

УДК 532.545

© 1993 г. Ю. А. БУЕВИЧ

ВНУТРЕННИЕ ПУЛЬСАЦИИ В ПОТОКАХ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЙ

В однородных [1, 2] и в сдвиговых [3, 4] течениях суспензий даже очень мелких частиц последние вовлечены в хаотическое пульсационное движение чисто гидродинамического происхождения. Это движение влияет на процессы переноса и участвует в формировании реологических свойств суспензии. Особенно важную роль играет появление обусловленных пульсациями нормальных напряжений в диспергированной фазе, описывающих ее сопротивление сжатию. Введение этих напряжений позволяет устранить основную принципиальную трудность современной гидромеханики суспензий [5] и тем самым дает возможность конструктивно решать конкретные задачи [6]. Феноменологически такие напряжения вводились неоднократно (см., например, [7, 8]), но их последовательная теория отсутствует до сих пор. Это связано с отсутствием четкого понимания физического механизма генерации внутренних пульсаций и приводит к тому, что до самого последнего времени указанные напряжения (или эффективные модули упругости диспергированной фазы) постулируются на чисто эмпирической основе [9].

В действительности причина возникновения хаотических «псевдотурбулентных» пульсаций фаз в потоке суспензии была указана более 20 лет назад (см., например, [10]). Она состоит в подкачке энергии к псевдотурбулентному движению от среднего относительного потока жидкой фазы за счет работы последнего на случайных флуктуациях концентрации, обусловленной нелинейностью силы межфазного взаимодействия по концентрации. Ниже приведены результаты расчетов для случая мелкодисперсной суспензии, когда обмен импульсом и энергией между отдельными частицами осуществляется исключительно через посредство окружающей жидкости, т. е. роль прямых столкновений между частицами в этом процессе исчезающе слаба. Результаты позволяют не только вычислить среднеквадратичные характеристики псевдотурбулентности и, в частности, найти напряжения в диспергированной фазе, но и дать естественное объяснение явлениям, наблюдаемым в экспериментах по седиментации и гидродинамической самодиффузии частиц в монодисперсных суспензиях.

1. Уравнения для пульсаций. Среди всего многообразия дисперсий можно выделить два основных типа, различающихся механизмом коллективных гидродинамических взаимодействий взвешенных частиц. Если частицы достаточно малы (коллоиды, мелкодисперсные суспензии), то повышения давления в тонких жидких прослойках между сближающимися частицами достаточно для предотвращения столкновений. Поэтому частицы взаимодействуют только через случайные поля давления и скорости в жидкости. Во втором предельном случае, напротив, обмен импульсом и энергией обусловлен межчастичными столкновениями (суспензии крупных частиц, большинство газовзвесей и псевдооживленных слоев). Недавно условия реализации этих механизмов были рассмотрены в [11] на примере разреженных газовзвесей. Ниже без дальнейших комментариев исследуем лишь суспензии первого типа.

Представляем истинные объемную концентрацию суспензии, давление жидкости, а также скорости частиц и жидкости в промежутках между ними как суммы соответствующих средних значений и флуктуаций с нулевыми средними, т. е. $\varphi + \varphi'_{\nu}$, $p + p'_{\nu}$, $w + w'_{\nu}$ и $v + v'_{\nu}$. Эти флуктуации могут быть определены путем ансамблевого усреднения или усреднения по некоторому объему V , содержащему много частиц. Уравнения сохранения массы и импульса жидкой фазы приводят тогда к следующим уравнениям для флуктуаций:

$$(\partial/\partial t + \mathbf{u} \nabla) \varphi_V' = \varepsilon \nabla v_V', \quad \varepsilon = 1 - \varphi, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$$

$$\varepsilon \rho_0 (\partial/\partial t + \mathbf{u} \nabla) v_V' = -\nabla p_V' + \eta \Delta v_V' - n f_V' \quad (1.1)$$

Здесь использована система координат, связанная со средним движением диспергированной фазы, флуктуации скорости считаются относительно малыми, η — эффективная вязкость суспензии, ρ_0 и ρ_1 — плотности жидкости и материала частиц, которые считаются несжимаемыми, n — числовая концентрация частиц. Величина $n f_V'$ представляет собой сумму пульсационных сил, действующих со стороны жидкости на все частицы в объеме V , деленную на среднее число $\langle N_V \rangle$ частиц в этом объеме.

Дополняющее систему (1.1) уравнение сохранения импульса диспергированной фазы в ее псевдотурбулентном движении можно получить, суммируя уравнения Ланжевена для частиц внутри V

$$\varphi \rho_1 (\partial w_V' / \partial t) = n f_V' \quad (1.2)$$

Замыкание уравнений производим при помощи самосогласованной модели реологических свойств суспензии, как это сделано в [5, 6]. Для упрощения пренебрегаем всеми составляющими силы межфазного взаимодействия, кроме вызванных вязким сопротивлением и плавучестью. В этом случае

$$\eta = \eta_0 K(\varphi), \quad K(\varphi) = (1 - \varphi)^{-5/2}$$

$$f_V' = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \left[\frac{1}{\tau} \left(K u_V' + \frac{dK}{d\varphi} \varphi_V' u \right) - (\kappa - 1) \varphi_V' g \right], \quad u_V' = v_V' - w_V' \quad (1.3)$$

$$\tau = \frac{2a^2}{9\nu_0}, \quad \nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho_0}, \quad \kappa = \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

где η_0 — вязкость чистой жидкости, g — ускорение поля внешних массовых сил, a — радиус частиц.

Естественно применять к решению уравнений (1.1)—(1.3) математический аппарат корреляционной теории стационарных случайных процессов, в соответствии с которой любая случайная величина с нулевым средним представляется в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса с соответствующей случайной мерой, а все двухточечные двухвременные корреляционные функции выражаются в форме обычных интегралов, содержащих соответствующие спектральные плотности, по оси частот и по всему волновому пространству [12].

Тогда из (1.1)—(1.3) следует система линейных алгебраических уравнений, позволяющая выразить случайные меры всех флуктуаций через случайную меру $dZ_{\varphi, V}$ флуктуаций концентрации. Для замыкания теории необходимо, следовательно, независимое представление для спектральной плотности последних флуктуаций. Их дисперсию (т. е. одноточечную одновременную корреляционную функцию) найдем на основе теории термодинамических флуктуаций, согласно которой [13]

$$\langle N_V'^2 \rangle = kT \left(\frac{\partial \mu}{\partial \langle N_V \rangle} \right)_{T, V}^{-1} \quad (1.4)$$

где μ — термодинамический потенциал Гиббса системы взвешенных частиц, отнесенный к одной частице. Указанная система в рассматриваемом случае аналогична раствору частиц в жидкости, играющей роль растворителя [5]. Химический потенциал μ таких частиц был вычислен в [5] при помощи одного из вариантов теории Перкуса — Йевики плотных газов. Учитывая, что по определению

$$\varphi + \varphi_V' = 4/3 \pi a^3 (\langle N_V \rangle + N_V') / V$$

в результате вычисления на основе (1.4) и результата из [5] имеем

$$\langle \varphi_v'^2 \rangle = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi} \left[1 + 2\varphi \frac{4 - \varphi}{(1 - \varphi)^4} \right]^{-1} \frac{1}{\langle N_v \rangle}. \quad (1.5)$$

Спектральная плотность флуктуаций концентрации на основании теории из [14] может быть приближенно записана так

$$\Psi_{\varphi, \varphi}^{(v)}(\omega, k) = \lim_{d\omega, dk \rightarrow 0} \frac{\langle dZ_{\varphi, v} dZ_{\varphi, v}^* \rangle}{d\omega dk} = \frac{kDk}{\pi} \frac{\Phi H(k_0 - k)}{\omega^2 + (kDk)^2} \quad (1.6)$$

$$\Phi = \frac{3}{4\pi k_0^3}, \quad k_0 = \left(\frac{9\pi\varphi}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{a}$$

где D — тензор коэффициентов самодиффузии частиц, а $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Формула (1.6) соответствует представлениям об обрыве коротковолновой части спектра концентрационных флуктуаций в волновом пространстве (критическое волновое число k_0) и о том, что расплывание этих флуктуаций управляется обычным уравнением диффузионного типа. Приближенность этой формулы вообще не сказывается на проводимом ниже вычислении статистических характеристик псевдотурбулентности, для которого нужна лишь дисперсия (1.5). Исключение составляет только определение компонент тензора D , которое по необходимости оказывается приближенным.

Для случайных мер из (1.1)–(1.3) следуют уравнения

$$(\omega + uk) dZ_{\varphi, v} = \epsilon k dZ_{u, v}$$

$$i\epsilon\rho_0(\omega + uk) dZ_{u, v} = i\varphi\rho_1\omega dZ_{w, v} = -ikdZ_{p, v} - \eta k^2 dZ_{u, v} \quad (1.7)$$

$$dZ_{u, v} - dZ_{w, v} = -[(d \ln K / d\varphi) u - (\kappa - 1) \tau g] dZ_{\varphi, v}$$

При записи этих уравнений инерцией частиц пренебрегали по сравнению с пульсациями сил вязкого взаимодействия и плавучести. Это необходимо делать, поскольку в самой силе межфазного взаимодействия пренебрегли составляющими, имеющими инерционное происхождение (эффектом присоединенной массы, плавучестью, связанной с ускорением диспергированной фазы, наследственной силой Бассе). При необходимости все указанные составляющие можно учесть, используя, например, их выражения, приведенные в [5].

Все флуктуации, относимые к объему V , представляют собой однотипные суммы соответствующих величин, ассоциируемых с одной частицей и ее удельным объемом, по всем частицам внутри V . Если бы частицы были статистически независимы, то для таких сумм выполнялись бы требования справедливости центральной предельной теоремы теории вероятностей. Поэтому уравнения (1.7) были бы справедливы и для флуктуаций, связываемых с одной частицей и ее непосредственным окружением. Приближенно это же утверждение справедливо и при наличии корреляционных связей в поведении соседних частиц. Поэтому далее опускаем нижний индекс V в обозначении флуктуаций и их случайных мер, подразумевая под dZ_w и dZ_p , dZ_p случайные меры пульсации скорости одной частицы и флуктуаций скорости и давления жидкости в пределах ее мгновенного удельного объема соответственно. Соответствующая флуктуация концентрации может быть элементарным образом выражена через флуктуацию свободного объема этой частицы, а для ее дисперсии по-прежнему справедлива формула (1.5), в которой принято формально $\langle N_v \rangle = 1$. Как нетрудно видеть, сохраняется с заменой $\langle \varphi_v'^2 \rangle$ на $\langle \varphi'^2 \rangle$ и формула (1.6) для спектральной плотности концентрационных флуктуаций.

2. Свойства псевдотурбулентности. Уравнения (1.7) легко решаются. Однако последующие расчеты статистических характеристик пульсаций оказываются в общем случае весьма громоздкими. Чтобы максимально упростить выкладки без ущерба для физического содержания работы и единственно с этой целью, пред-

ставим реальное псевдотурбулентное движение в виде суперпозиции двух составляющих с разными временными масштабами.

Пульсации скорости и давления жидкости описываем как суммы двух составляющих, первая из которых связана с ускорением частицы с флуктуирующими свободным объемом случайной силой f' , определенной в (1.3), а вторая обусловлена только необходимостью соблюдения закона сохранения массы (объема) в случайном поле мгновенной локальной концентрации. Без ограничения общности первую составляющую можно считать соленоидальной. Временной масштаб для нее определяется, очевидно, временем релаксации частицы в концентрированном облаке других таких же частиц, т. е. $\tau^{(1)} \approx \tau/K \sim a^2$. Временной масштаб второй составляющей должен совпадать с временем жизни флуктуации концентрации, т. е. $\tau^{(2)} \approx a^2/D \sim a/u \sim a^{-1}$. Поскольку $\tau^{(1)}/\tau^{(2)} \sim a^3$, то следует ожидать, что имеется достаточно широкий класс суспензий мелких частиц, для которых $\tau^{(1)}/\tau^{(2)} \ll 1$, т. е. существенно анизотропные пульсации первого типа оказываются значительно более быстрыми, чем пульсации второго типа.

Как следует из апостериорной оценки, приводимой ниже, такое ожидание оказывается совершенно справедливым. Оно позволяет пренебречь uk по сравнению с частотой ω , а также не учитывать вязкостный член во втором уравнении (1.7) при исследовании пульсаций первого типа и использовать квазистационарное приближение (т. е. пренебрегать членами с ω) в анализе пульсации второго типа. Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \omega dZ_v^{(1)} - k\rho_1^{-1} dZ_p^{(1)} &= \omega h B dZ_\varphi, \quad k dZ_v^{(1)} = 0 \\ i(\mathbf{uk}) \varepsilon \rho_0 dZ_v^{(2)} &= -ik dZ_p^{(2)} - \eta k^2 dZ_v^{(2)}, \quad k dZ_v^{(2)} = \varepsilon^{-1}(\mathbf{uk}) dZ_\varphi \\ B &= \frac{d \ln K}{d\varphi} \mathbf{u} - \frac{(\kappa - 1) \tau}{K} \mathbf{g}, \quad h = \frac{\kappa \varphi}{1 + (\kappa - 1) \varphi} \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате получаем, в частности

$$dZ_v = -\left\{ h \left[B - \frac{(\mathbf{Bk}) \mathbf{k}}{k^2} \right] - \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\mathbf{uk}) \mathbf{k}}{k^2} \right\} dZ_\varphi \quad (2.2)$$

$$dZ_w = \left\{ \left[(1 - h) B + h \frac{(\mathbf{Bk}) \mathbf{k}}{k^2} \right] + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\mathbf{uk}) \mathbf{k}}{k^2} \right\} dZ_\varphi$$

Нетрудно записать также выражение для случайной меры флуктуаций давления жидкости, а также представления для всех спектральных плотностей, которые оказываются, естественно, пропорциональными спектральной плотности в (1.6).

Среднюю силу, действующую на одну частицу со стороны жидкости, в рассматриваемом приближении можно представить в форме

$$\langle f \rangle = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \left\{ \lambda K \frac{\mathbf{u}}{\tau} - [1 + (\kappa - 1) \varphi] \mathbf{g} \right\} \quad (2.3)$$

$$\lambda = 1 + \frac{d \ln K}{d\varphi} \frac{\langle \varphi' u' \rangle}{u} + \frac{1}{2K} \frac{d^2 K}{d\varphi^2} \langle \varphi'^2 \rangle \quad (2.4)$$

Здесь коэффициент λ вычислен с точностью до членов второго порядка по флуктуациям. В однородном стационарном состоянии суспензии векторная сумма веса частиц и силы (2.3) должна обращаться в нуль. Это приводит к следующей формуле для средней скорости межфазового скольжения u :

$$\mathbf{u} = -(\varepsilon/\lambda K) \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_0 = (\kappa - 1) \tau \mathbf{g} \quad (2.5)$$

где \mathbf{w}_0 — скорость оседания одиночной частицы в неограниченной жидкости. В указанном состоянии из (2.1) и (2.5) имеем

$$\mathbf{B} = A \mathbf{u}, \quad A = \frac{d \ln K}{d\varphi} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (2.6)$$

что полностью определяет случайные меры в (2.2).

В рассматриваемом однородном состоянии полные объемные потоки фаз выражаются в следующем виде:

$$Q_0 = \varepsilon v + \langle \varepsilon' v' \rangle = \varepsilon v + \alpha_0 u, \quad Q_1 = \varphi w + \langle \varphi' w' \rangle = \varphi w + \alpha_1 u \quad (2.7)$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{2}{3} hA - \frac{1}{3\varepsilon} \right) \langle \varphi'^2 \rangle, \quad \alpha_1 = \left[\left(1 - \frac{2}{3} h \right) A + \frac{1}{3\varepsilon} \right] \langle \varphi'^2 \rangle$$

Для средних квадратов компонент пульсационных скоростей после вычисления получаем

$$\begin{aligned} \langle v_{\parallel}^2 \rangle &= V^2 u^2, \quad \langle w_{\parallel}^2 \rangle = W^2 u^2, \quad \langle v_{\perp}^2 \rangle = \langle w_{\perp}^2 \rangle = R^2 u^2 \\ V^2 &= \left[h^2 A^2 + \frac{2}{3} hA \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{5} \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \right] \langle \varphi'^2 \rangle \\ W^2 &= \left[(1-h)^2 A^2 + \frac{2}{3} (1-h) A \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{5} \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \right] \langle \varphi'^2 \rangle \\ R^2 &= \frac{1}{15} \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \langle \varphi'^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

Функция φ'^2 определена в (1.5) при $N_v = 1$, величина h — в (2.1), а величина A — в (2.6), причем для λ из (2.4) и (2.7) получаем простое уравнение, решение которого дает

$$\lambda = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d \ln K}{d\varphi} \langle \varphi'^2 \rangle \right)^{-1} \left\{ 1 - \left[\left(\frac{d \ln K}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2K} \frac{d^2 K}{d\varphi^2} \right] \langle \varphi'^2 \rangle \right\} \quad (2.9)$$

В (2.8) введены продольная (вдоль вектора u) и поперечные компоненты пульсационных скоростей. Продольные компоненты оказываются значительно интенсивнее поперечных, причем среднеквадратичные поперечные скорости одинаковы для частиц и жидкости. В рассматриваемом однородном состоянии псевдотурбулентность аксиально-симметрична. Однако, поскольку случайные меры (2.2) зависят от двух векторов: u и g , этого нельзя сказать о псевдотурбулентности в произвольном течении суспензии.

3. Влияние пульсаций на реологию суспензий. Рассмотрим сначала оседание частиц в макроскопически однородной неподвижной в целом суспензии. Условие неподвижности означает, что $Q_0 + Q_1 = 0$ и $(\varepsilon + \alpha_0 + \alpha_1) u + w = 0$ (см. (2.7)). Это позволяет выразить скорость частиц через введенную в (2.5) скорость скольжения и определить тем самым скорость стесненного осаждения (седиментации) следующим образом:

$$w_s^{(1)} = \frac{\varepsilon (\varepsilon + \alpha_0 + \alpha_1)}{\lambda K} w_0 = \frac{\varepsilon + \alpha_0 + \alpha_1}{\lambda} w_s^0 \quad (3.1)$$

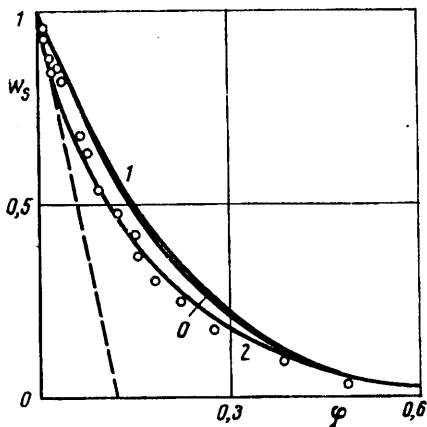
Эта величина представляет собой истинную среднюю скорость частиц в лабораторной системе координат, которую экспериментально можно получить путем стандартной обработки случайной траектории какой-либо выделенной частицы.

С другой стороны, можно ввести среднюю объемную скорость диспергированной фазы как целого при помощи очевидного равенства $\omega_s^{(2)} = Q_1 / \varphi$, что дает новую скорость осаждения

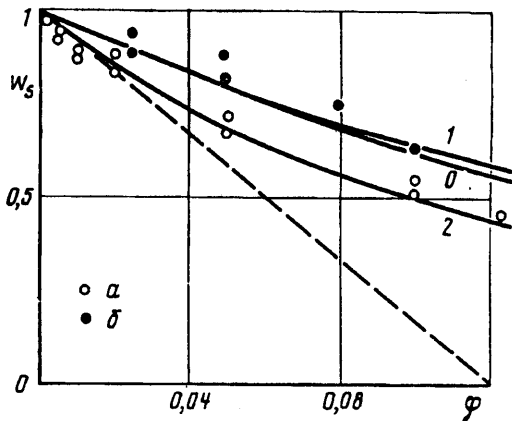
$$w_s^{(2)} = w_s^{(1)} + \frac{\alpha_1}{\varphi} u = \frac{\varepsilon + \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_1 / \varphi}{\varepsilon + \alpha_0 + \alpha_1} w_s^{(1)} \quad (3.2)$$

Для разбавленных суспензий (малые φ) отсюда следует

$$\frac{w_s^{(1)}}{w_0} = 1 - 4,5 \varphi + O(\varphi^2), \quad \frac{w_s^{(2)}}{w_0} = 1 - \frac{25}{3} \varphi + O(\varphi^2) \quad (3.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Можно показать, что во всем интервале физически приемлемых концентраций выполняется неравенство $\omega_s^{(1)} > \omega_s^{(2)} > \omega_s^{(0)}$, причем $\omega_s^{(0)}$ имеет, очевидно, смысл фиктивной скорости осаждения в суспензии, в которой пульсации вообще отсутствуют.

Безразмерные скорости седиментации, получаемые из (3.1)—(3.3), показаны на фиг. 1. Здесь же приведены данные опытов работы [15], часто используемые в качестве эталонных. Согласие между теорией и экспериментом представляется вполне удовлетворительным. Сплошные кривые для $w_s^{(1)}$, $w_s^{(2)}$ и $w_s^{(0)}$, отнесенных к w_0 ($w_s^{(i)} = w_s^{(i)}/w_0$), помечены на фиг. 1 индексами 1, 2 и 0, штриховая линия дает последнюю функцию (3.3).

В опытах обычно не проводится различия между разными методами определения скорости оседания, в чем можно усматривать одну из причин известного разброса экспериментальных данных. Эту скорость можно определять, либо измеряя фактически объемный поток диспергированной фазы (по скорости накопления осадка на дне сосуда, содержащего суспензию, или по скорости опускания верхней границы суспензии) [1, 15], либо же путем прослеживания траекторий отдельных частиц [2]. Ввиду существования дополнительных пульсационных потоков фаз такие эксперименты в принципе должны приводить к различным результатам. Дальнейшее подтверждение этой точки зрения содержится на фиг. 2, где изображены те же кривые, что и на фиг. 1, вместе с опытными результатами работ [1] и [2] (точки *a*, *b* соответственно).

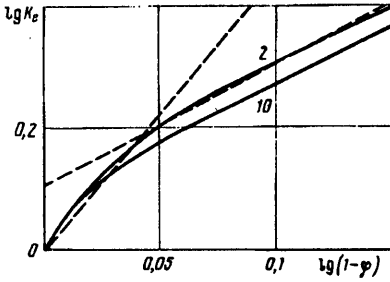
Пульсации влияют и на гидравлическое сопротивление, оказываемое частицами относительноному потоку жидкости. В экспериментах используют обычно вместо $u = v - w$ величину $Q_0/\varepsilon - Q_1/\varphi$. Из результатов, приведенных выше, сразу же следует

$$\lambda K u = K_e \left(\frac{Q_0}{\varepsilon} - \frac{Q_1}{\varphi} \right), \quad K_e = \lambda \left(1 + \frac{\alpha_0}{\varepsilon} - \frac{\alpha_1}{\varphi} \right)^{-1} \quad (3.4)$$

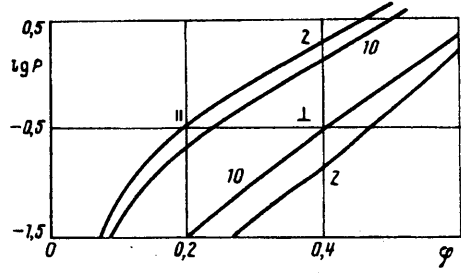
Экспериментально измеряемая величина K_e отличается от K , введенной в (1.3), причем это отличие зависит от отношения плотностей фаз κ . Функция K_e для $\kappa = 2$ и 10 (кривые 1, 2) представлена на фиг. 3.

Кроме того, на фиг. 3 приведены аппроксимирующие зависимости вида $K_e(\varphi) \sim (1 - \varepsilon)^{-n}$ с показателями $n = 4, 5$ и 2. Первая из них неплохо согласуется с теоретической в области малых концентраций и весьма близка к полученной в известных опытах Ричардсона и Заки для мелких частиц (показатель степени n в приведенной степенной формуле изменяется, по данным этих авторов, от 4,65 до 4,34 при увеличении числа Рейнольдса $Re = 2a u / \nu_0$ для частиц от 0 до 10). В области высоких концентраций лучшие результаты дает степенная аппроксимация с $n \approx 2,5$.

Рассмотрим теперь напряжения в диспергированной фазе, обусловленные пульсациями частиц. Физический смысл этих напряжений и их связь с диффу-



Фиг. 3



Фиг. 4

зионными явлениями в системе взвешенных частиц были подробно обсуждены в [5], где было получено

$$\sigma_{ij} = -\varphi L(\varphi) \rho_i \langle w_i' w_j' \rangle$$

$$L(\varphi) = 2 \frac{\ln(1-\varphi)}{\varphi} + 3 \frac{1-2\varphi}{1-\varphi} + \frac{\varphi}{2} \frac{15-8\varphi-\varphi^2}{(1-\varphi)^2} \quad (3.5)$$

Тензор дисперсий компонент пульсационной скорости частицы может быть вычислен на основе представлений (2.2) для случайных мер. В общем случае тензор σ не обязательно диагонален, но неизбежно становится таковым в ситуациях, когда псевдотурбулентность осесимметрична (векторы \mathbf{u} и \mathbf{g} коллинеарны). В рассматриваемых макроскопически однородных состояниях суспензии из (3.5) получаем для продольного и поперечного давлений диспергированной фазы

$$p_{||} = -\sigma_{11} = \varphi L(\varphi) W^2 \rho_i u^2, \quad p_{\perp} = -\sigma_{22} = -\sigma_{33} = \varphi L(\varphi) R^2 \rho_i u^2 \quad (3.6)$$

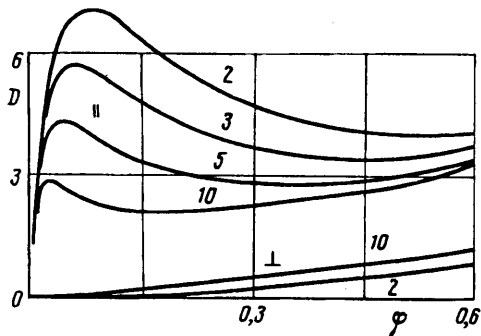
где W^2 и R^2 определены в (2.8). Зависимости безразмерных давлений $P = p/\rho_i u^2$ при разных κ (цифры у кривых) приведены на фиг. 4.

Кривые фиг. 4 имеют отношение при $w_0 = \text{const}$ к псевдооживленному слою одних и тех же очень мелких частиц разной концентрации, зависящей от полного расхода Q_0 жидкости. Интерес представляют и аналогичные зависимости для давлений, относимых, например, к Q_0 при $Q_0 = \text{const}$. В этом случае положительность эффективных модулей упругости диспергированной фазы (т. е. производных $dp_{||}/d\varphi$ и $dp_{\perp}/d\varphi$) представляет собой необходимое условие термодинамической устойчивости системы взвешенных частиц [13]. При нарушении этого условия однородное состояние оказывается невозможным и система расслаивается на случайно перемежающиеся области разной концентрации. Этот процесс полностью аналогичен процессу спиноподобного распада молекулярных систем в области абсолютной термодинамической неустойчивости.

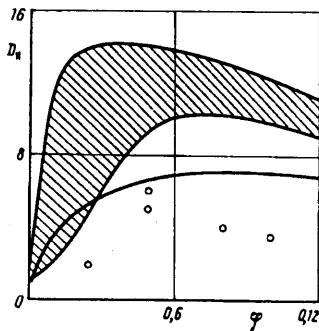
4. Псевдотурбулентная диффузия частиц. Компоненты тензора коэффициентов самодиффузии частиц, обусловленной псевдотурбулентными пульсациями, при больших временах диффузии выражаются в форме

$$D_{ij} = \pi \int \Psi_{w_i w_j}(0, \mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

где под знаком интеграла фигурируют компоненты тензора спектральной плотности пульсационной скорости частицы, а интегрирование проводится по всему волновому пространству. Опуская детали вычислений, выполняемых при помощи (1.5), (1.6) и (2.2), приводим уравнения для безразмерных коэффициентов самодиффузии в продольном и поперечном направлениях в однородном состоянии суспензии



Фиг. 5



Фиг. 6

$$D_{||} = \frac{D_{11}}{ua} = \frac{SM_1}{D_{||} - D_{\perp}}, \quad D_{\perp} = \frac{D_{22}}{ua} = \frac{D_{33}}{ua} = \frac{SM_2}{D_{||} - D_{\perp}} \quad (4.1)$$

$$M_1 = (1 - h)^2 A^2 I_0 + 2(1 - h)A \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right) I_2 + \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right) I_4$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \left(hA + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 (I_2 - I_4), \quad S = 3 \left(\frac{2}{9\pi\varphi} \right)^{2/3} \langle \varphi'^2 \rangle A^2 \quad (4.2)$$

$$I_0 = \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \frac{1}{r}, \quad I_2 = 1 - r \operatorname{arctg} \frac{1}{r}$$

$$I_4 = \frac{1}{3} - r^2 + r^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{r}, \quad r = \frac{D_{\perp}}{D_{||} - D_{\perp}}$$

Здесь величины $\langle \varphi'^2 \rangle$, h и A определены в (1.5) с $\langle N_i \rangle = 1$, (2.1) и (2.6) соответственно. Первая координатная ось принята направленной вдоль вектора u .

Из (4.1) и (4.2) следует уравнение для параметра r , которое должно решаться численно. Это решение определяет остальные функции в (4.2), а затем и коэффициенты

$$D_{||} = \left(\frac{S}{M_1 - M_2} \right)^{1/2} M_1, \quad D_{\perp} = \left(\frac{S}{M_1 - M_2} \right)^{1/2} M_2 \quad (4.3)$$

Зависимости этих коэффициентов от средней концентрации при разных κ (цифры у кривых) представлены на фиг. 5.

Коэффициент продольной самодиффузии имеет максимум в области сравнительно малых концентраций. Это связано с тем, что в этой области эффективная длина смешения примерно на порядок превышает радиус частиц. Последнее обусловлено просто слабым экранирующим влиянием соседних частиц на блуждания любой выделенной и подтверждается анализом в [16].

Экспериментально коэффициент продольной самодиффузии частиц, обусловленный гидродинамическими причинами, определялся в работах [1, 2] по скорости расплывания четкой верхней границы оседающей суспензии и по обработке данных по случайным смещениям отдельных частиц внутри области однородности. При этом в первом случае производилась коррекция на слабую полидисперсность используемых в опытах суспензий и на эффект увеличения градиента концентрации в верхней неоднородной области в процессе седиментации, обусловленный нелинейной зависимостью силы вязкого взаимодействия фаз от концентрации. На фиг. 6 представлены данные экспериментов [1] (заштрихованная область) и [2] (точки) вместе с теоретической кривой при $\kappa=2,5$, следующей из развиваемой теории. В соответствии с данными из [2] в качестве масштаба коэффициента диффузии на фиг. 6 использовали не ua , как в (4.1), а $w_s^{(1)}a$.

Результаты опытов [1] были подвергнуты критике, вполне обоснованной, в [2]. Однако и по

поводу данных в [2] могут быть высказаны некоторые претензии. В целом, учитывая исключительную трудоемкость постановки экспериментов, а также использование в теории приближенной формулы (1.6) и представления о незначительном влиянии корреляционных связей между частицами, согласие теоретических и опытных данных на фиг. 6 представляется весьма удовлетворительным.

Следует отличать рассмотренные выше коэффициенты псевдотурбулентной самодиффузии от коэффициентов взаимной диффузии этих же частиц в поле градиента средней концентрации. Профиль концентрации в потоке суспензии (например, в области над однородной частью псевдооживленного слоя в поле тяжести) описывается решениями уравнений сохранения массы и импульса фаз [5], причем особую роль играет сохранение импульса диспергированной фазы с учетом давлений типа (3.6). Однако масштаб коэффициентов взаимной диффузии можно определить и без решения уравнений.

Действительно, ключевую роль в уравнении сохранения импульса частиц играют члены с градиентом давления частиц и с силой межфазного взаимодействия в расчете на единицу объема суспензии. Размерный коэффициент при первом члене $\rho_1 u^2 \sim \rho_1 a^4 g^2 / \nu_0^2$, а масштаб второго члена $\rho_0 u / \tau \sim \rho_1 g$. Это же уравнение может быть интерпретировано как уравнение диффузии взвешенных частиц с коэффициентом взаимной диффузии D_m при производной $\partial\varphi/\partial x$, в то время как остающийся член должен быть интерпретирован как конвективный поток частиц с размерностью $u \sim a^2 g / \nu_0$. Отсюда сразу же получаем для масштаба коэффициента взаимной диффузии

$$D_m \sim \left(\frac{\rho_1 a^4 g^2}{\nu_0^2} \right) \left(\frac{a^2 g}{\nu_0} \right) \left(\frac{1}{\rho_1 g} \right) \sim \frac{a^6 g^2}{\nu_0^3}$$

Таким образом, в отличие от коэффициентов самодиффузии, пропорциональных объему частиц, коэффициенты взаимной диффузии пропорциональны квадрату этого объема в полном соответствии с выводами [16].

Выше при решении уравнений для случайных мер использовали допущение о существовании двух составляющих пульсационного движения жидкости, сильно различающихся своими временными масштабами. Теперь это допущение легко проверить. Имеем $\tau^{(2)} \sim (D_m k_0^2 u a)^{-1} \sim [(\kappa - 1) a g / \nu_0]^{-1}$ и, используя оценку для $\tau^{(1)}$: $\tau^{(1)} / \tau^{(2)} \sim (\kappa - 1) a^3 g / \nu_0^2$. На основании проведенных расчетов безразмерных коэффициентов в этих соотношениях получаем $\tau^{(1)} / \tau^{(2)} \approx (10^{-2} - 10^{-3}) a^3 g / \nu_0^2$ во всем интервале возможных концентраций. Это означает, что указанное допущение верно при $a \leq 10^{-2} - 10^{-1}$ см, т. е. практически для всех суспензий, которые можно считать бесстолкновительными в том смысле, что обмен импульсом и энергией между частицами осуществляется преимущественно через посредство окружающей жидкости.

Выше для простоты не учитывали броуновское движение частиц, что делает теорию спорной применительно к большинству коллоидных систем. Однако легко видеть, что единственное усложнение, обусловленное броуновским движением, связано с учетом в (1.6) коэффициента броуновской диффузии в концентрированной системе наряду с коэффициентами псевдотурбулентной самодиффузии и с введением изотропной броуновской составляющей в выражения (3.6), как это подробно объяснено в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davies R. H., Hassen M. A. Spreading of the interface at the top of a slightly polydisperse sedimenting suspension // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 107—134.
2. Ham J. M., Homsy G. M. Hindered settling and hydrodynamic dispersion in quiescent sedimenting suspensions // Int. J. Multiphase Flow. 1988. V. 14. № 5. P. 533—546.

3. *Eckstein E. E., Bailey D. G., Shapiro A. H.* Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. № 1. P. 191—208.
4. *Leighton D., Acrivos A.* Measurements of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 177. P. 109—131.
5. *Buyevich Yu. A.* Hydrodynamics of dispersions including diffusional effects // *Arch. Mech.* 1990. V. 42. № 4—5. P. 429—442.
6. *Буевич Ю. А., Латкин А. Н.* Расслоение равноплотной суспензии в круглой трубе // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1991. № 2. С. 124—131.
7. *Ishii M.* Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow. Paris: Eyrolles, 1975. 248 p.
8. *Homsy G. M.* A survey of some results in the mathematical theory of fluidization // *Theory of Dispersed Multiphase Flow.* N. Y.: Acad. Press, 1983. P. 57—71.
9. *Batchelor G. K.* A new theory of instability of a uniform fluidized bed // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 193. P. 75—110.
10. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 1 // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 49. № 3. P. 489—507.
11. *Koch D. L.* Kinetic theory for a monodisperse gas-solid suspension // *Phys. Fluids.* 1990. V. A2. № 10. P. 1711—1723.
12. *Яглом А. М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // *Успехи мат. наук.* 1952. Т. 7. № 5. С. 3—168.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Физматгиз, 1964. 567 с.
14. *Буевич Ю. А.* Спектральная теория концентрации дисперсных систем // *ПМГФ.* 1970. № 6. С. 60—71.
15. *Buscall R., Goodwing J. W., Ottewill R. H., Tadros T. F.* The settling of particles through Newtonian and non-Newtonian media // *J. Coll. & Interface Sci.* 1982. V. 85. № 1. P. 78—86.
16. *Zimmels Y.* Hydrodynamic diffusion of particulates in sedimentation systems // *Powder Techn.* 1990. V. 61. № 2. P. 131—141.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
6.VII.1992