение (2.2) имеет решение, соответствующее либо асимптотическому пограничному слою, когда профиль скорости асимптотически стремится к своему предельному значению на бесконечности, либо пограничному слою конечной толщины. В последнем случае, поскольку уравнение (2.2) допускает тривиальное решение $f'' \equiv 0$, вместо граничного условия $f'(\infty) = 0$ можно принять

$$f^{(n)}(1) = 0, \quad 1 \leq n \leq N+1; \quad f(\eta) = f(1), \quad \eta \geq 1 \quad (2.3)$$

либо другие соотношения, которые следуют из уравнения $f'' T(1, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1}) = 0$.

Заметим также, что в частном случае, когда T не зависит от η (поперечный масштаб Δ не входит в число определяющих параметров для турбулентного

трения), решение краевой задачи (2.2) определено с точностью до произвольной постоянной. Это связано с тем, что величина Δ в (1.2), (2.1) может быть выбрана произвольно. Если через f_0 обозначить решение краевой задачи (2.2), удовлетворяющее дополнительному граничному условию $f_0(\infty) = -1$, любое другое решение можно выразить по формуле $f(\eta) = F_1^2 f_0(\eta/F_1)$, $F_1 > 0$.

Определим теперь, при каких условиях функция f' имеет логарифмическую асимптотику на стенке. Как видно из (2.2), в этом случае $\Pi_n \rightarrow 1$, когда $\eta \rightarrow 0$.

Введем обозначение $T(0, 0, 1, \dots, 1) = K^2$. Величина K , которую будем предполагать неравной нулю, для данной гипотезы замыкания играет роль универсальной константы. Уравнение (2.2) имеет первый интеграл

$$(\eta f'')^2 T(\eta, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1}) + \eta f' - f + f(\infty) = 0 \quad (2.4)$$

Перейдем к новым переменным t и φ по формулам

$$\eta = e^{-t}, \quad f'(\eta) = F_1 (K\eta)^{-1} [1 + \varphi(t)], \quad F_1 = \sqrt{-f(\infty)} \quad (2.5)$$

Логарифмической асимптотике скорости на стенке соответствует $\varphi(+\infty) = 0$. Подставим (2.5) в (2.4); переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, $\varphi \rightarrow 0$, получим

$$P_{N-1} \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi = - [b + (KF_1)^{-1}] e^{-t} + \Phi \quad (2.6)$$

$$P_{N-1}(x) = 2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{n!} \left[\prod_{k=1}^n (k+x) - n! \right] \quad (2.7)$$

$$b = \frac{\partial \ln T}{\partial \eta}, \quad a_n = \frac{\partial \ln T}{\partial \Pi_n} \quad \text{при } \eta = 0, \quad \Pi_0 = 0, \quad \Pi_k = 1, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

$$0 \leq n \leq N-1$$

Здесь через Φ обозначены члены второго порядка и выше относительно e^{-t} , $\varphi^{(n)}$, $0 \leq n \leq N-2$, предполагается, что $a_{N-1} \neq 0$. Функция φ в первом приближении удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $(N-1)$ -го порядка с постоянными коэффициентами, имеющему характеристический многочлен (2.7). Пусть -1 является в общем случае корнем кратности i , $0 \leq i \leq N-1$ этого характеристического многочлена. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнение (2.6) имеет частное решение φ_0 с асимптотикой

$$\varphi_0 = - \frac{1 + KF_1 b}{KF_1 P_{N-1}^{(i)}(-1)} t^i e^{-t} + O(e^{(\alpha-2)t}), \quad \alpha \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

Общее решение уравнения (2.6) в окрестности $t = +\infty$ содержит кроме F_1 еще $N-1$ произвольную постоянную. Для определения этих N констант в случае, например, пограничного слоя конечной толщины имеется ровно N соотношений

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi^{(n)}(0) = 0, \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (2.9)$$

которые вытекают из (2.3), (2.5). Если теперь предположить, что характеристический многочлен $P_{N-1}(x)$ является полиномом Гурвица, т. е. не имеет корней в правой полуплоскости, то в соответствии с теоремой Ляпунова [7] решение φ_0 абсолютно устойчиво и все интегральные кривые уравнения (2.6) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Если у многочлена (2.7) есть корни с положительной действительной частью, то имеет место условная устойчивость решения φ_0 , при которой произвольные постоянные, входящие в общее решение уравнения (2.6), должны удовлетворять дополнительным (по числу корней в правой полуплоскости) уравнениям и, следовательно, в общем случае для решений, стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, все граничные условия (2.9) удовлетворены быть не могут.

Для асимптотики стремящихся к нулю интегральных кривых, допуская, что многочлен (2.7) имеет корни в интервале $[-1, 0)$, можно дать оценку $\varphi = O(e^{-\alpha\eta})$, $0 < \alpha \leq 1$.

Таким образом, уравнение (2.2) всегда имеет решение, соответствующее логарифмической асимптотике профиля скорости на стенке. Решение уравнения (2.2) с логарифмической асимптотикой удовлетворяет условиям гладкости на внешней границе пограничного слоя при определенных ограничениях на значения частных производных a_n . По известным критериям для многочленов Гурвица [8] может быть выписана некоторая система неравенств, которой должны удовлетворять коэффициенты полинома (2.7) и, следовательно, частные производные a_n .

Интегрируя (2.5), получим

$$f'(\eta) = F_1 K^{-1} [\ln \eta + F_2 + Q(\eta^\alpha)], \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \eta \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

где F_2 — некоторая постоянная интегрирования. Функцию f' и значения постоянных K, F_1, F_2 можно определить, исходя из конкретной модели турбулентности или путем сопоставления с экспериментальными данными. Для заданной гипотезы замыкания численные значения констант F_1, F_2 зависят от выбора поперечного масштаба Δ . Введем новый поперечный масштаб $\Delta_* = \Delta/\sigma$, где σ — произвольная постоянная. Обозначим все величины, определенные при толщине слоя Δ_* , индексом «*». Краевая задача для функции $f_*(\eta_*)$ имеет вид

$$[(\eta_* f_*'')^2 T(\eta_*/\sigma, 0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1})]' + \eta_* f_*'' = 0 \quad (2.11)$$

$$\Pi_n = (-\eta_*)^n f_*^{(n+2)} (n! f_*'')^{-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad f_*(0) = f_*'(\infty) = 0$$

Решения краевых задач (2.11), (2.2) связаны между собой равенством $f_*(\sigma\eta) = \sigma^2 f(\eta)$, из которого вытекает следующее правило преобразования коэффициентов асимптотического разложения (2.10):

$$F_1^* = \sigma F_1, \quad F_2^* = F_2 - \ln \sigma \quad (2.12)$$

Как следует из соотношений (2.12), величина $A = \ln F_1 + F_2$ не зависит от способа определения толщины пограничного слоя. Ниже будет показано, что K есть константа Кармана κ , которую в дальнейшем положим равной 0,41, а универсальная постоянная A в соответствии с экспериментальными данными [9] равна 0,24.

Для асимптотики профиля скорости в логарифмической области пограничного слоя согласно (1.6), (2.1) и (2.10) будем иметь

$$u/U_* = 1 + F_1 K^{-1} (\lambda_1 \xi^{-1} + \lambda_2 \xi^{-2} \ln \xi) [\ln \eta + F_2 + O(\eta^\alpha)] + O(\xi^{-2}) \quad (2.13)$$

3. Некоторые примеры. Полагая в (1.1) $N=1$, получим формулу пути перемешивания Прандтля. Для длины пути перемешивания примем зависимость [10], согласно которой

$$T(\eta, 0) = \kappa^2, \quad 0 < \eta \leq \omega; \quad T(\eta, 0) = (\kappa\omega/\eta)^2, \quad \omega \leq \eta \leq 1$$

Величина ω ниже будет выбрана из условия наилучшего соответствия расчетного и экспериментального профилей скорости. Решение уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) имеет вид

$$f' = \frac{F_1}{\kappa} \left(\ln \eta + F_2 - \frac{2\omega\eta}{\omega^2 + 1} \right), \quad 0 < \eta \leq \omega$$

$$f' = -\frac{(\eta + 2)(\eta - 1)^2}{12\omega^2 \kappa^2}, \quad \omega \leq \eta \leq 1$$

$$F_1 = \frac{\omega^2 + 1}{4\kappa\omega}, \quad F_2 = \frac{5\omega^3 + 3\omega - 2}{3\omega(\omega^2 + 1)} - \ln \omega$$

Из условия $A = 0,24$ получим $\omega = 0,166$, что отличается от величины $\omega = 0,22$, предложенной [9].

Формуле Кармана [11] соответствуют $N=2$, $T(\eta, 0, \Pi_1) = (\kappa/\Pi_1)^2$. Она может быть получена, если предположить, что турбулентное трение не зависит от Δ и поперечной координаты y . Заметим,

что характеристический многочлен (2.7), равный в этом случае $2(1-x)$, имеет положительный корень. В соответствии с выводами предыдущего параграфа следует ожидать, что решение уравнения (2.2) с логарифмической асимптотикой на стенке не будет удовлетворять условиям гладкости на внешней границе пограничного слоя.

Уравнение (2.2) принимает вид

$$\kappa^2 [(f'')^4 (f'')^{-2}]' + \eta f'' = 0 \quad (3.1)$$

Понижив порядок (3.1) с помощью подстановки (3.2), получим уравнение Рикатти (3.3)

$$\eta = \exp \left(\int \frac{d\varphi}{h(\varphi)} \right), \quad f''(\eta) = \kappa^{-2} \varphi \quad (3.2)$$

$$2\varphi^3 h' = h^2 + 4\varphi^2 h + 2\varphi^3 \quad (3.3)$$

которое в свою очередь после замены переменных (3.4) приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка (3.5)

$$h = -2\varphi^3 w'(\varphi)/w(\varphi), \quad \varphi = 2z^{-2} \quad (3.4)$$

$$[zw'(z)]' + zw(z) = 0 \quad (3.5)$$

Теперь искомые функции можно представить в виде

$$\eta = zw'(z), \quad f'' = 2(\kappa z)^{-2}, \quad -\langle u'v' \rangle = [U_e \Lambda w(z)/\kappa]^2 \quad (3.6)$$

Исходя из общего решения уравнения (3.5), получим

$$w = -c_1 J_0(z) - c_2 Y_0(z), \quad \eta = z [c_1 J_1(z) + c_2 Y_1(z)] \quad (3.7)$$

где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка ν , c_1 , c_2 — произвольные постоянные. Как видно из второго соотношения (3.6) и (3.7), условие $f'' = 0$ не может быть удовлетворено на внешней границе пограничного слоя, поскольку функции J_1 , Y_1 осциллируют при $z \rightarrow +\infty$. Так же как в задаче о турбулентном течении в канале [11], поставим условия равенства нулю турбулентного трения на внешней границе пограничного слоя при $\eta = 1$ и $f'' = \infty$ на стенке. Это дает

$$\eta = c_1 z J_1(z), \quad f' = \frac{2c_1}{\kappa^2} \int_{j_{0,1}}^z J_0(z) \frac{dz}{z}$$

$$-\langle u'v' \rangle = [U_e \Lambda c_1 J_0(z)/\kappa]^2, \quad c_1 = [j_{0,1} J_1(j_{0,1})]^{-1}, \quad 0 < z \leq j_{0,1}$$

$$F_1 = \frac{c_1}{\kappa} = 1,95, \quad F_2 = \ln \left(\frac{2}{c_1 j_{0,1}^2} \right) + 2 \int_0^{j_{0,1}} (1 - J_0(z)) \frac{dz}{z} = 0,37$$

Здесь $j_{0,1} = 2,408$ — первый корень функции J_0 . Поскольку в этом случае $A = 1,04$, полученное решение сильно отличается от экспериментальных данных, что можно объяснить неприменимостью формулы Кармана вблизи внешней границы пограничного слоя.

4. Пристеночная область. В вязкой пристеночной области пограничного слоя решение будем искать в переменных стенки

$$\frac{u}{U_e} = \Psi_\eta = \sqrt{\frac{c_f(\xi)}{2}} u_+(\xi, y_+) \quad (4.1)$$

$$y_+ = \frac{y U_e}{\nu} \sqrt{\frac{c_f(\xi)}{2}} = \sqrt{\frac{c_f(\xi)}{2}} e^{\xi} \eta$$

После подстановки (4.1) в уравнение (1.3) и предельного перехода при $\xi \rightarrow \infty$ для первого члена разложения $U_+ = u_+ + O(e^{-\xi})$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(y_+ U_+)'{}^2 T(0, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{N-1}) + U_+' = 1$$

$$\Pi_0 = (y_+^2 U_+)'{}^{-1}, \quad \Pi_n = (-y_+)^n U_+^{(n+1)} (n! U_+)'{}^{-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (4.2)$$

Для уравнения N -го порядка (4.2) имеется только одно граничное условие на стенке $U_+(0) = 0$. Покажем теперь, что если многочлен (2.7) есть полином Гурвица, то (4.2) имеет единственное решение с логарифмической асимптотикой на ∞ . Перейдем к новым переменным t и ψ

$$y_+ = e^t, \quad U_+' = (Ky_+)^{-1} [1 + \psi(t)] \quad (4.3)$$

Логарифмической асимптотике скорости на внешней границе пристеночной области соответствует $\psi(+\infty) = 0$. Подстановка (4.3) в (4.2) и переход к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и $\psi \rightarrow 0$ дают

$$P_{N-1} \left(-\frac{d}{dt} \right) \psi = - (a_0 K^2 + K^{-1}) e^{-t} + \Psi \quad (4.4)$$

Здесь через Ψ обозначены члены второго порядка и выше относительно e^{-t} , $\psi^{(n)}$, $0 \leq n \leq N-2$, многочлен $P_{N-1}(-x)$ в (4.4) задается выражением (2.7). Имеется частное решение уравнения (4.4) ψ_0 , асимптотика которого в общем случае, если 1 является корнем кратности i , $0 \leq i \leq N-1$ многочлена $P_{N-1}(x)$, имеет вид

$$\psi_0 = -\frac{1 + a_0 K^3}{K P_{N-1}^{(i)}(1)} t^i e^{-t} + O(e^{(\alpha-2)t}), \quad \alpha \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.5)$$

Пусть теперь $P_{N-1}(x)$ — полином Гурвица. Тогда все корни характеристического многочлена уравнения (4.4) $P_{N-1}(-x)$ лежат в правой полуплоскости, решение ψ_0 абсолютно неустойчиво и, следовательно, является единственным решением уравнения (4.4) стремящимся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Проинтегрировав (4.5) с учетом (4.3), получим

$$U_+ = \frac{1}{K} [\ln y_+ + C + O(y_+^{-1} \ln' y_+)], \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad y_+ \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Соотношения (2.10), (4.6) представляют собой известный логарифмический закон для профиля скорости. Из (4.6) следует, что K есть постоянная Кармана κ . В соответствии с экспериментальными данными постоянную интегрирования C в (4.6) положим равной 2,05.

Логарифмическую в главном члене асимптотику продольной скорости вблизи стенки можно получить по методу [12, 13], исходя из более общих предположений, согласно которым распределение осредненной скорости в данном сечении турбулентного пограничного слоя определяется плотностью и вязкостью жидкости, напряжением трения на стенке, расстоянием от нее и толщиной слоя. Однако строгие рассуждения в этом случае приводят к асимптотическому разложению $U_+ = \kappa^{-1} [\ln y_+ + o(\ln y_+)]$, $y_+ \rightarrow \infty$, оценка остаточного члена в котором является слишком грубой.

5. Сращивание решений. Решения для внешней и пристеночной областей пограничного слоя содержат две неизвестные функции: производную от толщины слоя по продольной координате $\Lambda(\xi)$ и коэффициент трения на пластине $c_f(\xi)$, которые могут быть найдены в результате асимптотического сращивания решений в двух областях. Коэффициент трения на пластине будем искать в виде

$$\sqrt{\frac{1}{2} c_f} = t_1 \xi^{-1} + t_2 \xi^{-2} \ln \xi + t_3 \xi^{-2} + t_4 \xi^{-3} \ln^2 \xi + t_5 \xi^{-3} \ln \xi + O(\xi^{-3}) \quad (5.1)$$

Перейдем в выражении (4.1) для продольной скорости в пристеночной области от переменной стенки y_+ к внешней переменной η и разложим в ряд по малому параметру ξ^{-1} до члена порядка $\xi^{-3} \ln \xi$ включительно с помощью асимптотического представления (4.6). Согласно принципу асимптотического сращивания, это разложение должно быть равно асимптотическому представлению продольной скорости (2.13), полученному из решения для внешней области пограничного слоя

(2.1) при $\eta \rightarrow 0$. В результате для искомым семи величин $\lambda_1, \lambda_2, t_1, 1 \leq i \leq 5$, будем иметь семь алгебраических уравнений, решение которых есть

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \kappa / F_1, \quad t_1 = t_2 = t_4 = \kappa \\ t_3 &= \kappa (F_2 - C - \ln \kappa), \quad t_5 = 2\kappa (F_2 - C - \ln \kappa) - \kappa \end{aligned} \quad (5.2)$$

Связь между переменной ξ и продольной координатой x определим из (1.2), (1.6)

$$R_x = \frac{F_1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\xi} [1 - \xi^{-1} \ln \xi + O(\xi^{-1})] e^{\xi} d\xi = \frac{F_1}{\kappa} \xi [1 - \xi^{-1} \ln \xi + O(\xi^{-1})] e^{\xi} \quad (5.3)$$

Соотношения (1.6), (5.1), (5.3) с учетом выражений для коэффициентов рядов (5.2) дают искомое асимптотическое представление решения при больших значениях $\ln R_\Delta$.

Полученные параметрические представления для коэффициента трения, числа Рейнольдса и входящей в закон дефекта скорости функции Λ не пригодны для практических вычислений, поскольку при реальных числах Рейнольдса члены асимптотических рядов (1.6), (5.1), (5.3) убывают недостаточно быстро. Точность этих асимптотических разложений, однако, может быть существенно улучшена. Рассмотрим, например, ряд (5.1), который с учетом (5.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} c_f} &= \kappa \xi^{-1} + \kappa \xi^{-2} [\ln \frac{\xi}{\kappa} + F_2 - C] + \\ &+ \kappa \xi^{-3} [(\ln \frac{\xi}{\kappa} + F_2 - C - \frac{1}{2})^2 + O(1)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Перейдем к новому поперечному масштабу $\Delta_* = \Delta / \sigma$. Это соответствует замене переменной в (5.4) $\xi = \xi_* + \ln \sigma$. Поскольку значение постоянной F_2 в этом случае изменится по формуле (2.12), разложение (5.4) для новой переменной примет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} c_f} &= \kappa \xi_*^{-1} + \kappa \xi_*^{-2} [\ln \frac{\xi_*}{\kappa} + F_2 - \ln \sigma - C] + \\ &+ \kappa \xi_*^{-3} [(\ln \frac{\xi_*}{\kappa} + F_2 - \ln \sigma - C - \frac{1}{2})^2 + O(1)] \end{aligned}$$

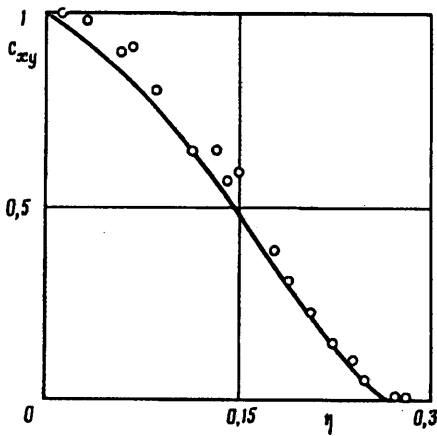
Отсюда следует, что подстановка $\xi = s + \ln(s/\kappa) + F_2 - C$ позволит исключить в разложениях (1.6), (5.1), (5.3) логарифмические члены. В результате получим

$$\Lambda = \frac{\kappa}{s F_1} [1 + O(s^{-1})], \quad \sqrt{\frac{1}{2} c_f} = \frac{\kappa}{s} [1 + O(s^{-2})] \quad (5.5)$$

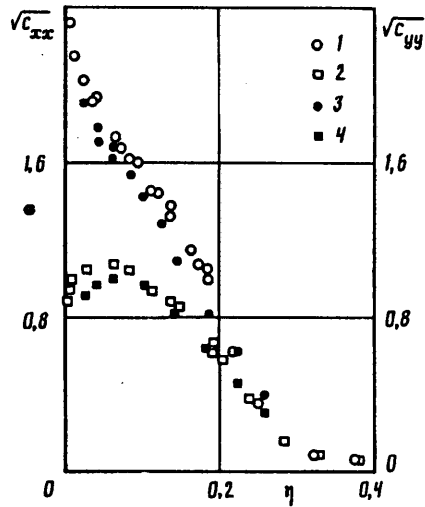
$$R_\Delta = \frac{s}{\kappa F_1} \exp(s + A - C), \quad R_x = \left(\frac{s}{\kappa}\right)^2 \exp(s + A - C) [1 + O(s^{-1})], \quad s \rightarrow \infty$$

Полученные результаты останутся в силе, если в качестве исходной при построении разложений (1.6), (2.1), (4.1) использовать систему полных уравнений Рейнольдса и гипотезу замыкания (1.1) для всех компонент тензора турбулентных напряжений. Члены уравнений Рейнольдса, которые не учитываются теорией пограничного слоя, сказываются в разложениях (1.6), (2.1) только на величинах порядка ξ^{-2} . Построенное решение, таким образом, есть асимптотическое решение уравнений Рейнольдса, имеющее при $\xi \rightarrow +\infty$ ту же точность, что и уравнения пограничного слоя.

6. Расчетные формулы и правила подобия. Окончательный вид формул для распределения продольной скорости и компонент тензора Рейнольдса во внешней области пограничного слоя, а также чисел Рейнольдса, образованных по толщине



Фиг. 1



Фиг. 2

слоя и расстоянию от передней кромки пластины, получим, переходя в (5.5) к малому параметру $\sqrt{1/2c_f}$

$$\left(1 - \frac{u}{U_s}\right) \sqrt{\frac{2}{c_f}} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O(\sqrt{c_f}) \quad (6.1)$$

$$c_{xy} = -\frac{2\langle u'v' \rangle}{U_s^2 c_f} = 1 + \frac{f(\eta) - \eta^2}{F_1^2} + O(\sqrt{c_f}) \quad (6.2)$$

$$c_{xx} = \frac{2\langle u'^2 \rangle}{U_s^2 c_f} = G_1(\eta) + O(\sqrt{c_f}) \quad (6.3)$$

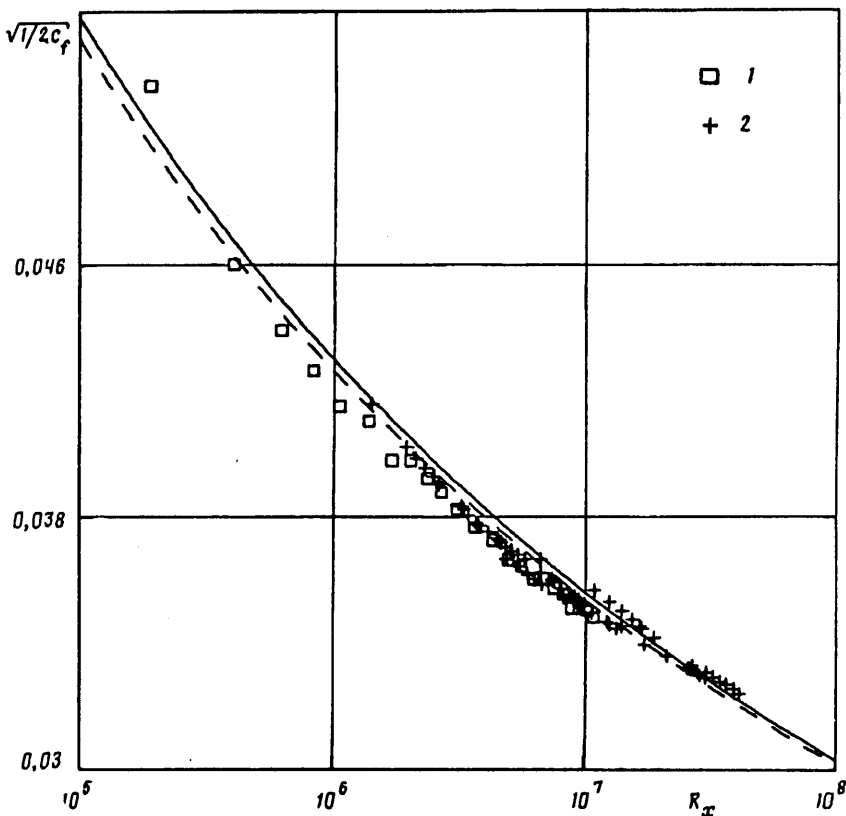
$$c_{yy} = \frac{2\langle v'^2 \rangle}{U_s^2 c_f} = G_2(\eta) + O(\sqrt{c_f}) \quad (6.4)$$

$$R_\Delta = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f}} + A - C\right) \left[\frac{1}{F_1} + O(c_f)\right] \quad (6.5)$$

$$R_x = 2c_f^{-1} \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f}} + A - C\right) [1 + O(\sqrt{c_f})] \quad (6.6)$$

Правила подобия (6.2)–(6.4), в которых G_1 и G_2 — некоторые универсальные функции поперечной координаты, следуют из (6.1) и гипотезы замыкания (1.1). Выражение, стоящее в правой части (6.2), получено из уравнения (2.4).

Соотношение (6.1) представляет собой известный закон дефекта скорости. Интегрируя (6.1) по η от 0 до ∞ , будем иметь $\Delta = \delta_c F_1^{-1} [1 + O(\sqrt{c_f})]$, где $\delta_c = \delta^* \sqrt{2/c_f}$ — толщина пограничного слоя, введенная в [9], δ^* — толщина вытеснения. Коэффициент F_1 связан только со способом определения толщины пограничного слоя и может быть положен равным единице, если принять $\Delta = \delta_c$. В этом случае экспериментальное значение постоянной A , характеризующей асимптотику профиля скорости во внешней области пограничного слоя, по данным [9], равно 0,24.



Фиг. 3

Для задания функции f' можно использовать эмпирическую формулу Коулса [14], которая при нулевом градиенте давления на пластине имеет вид

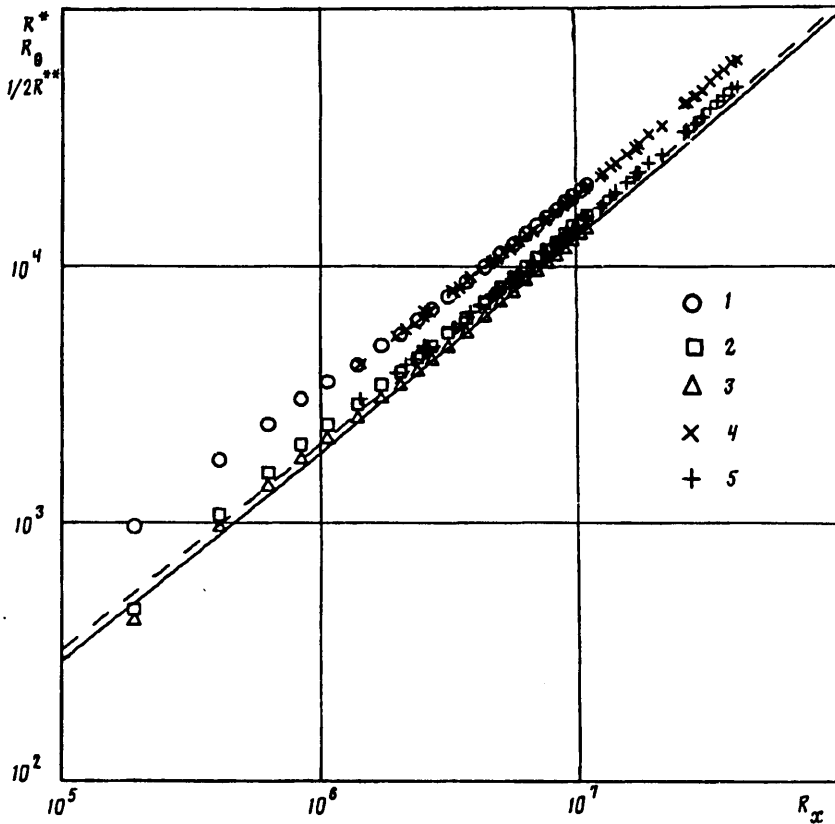
$$\frac{f'(\eta)}{F_1} = \frac{1}{\kappa} [\ln \eta - 0,55 (1 + \cos(\pi\eta))] \quad (6.7)$$

Причем величина Δ выбирается как расстояние от стенки δ , на котором продольная составляющая осредненной скорости на 0,5% отличается от U_e . В этом случае $F_1 = 1,55/\kappa$, $F_2 = -1,1$, $A = 0,23$.

На фиг. 1 экспериментальный профиль касательного напряжения [15], построенный в переменных подобия (6.2), сопоставлен с расчетной кривой, соответствующей правой части формулы (6.2), в которой функция f' задана выражением (6.7). В качестве поперечного масштаба здесь и на фиг. 2 используется толщина пограничного слоя Клаузера δ_c , так что $\eta = y \sqrt{1/2c_f} / \delta_c^*$. Удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных на фиг. 1 с учетом того, что формула Коулса, как известно, хорошо описывает экспериментальный профиль скорости, подтверждает справедливость полученного в настоящей работе приближенного уравнения (2.2).

На фиг. 2 даны экспериментальные значения среднеквадратичных пульсаций продольной и поперечной составляющих скорости из работ [15] (точки 1 и 2) и [16] (точки 3 и 4). В соответствии с (6.3), (6.4) полученные при различных условиях профили компонент тензора турбулентных напряжений в переменных подобия описываются едиными универсальными кривыми.

Равенство (6.5) представляет собой закон трения Кармана. Асимптотическое представление (6.6) для распределения коэффициента трения на пластине с



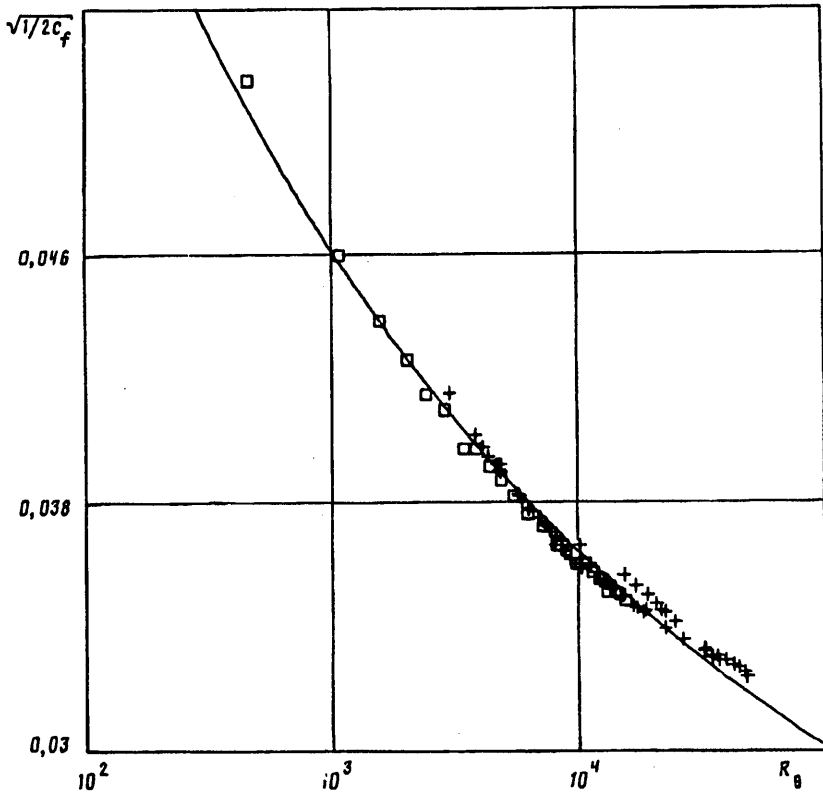
Фиг. 4

точностью до бесконечно малых более высокого порядка совпадает с аналогичной зависимостью, полученной в [17] другим методом. На фиг. 3 формула (6.6) (сплошная линия) сопоставлена с экспериментальными данными [18] (1) и [19] (2). В [18] трение на пластине определялось на основе интегральных характеристик пограничного слоя, в [19] — измерялось непосредственно. Как видно из фиг. 3, (6.6) дает несколько завышенные значения коэффициента трения почти во всем диапазоне измерений.

В рамках построенного асимптотического решения интегральные характеристики пограничного слоя могут быть определены лишь в главном приближении, для которого толщины вытеснения и потери импульса совпадают между собой и ровно в 2 раза меньше толщины потери энергии (первый и второй формпараметры равны 1 и 2 соответственно). Уравнения пограничного слоя для рассматриваемой задачи, как показано выше, имеют при $\xi \rightarrow +\infty$ тот же порядок точности и поэтому также не позволяют вычислить правильные значения формпараметров. Из (6.1) для чисел Рейнольдса, образованных по толщинам вытеснения (R^*), потери импульса R_0 и энергии (R^{**}), получим

$$R^* \approx R_0 \approx \frac{1}{2} R^{**} = \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f}} + A - C\right) [1 + O(\sqrt{c_f})] \quad (6.8)$$

На фиг. 4 экспериментальные данные [18, 19] по распределению интегральных параметров сопоставлены с расчетной кривой (сплошная линия), построенной по формулам (6.6), (6.8). На фиг. 4 точки 1—3 отвечают значениям R^* , R_0 и $1/2R^{**}$ [18], 4, 5 — R^* , R_0 [19]. Полученные асимптотические соотношения для



Фиг. 5

распределения толщин потери импульса и энергии находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Равенство (6.8) допускает простое явное выражение для коэффициента трения

$$\sqrt{\frac{1}{2} c_f} = \kappa (\ln R_0 + C - A)^{-1} + O[(\ln R_0)^{-3}] \quad (6.9)$$

которое на фиг. 5 сопоставлено с экспериментальными данными [18, 19], обозначения те же, что на фиг. 3. Согласование экспериментальных и расчетных значений хорошее. Как видно из фиг. 3 и 5, зависимость (6.9) лучше, чем (6.6), описывает результаты измерений. Из (6.6), однако, может быть получено новое соотношение, имеющее более высокую точность в области малых чисел Рейнольдса.

После замены переменной $z = 2/c_f$, приведем (6.4) к виду

$$\frac{1}{R_x(z)} = z^{-1} \exp(-\kappa \sqrt{z} + C - A) [1 + O(z^{-1/2})], \quad z \rightarrow \infty \quad (6.10)$$

Предположим, что $1/R_x(z)$, которую будем рассматривать как аналитическую функцию комплексной переменной z , есть изображение по Лапласу некоторой функции $r(t)$, $t \geq 0$. Применяя к (6.10) обратное преобразование Лапласа [20], получим асимптотику $r(t)$ при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r(t) &= \operatorname{Erfc} \left(\frac{1}{2} \kappa t^{-1/2} \right) e^{C-A} + O \left[t^{3/2} \exp \left(-\frac{\kappa^2}{4t} \right) \right] = \\ &= \exp \left(-\frac{\kappa^2}{4t} + C - A \right) [2\pi^{-1/2} \kappa^{-1} t^{1/2} + O(t^{3/2})], \quad t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь $\text{Erfc}(x)$ — интегральная функция ошибок. Последнее выражение (6.11) получено в результате замены функции ошибок ее асимптотическим представлением. Применим ко второму равенству (6.11) оператор Лапласа. Это дает другой вид асимптотики функции $1/R_x(z)$ на бесконечности

$$\frac{1}{R_x(z)} = \frac{1 + \kappa \sqrt{z}}{\kappa z^{3/2}} \exp(-\kappa \sqrt{z} + C - A) [1 + O(z^{-1/2})], \quad z \rightarrow \infty$$

Отсюда, возвращаясь к переменной c_f , получим

$$R_x = \frac{2 \sqrt{2} \kappa}{\kappa \sqrt{2} c_f + c_f^2} \exp\left(\kappa \sqrt{\frac{2}{c_f}} + A - C\right) [1 + O(\sqrt{c_f})] \quad (6.12)$$

Зависимости, соответствующие формуле (6.12), даны на фиг. 3, 4 штриховыми линиями. Как видно из фиг. 3, это соотношение удовлетворительно описывает распределение коэффициента трения на пластине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yajnik K. S.* Asymptotic theory of turbulent shear flows // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 42. Pt 2. P. 411—427.
2. *Bush W. B., Fendell F. E.* Asymptotic analysis of turbulent channel and boundary-layer flow // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. Pt 4. P. 657—681.
3. *Пономарев В. И.* Асимптотический анализ турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. Вып. 3. С. 42—50.
4. *Сычев В. В., Сычев Вик. В.* О структуре турбулентного пограничного слоя // ПИММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 593—599.
5. *Melnik R. E.* An asymptotic theory of turbulent separation // *Computers and Fluids.* 1989. V. 17. № 1. P. 165—184.
6. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 472 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
9. *Clauser F. H.* The turbulent boundary layer // *Advan. Appl. Mech.* V. 4. N. Y.: Acad. Press, 1956. P. 1—51.
10. *Escudier M. P.* The distribution of the mixing length in turbulent flows near walls // *Rep. TWF/TN/1.* L.: Imperial College, Mech. Eng. Dep., 1965.
11. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
12. *Изахсон А. А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 7. С. 919—924.
13. *Millikan C. B.* A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes // *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.* N. Y.: Wiley, 1939. P. 386—392.
14. *Coles D.* The law of the wake in the turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. Pt 2. P. 191—226.
15. *Klebanoff P. S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // *NACA Rep.* 1954. № 1247. 19 p.
16. *Corrsin S., Kistler A. L.* Free-stream boundaries of turbulent flows // *NACA Rep.* 1955. № 1244. 32 p.
17. *Cebeci T., Smith A. M. O.* Analysis of turbulent boundary layers. N. Y.: Acad. Press, 1974. 404 p.
18. *Wieghardt K.* Zum Reibungswiderstand rauher Platten // UM 6612. Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung. Göttingen. 1944. (см. также: *Coles D., Hirst E. A.* Computation of turbulent boundary layers // AFORS-IFP-Stanford Conf., 1968. V. 2. Stanford Univ., 1969. 519 p.).
19. *Smith D. W., Walker T. H.* Skin-friction measurements in incompressible flow // *NASA R-26.* 1959. 35 p.
20. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.11.1992