

УДК 532.527 : 532.516

© 1993 г. Вик. В. СЫЧЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗРУШЕНИЯ ВИХРЯ

На основе асимптотического анализа системы уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса ($R \rightarrow \infty$) для стационарных осесимметричных течений несжимаемой жидкости исследуется явление разрушения вязкой вихревой нити. Сформулирован критерий ее разрушения, а также показано, что образующаяся в результате область медленного рециркуляционного течения ограничена поверхностью эллипсоида с продольным размером порядка $R^{-1/4}$ и толщиной порядка $R^{-3/8}$.

Разрушение вихря впервые обнаружено в экспериментах [1] по визуализации течения около треугольной пластины, установленной под углом атаки. Суть этого явления состоит в следующем. В закрученных потоках на оси симметрии тонкой вихревой нити, иногда без каких-либо видимых причин, появляется точка торможения, за которой образуется замкнутая область в виде пузыря с медленными внутренними токами. Об этом так называемом пузырьвидном распаде вихря и пойдет речь ниже. Как отмечалось в [2], разрушение вихря представляет собой явление, промежуточное между слабо закрученными потоками, в которых не возникает возвратных токов, и быстро вращающимися потоками со стержневыми областями возвратного течения.

Разрушение вихря происходит как при обтекании крыльев под углами атаки, где вихревые нити являются элементами сложной вихревой системы, так и в закрученных потоках внутри круглых труб. Обзор результатов экспериментальных, численных и теоретических исследований содержится в [2—7].

Теоретические исследования ведутся в нескольких направлениях. В рамках идеальной жидкости это явление рассматривается с точки зрения теории гидродинамической устойчивости, на основе теории волновых явлений и путем построения различных математических моделей. Другой подход, который будет описан в дальнейшем более подробно, базируется на аналогии с отрывом пограничного слоя. Кроме того, к настоящему времени получены численные решения системы уравнений Навье — Стокса, описывающие разрушение вихря.

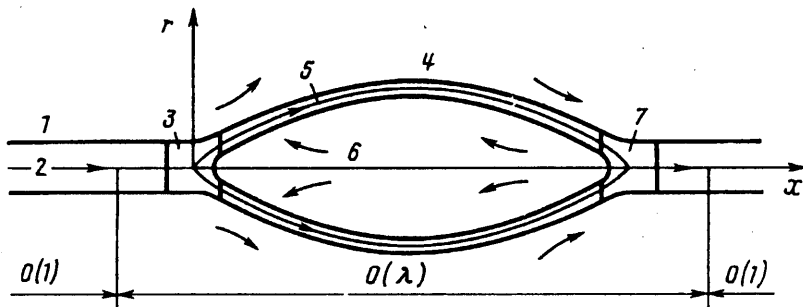
Данная работа посвящена изучению этого явления путем асимптотического анализа системы уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса. Основная ее цель состоит в установлении критерия разрушения вихря, описания структуры течения в целом и в непосредственной окрестности точки разрушения.

1. Пусть тонкая прямолинейная вихревая нить находится в однородном закрученном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Будем полагать, что течение стационарно и обладает осевой симметрией, а в закрученном потоке вне вихревой нити циркуляция постоянна.

Введем следующие обозначения: l — некоторая длина, характеризующая масштаб, на котором происходит развитие течения в вязкой вихревой нити; u_∞ , p_∞ — скорость и давление в невозмущенном потоке; $lu_\infty 2\pi\Gamma$ — циркуляция, $R = u_\infty l / \nu$ — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости; lx , lr , θ — цилиндрические координаты с осью, совпадающей с осью симметрии вихря $r = 0$; $u_\infty u$, $u_\infty v$, $u_\infty w$ — соответствующие проекции вектора скорости, $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$, $l^2 u_\infty \psi$ — давление и функция тока, ρ — плотность жидкости.

Система уравнений Навье — Стокса в этих обозначениях имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad c = rw$$

При больших числах Рейнольдса действие сил внутреннего трения сосредоточено в ядре вихревой нити, которая, если, например, речь идет о течении в трубе, определяется толщиной пограничного слоя от центрального тела, генерирующего этот вихрь. Как известно, разрушение вихря происходит, когда продольная и азимутальная составляющие вектора скорости внутри вихревой нити являются величинами одного порядка (см. [2, 3]).

На основании сказанного следует, что в области внешнего потенциального потока (область 1 на фиг. 1), где $x = O(1)$, $r = O(1)$, при $R \rightarrow \infty$ течение слабо возмущенное и азимутальная составляющая — величина порядка $R^{-1/2}$:

$$(u - 1, v, p) = o(1), \quad w = \Gamma/r, \quad \Gamma = R^{-1/2} C_{00} \quad (1.2)$$

где C_{00} — положительная постоянная. В области 2, представляющей собой ядро вихревой нити, решение при $R \rightarrow \infty$ может быть представлено в виде

$$x = O(1), \quad r = R^{-1/2} Y$$

$$u = u_0(x, Y) + o(1), \quad v = R^{-1/2} v_0(x, Y) + o(R^{-1/2}) \quad (1.3)$$

$$w = w_0(x, Y) + o(1), \quad p = p_0(x, Y) + o(1)$$

$$\psi = R^{-1} \psi_0(x, Y) + o(R^{-1}), \quad c = R^{-1/2} c_0(x, Y) + o(R^{-1/2})$$

Подстановка этих асимптотических разложений в (1.1) приводит к системе уравнений квазицилиндрического приближения [8, 9]

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial Y} + \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial u_0}{\partial Y}$$

$$u_0 \frac{\partial c_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial c_0}{\partial Y} = \frac{\partial^2 c_0}{\partial Y^2} - \frac{1}{Y} \frac{\partial c_0}{\partial Y}, \quad c_0 = Y w_0 \quad (1.4)$$

$$p_0 = - \int_Y^\infty \frac{c_0^2}{Y^3} dY + p_e(x), \quad u_0 = \frac{1}{Y} \frac{\partial \psi_0}{\partial Y}, \quad v_0 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \psi_0}{\partial x}$$

$$Y = 0: \partial u_0 / \partial Y = v_0 = w_0 = 0$$

$$Y \rightarrow \infty: u_0 \rightarrow u_e(x), \quad c_0 \rightarrow C_{00}$$

$$x = x_0: u_0 = u_0^0(Y), \quad c_0 = c_0^0(Y)$$

Здесь выписаны также краевые условия на оси симметрии вихря, условия срачивания с решением (1.2) и начальные условия. В силу того, что внешний поток предполагается однородным, в (1.4) $u_e = 1$ и $p_e = 0$. Действие внешнего градиента давления способствует лишь более раннему разрушению вихря, если $p_e' > 0$, или, наоборот, его затягиванию и даже устранению при $p_e' < 0$. В любом случае разрушению вязкого вихря предшествует процесс диффузии завихренности, приводящий к изменению величины циркуляции в продольном направлении, росту давления и уменьшению скорости на оси симметрии, а также к расширению трубок тока [3]. Детальное рассмотрение механизма разрушения на основе анализа динамики завихренности внутри вихревой нити проведено в [10].

Численные решения краевой задачи (1.4) [9, 11, 12] свидетельствуют, что при некотором значении $x = x^*$ в решении может возникать особенность, причем скорость на оси симметрии в этой точке положительна. Структура особенности исследована в [13]. Оказалось, что действительно скорость на оси отлична от нуля и условия появления особенности соответствуют критическому условию [14]. В общем случае $v_0 = O[(x^* - x)^{-1/2}]$ при $x \rightarrow x^* - 0$ и эта особенность неустранима, т. е. решение непродолжимо через точку $x = x^*$.

Именно появление такой особенности и рассматривалось как указание на разрушение вихря [9, 3] аналогично тому, как это имеет место в теории пограничного слоя, когда речь идет об особенности в точке нулевого поверхностного трения. Однако появление особенности, вообще говоря, непосредственно не связано с отрывом пограничного слоя и есть лишь указание на невозможность безотрывного обтекания тела (см. [15]). Так же обстоит дело и для рассматриваемого течения. Чтобы показать это, прежде всего сформулируем критерий разрушения вихря.

Для течения в осесимметричном следе, т. е. когда в (1.4) $c_0 = 0$, критерием его разрушения служит обычное условие обращения в нуль скорости на оси симметрии (см. [16]), которое происходит под действием внешнего неблагоприятного градиента давления. В случае течения в вихревой нити такое условие не может быть выполнено из-за появления указанной выше особенности [13]. Поэтому в качестве критерия разрушения вихря примем условие обращения в нуль в некоторой точке $x = x_c$ полного давления на оси симметрии

$$h(x_c) = 0, \quad h(x) = \frac{1}{2} u_0^2(x, 0) + p_0(x, 0)$$

$$p_0(x, 0) = - \int_0^{\infty} \frac{c_0^2}{Y^3} dY, \quad u_0(x_c, 0) > 0 \quad (1.5)$$

Здесь функции $u_0(x, Y)$, $p_0(x, Y)$, $c_0(x, Y)$ — решение задачи (1.4).

Обоснование этого критерия на основании результатов [17] дано ниже при рассмотрении течения в области 3 (фиг. 1), где $x - x_c = O(R^{-1/2})$ и в которой происходит обращение в нуль осевой скорости. Однако для этого прежде необходимо рассмотреть течение в целом — в масштабах области с возвратными токами.

Заметим, что в работах, посвященных численному решению задачи (1.4), где приведены значения $h(x)$ из (1.5) (см., например, [12]), функции, входящие в краевые условия, задавались такими, что $h(x) < 0$ при $x_0 \leq x \leq x^*$. Следовательно, эти решения не описывают реальных течений перед точкой разрушения (по крайней мере если речь идет о пузырьревидной форме распада вихря), так как здесь $x \geq x_0 > x_c$, где координата x_c определяется в соответствии с (1.5).

В дальнейшем всюду для удобства начало системы координат будем полагать совпадающим с точкой разрушения, т. е. $x_c = 0$.

2. Перейдем к рассмотрению области внешнего потока, окружающей зону рециркуляционного течения. Можно предположить, что течение в целом, т. е. предельное состояние при $R \rightarrow \infty$, описывается решением [18] (схема Прэндтля — Бэтчелора), являющимся обобщением решения Хилла для сферического вихря

на случай, когда на нулевой поверхности тока имеется разрыв постоянной Бернулли. Координата точки разрушения вихревой нити (в пределе при $R \rightarrow \infty$) должна совпадать с точкой отхода этой поверхности от оси симметрии. Однако попытки построения решения задачи (1.4), в которой $u_e(x)$ и $p_e(x)$ берутся из [18], путем обобщения результатов [19] для следа, оказались безуспешными. Вследствие этого предположим, что форма поверхности, охватывающей область возвратного течения, имеет малую относительную толщину (тогда в (1.4) $u_e = 1$, $p_e = 0$), а само возвратное течение медленное и обусловлено эжектирующим действием «вязкого» слоя смешения, развивающегося вдоль этой поверхности.

Итак, пусть продольный и поперечный размеры области возвратного течения суть соответственно величины порядка $\lambda = \lambda(R)$ и $\tau = \tau(R)$, причем $\lambda \leq O(1)$ и относительная толщина $\tau_0 = \tau/\lambda \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Согласно результатам теории малых возмущений, для осесимметричных течений в области внешнего потенциального потока (область 4 на фиг. 1) при $R \rightarrow \infty$ имеем

$$u = 1 + \tau_0^2 u_1(x^*, r^*) + \tau_0^4 u_2(x^*, r^*) + \dots \quad (2.1)$$

$$v = \tau_0^2 v_1(x^*, r^*) + \tau_0^4 v_2(x^*, r^*) + \dots$$

$$p = \tau_0^2 p_1(x^*, r^*) + \tau_0^4 p_2(x^*, r^*) + \dots + \left(-\frac{R^{-1} C_{00}^2}{\lambda^2 2r^{*2}} \right) + \dots$$

$$c = R^{-1/2} C_{00}, \quad x = \lambda x^*, \quad r = \lambda r^*$$

Здесь члены с постоянной C_{00} из (1.2) обусловлены закруткой потока. Форма нулевой поверхности тока $r^* = r_s^*(x^*, R)$ на основании сказанного выше должна определяться из условия, что на ней и в области возвратного течения переменные части давления суть величины одного порядка. Это условие, благодаря тому что внешний поток является закрученным, будет выполнено, если эта поверхность (в главном приближении) представляет собой эллипсоид. Действительно, пусть

$$r_s^* = \tau_0 d_0 \Phi_0(x^*) + r_s^\circ(x^*, R), \quad r_s^\circ = o(\tau_0) \quad (2.2)$$

$$\Phi_0 = L_0^{-1} (2L_0 x^* - x^{*2})^{1/2}, \quad 0 \leq x^* \leq 2L_0$$

Тогда, согласно [20], при $r = r_s^*(x^*, R)$ выражение (2.1) для давления имеет вид

$$p(x^*, r_s^*) = p_s = \pi_{00}(R) + \tau_0^2 \frac{d_1^2}{2\Phi_0^2} + \tau_0^4 \ln \frac{1}{\tau_0} \frac{d_1^4}{\Phi_0^2} + \tau_0^4 P^*(x^*) - \frac{R^{-1} C_{00}^2}{\lambda^2 \tau_0^2 2d_0^2 \Phi_0^2} + o(\tau_0^4), \quad d_1 = \frac{d_0}{L_0} \quad (2.3)$$

$$\pi_{00} = -\tau^{*2} \ln \frac{2}{\tau^*} + \frac{\tau^{*2}}{2} - \frac{3}{2} \tau^{*4} \left(\ln \frac{2}{\tau^*} \right)^2 + \frac{\tau^{*4}}{2} \ln \frac{2}{\tau^*}, \quad \tau^* = d_1 \tau_0$$

Если в этом выражении положить

$$\tau_0 = \lambda^{-1/2} R^{-1/4} - \frac{d_1^2}{4} [\lambda^{-3/2} R^{-3/4} \ln(\lambda R^{1/2})] + O(\lambda^{-5/2} R^{-5/4} \ln^2 R),$$

$$d_0 = (C_{00} L_0)^{1/2} \quad (2.4)$$

то вплоть до члена порядка τ_0^4 давление на нулевой поверхности тока будет постоянным

$$p_s = \pi_{00}(R) + \tau_0^4 P^*(x^*) + o(\tau_0^4) \quad (2.5)$$

т. е. переменные части давления, обусловленные обтеканием жидкого эллипсоида и вращательным движением, компенсируют друг друга. Согласно (2.4), постоянная d_0 , определяющая относительную толщину эллипсоида, выражается через значение циркуляции C_{00} .

Заметим, что асимптотические разложения (2.1) теории малых возмущений, как известно [20], теряют свою равномерную пригодность вблизи передней кромки эллипсоида при $x^* = O(\tau_0^2)$, где изменения скорости и давления становятся величинами порядка единицы. Переходя к исходным переменным x , r , на основании (2.1)—(2.4) находим, что это происходит в области с размерами $x = O(R^{-1/2})$, $r = O(R^{-1/2})$ (область 3 на фиг. 1).

Рассмотрим теперь течение в слое смешения, который развивается вдоль поверхности жидкого эллипсоида и отделяет область внешнего слабо возмущенного потока от области с возвратными токами. Используя выражения (2.1)—(2.4), представим решение в этой области 5 (фиг. 1) в виде

$$\begin{aligned} x &= \lambda x^*, \quad r = \lambda r^* + \sigma N^*, \quad \sigma = \sigma(R) < O(\lambda \tau_0) \\ u &= u_0^*(x^*, N^*) + O(\tau_0^2 \ln \tau_0) \\ v &= \tau_0 V_0^\circ(x^*, N^*) + \frac{\sigma}{\lambda} v_0^*(x^*, N^*) + O(\tau_0^2 \ln \tau_0) \\ c &= R^{-1/2} c_0^*(x^*, N^*) + O(R^{-1/2} \tau_0^2 \ln \tau_0) \\ p &= \pi_{00}(R) + \sigma (\lambda \tau_0)^{-3} R^{-1} [p_1^*(x^*, N^*) + O(\tau_0^2 \ln \tau_0)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставив эти разложения в систему уравнений (1.1), исходя из баланса инерционных и «вязких» членов, получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda^{1/2} R^{-1/2} \\ u_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + v_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial N^*} &= \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial N^{*2}} \\ u_0^* \frac{\partial c_0^*}{\partial x^*} + v_0^* \frac{\partial c_0^*}{\partial N^*} &= \frac{\partial^2 c_0^*}{\partial N^{*2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial (\Phi_0 u_0^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial (\Phi_0 v_0^*)}{\partial N^*} = 0, \quad V_0^\circ = d_0 \Phi_0' u_0^*$$

$$p_1^* = \frac{1}{d_0^3 \Phi_0^3} \int_{-\infty}^{N^*} c_0^{*2} dN^* - d_0 \Phi_0'' \int_{-\infty}^{N^*} u_0^{*2} dN^* + p_{00}^*(x^*)$$

Таким образом, изменения давления в слое смешения обусловлены как закруткой потока, так и кривизной поверхности эллипсоида, а $p_{00}^*(x^*)$ здесь, быть может,— переменная часть давления в области возвратных токов.

С помощью преобразования Степанова — Манглера

$$X^\circ = d_0^2 \int_0^{x^*} \Phi_0^2 dx^*, \quad N^\circ = d_0 \Phi_0 N^* \quad (2.8)$$

$$u^\circ = u_0^*, \quad v^\circ = (d_0 \Phi_0)^{-1} \left[\frac{\Phi_0'}{\Phi_0} N^* u_0^* + v_0^* \right], \quad c_0^* = c^\circ$$

уравнения (2.7) сводятся к уравнениям для плоского слоя смешения

$$u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial X^\circ} + v^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial N^\circ} = \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial N^{\circ 2}}$$

$$u^\circ \frac{\partial c^\circ}{\partial X^\circ} + v^\circ \frac{\partial c^\circ}{\partial N^\circ} = \frac{\partial^2 c^\circ}{\partial N^{\circ 2}} \quad (2.9)$$

$$u^\circ = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial N^\circ}, \quad v^\circ = -\frac{\partial \psi^\circ}{\partial X^\circ}$$

$$N^\circ \rightarrow \infty: u^\circ \rightarrow 1, \quad c^\circ \rightarrow C_{00}$$

$$N^\circ \rightarrow -\infty: u^\circ \rightarrow 0, \quad c^\circ \rightarrow 0$$

$$N^\circ = 0: \psi^\circ = 0$$

Краевые условия при $N^\circ \rightarrow \infty$ обеспечивают сращивание с решением в области 4, в том числе и для функции $p_1^*(x^*, N^*)$ из (2.7), а условия при $N^\circ \rightarrow -\infty$ — это обычные условия на внутренней границе слоя смешения.

В качестве начальных для течения в слое смешения служат условия сращивания с решением в области 3 с размерами $x = O(R^{-1/2})$, $r = O(R^{-1/2})$. Это означает, что $u^\circ \rightarrow U^\circ(N^\circ)$, $c^\circ \rightarrow C^\circ(N^\circ)$ при $X^\circ \rightarrow 0$, $N^\circ = O(1)$. Следовательно, значение $\sigma N^* = \sigma(d_0 \Phi_0)^{-1} N^\circ$, определяющее толщину слоя смешения, при $x^* = O(\tau_0^2)$ или $x = O(R^{-1/2})$ должно становиться величиной $O(R^{-1/2})$. В силу того что $\Phi_0 = O(\sqrt{x^*})$ при $x^* \rightarrow +0$, в результате перехода в выражении для σN^* к переменной $X = R^{1/2} x = R^{1/2} \lambda x^*$ находим: $\sigma = \lambda^{-1/2} R^{-3/4}$. Из этого соотношения и соотношений для σ и τ_0 в (2.7), (2.4) следует, что

$$\tau_0 = R^{-1/8} - \frac{d_1^2}{16} R^{-3/8} \ln R + O(R^{-5/8} \ln^2 R)$$

$$\lambda = R^{-1/4}, \quad \tau = R^{-1/4} \tau_0, \quad \sigma = R^{-5/8} \quad (2.10)$$

Полученные выражения определяют характерные размеры области возвратных токов и толщину слоя смешения, а на основании (2.5) и (2.6) находим, что переменная часть давления на нулевой поверхности тока и в слое смешения должна быть величиной порядка $\tau_0^4 = O(R^{-1/2})$. Однако течение в слое смешения создает вытесняющее действие, которое, согласно (2.6), (2.8), (2.10), характеризуется величиной $R^{-3/8} \delta'(x^*)$, где $\delta' = d_0 \Phi_0 v^\circ(X^\circ, \infty)$, и определяется в процессе решения задачи (2.9). Это, как нетрудно видеть на основании теории малых возмущений, приводит к появлению переменной части давления $O(R^{-1/2} \ln R)$ на поверхности эллипсоида. Во избежание возникающего противоречия необходимо сделать транспозиционное преобразование Прандтля или в силу условия на разделительной поверхности тока в (2.9) это означает, что в (2.2)

$$r_1^0 = -\lambda^{-1} R^{-5/8} \delta(x^*) + o(R^{-3/8})$$

Тогда вытесняющего действия порядка $R^{-3/8}$ не будет и выражение (2.5) действительно имеет место.

Перейдем к рассмотрению течения в области возвратных токов (область б на фиг. 1). Зная продольный и поперечный размеры этой области, а также тот факт, что, согласно (2.6)—(2.10), на внутренней границе слоя смешения $\psi = R^{-1} \psi^\circ(X^\circ, -\infty) = -R^{-1} L^\circ(x^*)$, $L^\circ > 0$, представим решение здесь в виде

$$x = R^{-1/4} x^*, \quad r = R^{-3/8} Y^*$$

$$\psi = R^{-1} \Psi_0^*(x^*, Y^*) + \dots, \quad u = R^{-1/4} U_0^*(x^*, Y^*) + \dots \quad (2.11)$$

$$v = R^{-3/8} V_0^*(x^*, Y^*) + \dots, \quad p = \pi_{00}(R) + R^{-1/2} P_0^*(x^*, Y^*) + \dots$$

В силу того что в слое смешения $c_0^*(x^*, N^*)$ экспоненциально стремится к нулю при $N^\circ \rightarrow -\infty$ и в соответствии с (2.6), в области б значение $c = o(R^{-5/8})$.

Поэтому подстановка (2.11) в (1.1) приводит к уравнениям движения идеальной жидкости в тонком ядре. В главном приближении течение оказывается незамкнутым, а из сращения с решением (2.6), (2.7) следует, что $P_0^* = p_{00}^*(x^*)$.

Решение задачи для этой области затруднено главным образом тем, что распределение азимутальной составляющей завихренности (отнесенной к Y^*) вдоль поверхностей тока определяется структурой течения в области смыкания, о которой речь пойдет в разд. 4.

Таким образом, переменные части давления в слое смешения и области возвратного течения (см. (2.6), (2.10), (2.11)) есть величины порядка $R^{-1/2}$. Проблема их определения и нахождения постоянной L_0 , характеризующей продольный размер эллипсоида, является задачей следующих приближений и рассматриваться не будет. По существу эта проблема аналогична возникающей при описании возвратного течения в масштабах срывной зоны за тупым телом при $R \rightarrow \infty$ [21].

Тот факт, что течение в области возвратных токов медленное, соответствует экспериментальным данным. Так, согласно [22], максимальное значение осевой скорости здесь приблизительно в 6 раз меньше соответствующей величины перед точкой разрушения.

Завершив на этом рассмотрение течения в целом, перейдем к его анализу в непосредственной окрестности точки разрушения.

3. Решение задачи (1.4) при подходе к точке разрушения ведет себя регулярно, т. е. при $x \rightarrow -0$

$$u_0 = U_{00}^*(Y) + O(x), \quad v_0 = V_{00}^*(Y) + O(x), \quad c_0 = C_{00}^*(Y) + O(x) \quad (3.1)$$

$$p = P_{00}^*(Y) + O(x), \quad P_{00}^* = - \int_Y^{\infty} \frac{C_{00}^{*2}}{Y^3} dY$$

Поэтому в области 3, где, как было показано, скорость и давление меняются на конечную величину, решение при $R \rightarrow \infty$ может быть представлено в виде

$$x = R^{-1/2}X, \quad r = R^{-1/2}Y$$

$$u = U_0(X, Y) + o(1), \quad v = V_0(X, Y) + o(1) \quad (3.2)$$

$$w = W_0(X, Y) + o(1), \quad p = P_0(X, Y) + o(1)$$

$$c = R^{-1/2}C_0(X, Y) + o(R^{-1/2}),$$

$$\psi = R^{-1}\Psi(X, Y) + o(R^{-1})$$

Внеся эти асимптотические представления в (1.1), приходим к системе полных уравнений Эйлера, которая, как известно [23], может быть приведена к одному уравнению

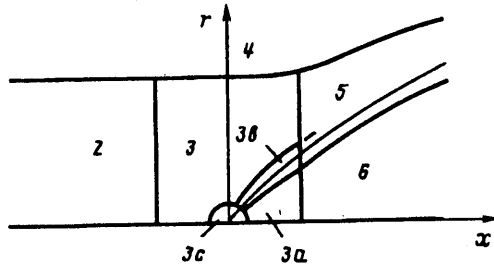
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = Y^2 \frac{dH}{d\Psi} - C \frac{dC}{d\Psi} \quad (3.3)$$

$$U_0 = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V_0 = - \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad C_0 = YW_0 = C(\Psi)$$

$$1/2 (U_0^2 + V_0^2 + W_0^2) + P_0 = H(\Psi)$$

На оси симметрии перед точкой разрушения вихря ($Y=0, X < 0$) значение $\Psi=0$. В силу регулярности при $Y \rightarrow 0$ входящего профиля скорости (3.1) решение задачи (3.3) регулярно при $Y \rightarrow 0$ и краевые условия $\partial U_0 / \partial Y = W_0 = 0$ при $Y=0, X < 0$ будут выполнены.

Внешние граничные условия определяются из сращения с представлением (1.3), (3.1) и решением в области 4 потенциального течения, соответствующего обтеканию параболоида вращения ($r_s = \sqrt{2C_{00}X}$, см. (2.2), (2.4))



Фиг. 2

$$Y = O(1), X \rightarrow -\infty: U_0 \rightarrow U_{00}^*(Y), C_0 \rightarrow C_{00}^*(Y) \quad (3.4)$$

$$X = O(1), Y \rightarrow \infty: U_0 = 1 - \frac{C_{00}}{2Y} + O(Y^{-3}), V_0 = \frac{C_{00}}{2Y} + O(Y^{-2})$$

$$C_0 \rightarrow C_{00}, P_0 = \frac{C_{00}}{2Y} - \frac{3C_{00}^2}{4Y^2} + O(Y^{-3})$$

Условия при $X \rightarrow -\infty$ определяют функции $H(\Psi)$, $C(\Psi)$ в (3.3).

Согласно исходным представлениям, в рассматриваемой области происходит торможение жидкости, так что при $X = -0$ скорость на оси симметрии обращается в нуль и за этой точкой начинается область возвратного течения (область $3a$ на фиг. 2). Здесь, согласно (2.11), (2.3), (2.10), давление есть величина порядка $R^{-1/4} \ln R$ и поэтому на поверхности $\Psi = 0$ при $X \geq 0$ значение $P_0(X, Y)$ из (3.2) обращается в нуль

$$P_0 = 0, Y = \Phi_+(X), X \geq 0 \quad (3.5)$$

Вид функции $\Phi_+(X)$, определяющей форму этой поверхности, должен находиться в процессе решения задачи для рассматриваемой области 3, а из сращения с решением в области 4, согласно (2.2), (2.4), следует, что $\Phi_+ \rightarrow \sqrt{2C_{00}X}$ при $X \rightarrow \infty$.

Условие (3.5) может быть выполнено, если только полное давление на нулевой поверхности тока равно нулю, т. е. в (3.3) $H(0) = 0$. Иначе говоря, приходящий к точке разрушения профиль скорости (3.1) удовлетворяет критерию (1.5).

Впервые подобное рассуждение, согласно которому в области полных уравнений Эйлера появляется поверхность торможения и значение $H(0) = 0$, представлено в [17] в рамках модели разрушения вихря для течений идеальной жидкости.

Таким образом, течение в области 3 описывается решением краевой задачи (3.3)–(3.5), которая должна быть дополнена упомянутым выше условием на оси симметрии и краевым условием, обеспечивающим сращивание с решением в области 5

$$X \rightarrow \infty: U_0 \rightarrow U^\circ(N^\circ), V_0 \rightarrow \sqrt{\frac{C_{00}}{2}} \frac{U^\circ(N^\circ)}{X^{1/2}}, C_0 \rightarrow C^\circ(N^\circ)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi^\circ(N^\circ), P_0 \rightarrow \frac{1}{4X^2} \int_0^{N^\circ} \left[U^{\circ 2} + \left(\frac{C^\circ}{C_{00}} \right)^2 \right] dN^\circ \quad (3.6)$$

$$U^\circ = \sqrt{2H(\Psi^\circ)}, C^\circ = C(\Psi^\circ)$$

$$\Phi_+ \rightarrow \sqrt{2C_{00}X}, Y - \Phi_+ = \Phi_+^{-1}N^\circ, N^\circ = O(1)$$

При этом в силу (3.5) и того, что $H(0) = 0$, на поверхности $Y = \Phi_+(X)$ решение должно удовлетворять условию прилипания. Возможность существования решения

уравнений Эйлера для закрученного потока с таким «сильным» условием (при внешних краевых условиях, отличных от (3.4), (3.6)) продемонстрирована в [24].

Рассмотрим течение вблизи поверхности торможения. На основании (1.5) и регулярности приходящего к области 3 профиля скорости (3.1) в окрестности оси симметрии следует, что при $\Psi \rightarrow 0$

$$H(\Psi) = a_1 \Psi + O(\Psi^2), \quad C(\Psi) = \gamma_0 \Psi + O(\Psi^2) \quad (3.7)$$

где a_1, γ_0 — положительные постоянные.

Пусть s, n — ортогональные криволинейные координаты, связанные с поверхностью торможения, и

$$Y = \Phi_s^\circ(S), \quad \Phi_s(X) = \Phi_s^\circ(S), \quad s = R^{-1/2}S \quad (3.8)$$

определяют форму этой поверхности в области 3. Записав уравнение (3.3) в этих координатах [25] и используя (3.7), находим, что при $N = R^{-1/2}n \rightarrow 0$

$$u_s = a_1 \Phi_s^\circ N + O(N^2), \quad u_n = -a_1 \Phi_s^\circ N^2 + O(N^3) \quad (3.9)$$

$$\Psi = a_1 \Phi_s^\circ \frac{N^2}{2} + O(N^3)$$

Здесь $u_s(S, N)$ и $u_n(S, N)$ — касательная и нормальная составляющие вектора скорости к поверхности $\Psi = 0$, которая является поверхностью разрыва завихренности. Поэтому вдоль нее будет развиваться слой смещения (область 3b на фиг. 2). На основании (3.9), (3.7) и баланса инерционных и «вязких» членов в уравнениях движения заключаем, что решение в этой области имеет вид

$$S = O(1), \quad N = R^{-1/6}N_1$$

$$u_s = R^{-1/6}U_s(S, N_1) + \dots, \quad u_n = R^{-1/3}U_n(S, N_1) + \dots \quad (3.10)$$

$$c = R^{-5/6}C_s(S, N_1) + \dots, \quad p = \pi_{00}(R) + R^{-1/2}P_s(S, N_1) + \dots$$

а искомые функции удовлетворяют системе уравнений вида (2.7) и

$$P_s = \kappa \int_{-\infty}^{N_1} U_s^2 dN_1 + p_s^\circ(S) \quad (3.11)$$

Здесь $\kappa = \kappa(S)$ — кривизна поверхности торможения. Совершив преобразование Степанова — Манглера

$$\xi = \int_0^s \Phi_s^\circ dS, \quad \eta = \Phi_s^\circ N_1 \quad (3.12)$$

$$U_s^\circ = U_s, \quad U_n^\circ = \frac{1}{\Phi_s^\circ} \left(\frac{\Phi_s^\circ}{\Phi_s^\circ} N_1 U_s + U_n \right), \quad C_s^\circ = C_s$$

приходим к задаче

$$\begin{aligned} U_s^\circ \frac{\partial U_s^\circ}{\partial \xi} + U_n^\circ \frac{\partial U_s^\circ}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 U_s^\circ}{\partial \eta^2} \\ U_s^\circ \frac{\partial C_s^\circ}{\partial \xi} + U_n^\circ \frac{\partial C_s^\circ}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 C_s^\circ}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$U_s^\circ = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \eta}, \quad U_n^\circ = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi}$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \Psi_s \rightarrow a_1 \frac{\eta^2}{2}, \quad C_s^\circ \rightarrow \gamma_0 a_1 \frac{\eta^2}{2}$$

$$\eta \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad C_s^\circ \rightarrow 0$$

Выписанные краевые условия при $\eta \rightarrow \infty$ обеспечивают сращивание с разложением (3.9) в области 3, а условия при $\eta \rightarrow -\infty$ имеют тот же смысл, что и в задаче (2.9).

Вследствие того, что слой смешения начинается из критической точки, решение задачи (3.13) автомодельно

$$\Psi_s = \xi^{2/3} f(t), \quad C_s = \xi^{2/3} g(t), \quad t = \eta \xi^{-1/3} \quad (3.14)$$

$$f''' + \frac{2}{3} f f'' - \frac{1}{3} f^2 = 0$$

$$g'' + \frac{2}{3} f g' - \frac{2}{3} f g = 0$$

$$t \rightarrow \infty: f = \frac{a_1}{2} (t + t_0)^2 + o(1), \quad g = \frac{\gamma_0 a_1}{2} (t + t_0)^2 + O(t^{-1})$$

$$f(-\infty) = g(-\infty) = 0$$

При $S \rightarrow \infty$, согласно (3.8), (3.12)—(3.14), $\Psi_s \rightarrow C_{00}^{2/3} S^{4/3} f(t)$, $C_s \rightarrow C_{00}^{2/3} S^{4/3} g(t)$, $t = \eta (C_{00} S^2)^{-1/3}$. Поэтому при переходе к внешней переменной $x^* = R^{1/4} x$ нетрудно видеть, что решение для области $3b$ срачивается с решением для слоя смешения (область 5). Таким образом, при $x^* \rightarrow +0$ эта область имеет двухслойную структуру: основная ее часть, где $N^* = O(1)$, и подслой смешения, где $N^* = O(x^{*2/3})$. Течение в слое смешения при $x^* = O(1)$ (область 5), как показано в разд. 2, не создает вытесняющего действия. Следовательно, этим свойством должен обладать и подслой смешения, определяющий начальный профиль скорости при $x^* \rightarrow +0$, т. е. в (3.14) в качестве краевого условия следует положить значение $t_0 = 0$. Решение задачи (3.14) для функции $f(t)$ хорошо изучено [26, 27]. В частности, $f(-\infty) = -1,2539 a_1^{1/3}$ [26]. Решение уравнения для $g(t)$ также существует и на разделительной поверхности тока $f(t^*) = 0$, $g(t^*) = 0,85 \gamma_0 a_1$. Значение $t^* = 0,55 a_1^{-1/3}$ и несколько отличается от полученного в [28].

В области $3a$ возвратное течение обусловлено эжектирующим действием слоя смешения, поэтому, исходя из тех же соображений, что и при рассмотрении области b , на основании (3.10)—(3.14) имеем

$$\psi = R^{-4/3} \psi^*(X, Y) + \dots, \quad u = R^{-1/3} u^*(X, Y) + \dots \quad (3.15)$$

$$v = R^{-1/3} v^*(X, Y) + \dots, \quad p = \pi_{00}(R) + R^{-2/3} p^*(X, Y) + \dots$$

$$c = o(R^{-5/6}), \quad x = R^{-1/2} X, \quad r = R^{-1/2} Y$$

Искомые функции удовлетворяют системе полных уравнений Эйлера для незакрученного потока

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2} - \frac{1}{Y} \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} = Y^2 \frac{dh^*}{d\psi^*}, \quad u^* = \frac{1}{Y} \frac{\partial \psi^*}{\partial Y}, \quad v^* = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \psi^*}{\partial X},$$

$$\frac{1}{2} (u^{*2} + v^{*2}) + p^* = h^*(\psi^*) \quad (3.16)$$

Краевые условия на оси симметрии и срачивания с решением в слое смешения $3b$ запишутся в виде

$$\psi^*(X, 0) = 0, \quad \psi^*[X, \Phi_s(X)] = \xi^{2/3} f(-\infty) \quad (3.17)$$

и в (3.11) значения $p_s(S) = 0$. Из срачивания с разложением (2.11) для области b получим, что $h^*(\psi^*) = 0$ и при $X \rightarrow \infty$

$$\psi^* \rightarrow \frac{f(-\infty)}{2C_{00}^{1/3}} X^{1/3} Y^2, \quad p^* \rightarrow -\frac{f^2(-\infty)}{2C_{00}^{1/3}} X^{2/3} \quad (3.18)$$

Граничное условие $\partial u^*/\partial Y = 0$ при $Y = 0$ для задачи (3.16)—(3.18) будет при этом выполнено, так как $h^*(\psi^*) = 0$.

Рассмотрим течение в окрестности точки торможения на оси симметрии вихря. В области 3 на основании (3.7), (3.5) и уравнения (3.3) находим, что при $|X| \rightarrow 0$, $Y \rightarrow 0$

$$\Psi = \alpha_0 Y^4 + \frac{1}{2} \alpha_1 X^2 Y^2 + o(X^2 Y^2), \quad P_0 = \alpha_0 \alpha_1 Y^4 - 2\alpha_1^2 X^4 - \alpha_1^2 X^2 Y^2 + o(X^2 Y^2) (X < 0); \quad \Phi_s = k_0 X + O(X^2) (X > 0) \quad (3.19)$$

где α_0 , α_1 , k_0 — положительные постоянные и $\alpha_1 + 8\alpha_0 = a_1$.

Используя выражение для формы поверхности торможения при $X \rightarrow +0$, согласно (3.12), (3.14) получаем представление решения для слоя смешения при $S \rightarrow 0$

$$\Psi_s = \left(\frac{k^{*2}}{3}\right)^{2/3} S^2 f(t) + \dots, C_s = \left(\frac{k^{*2}}{3}\right)^{2/3} S^2 g(t) + \dots \quad (3.20)$$

$$t = (3k^*)^{1/3} N_1, k^* = k_0 (1 + k_0^2)^{-1/2}$$

Тогда для решения задачи (3.16)—(3.18) в области возвратного течения следует, что при $X \rightarrow +0$

$$\Psi^* = X^2 \frac{D_0}{2} \zeta^2 + o(X^2), p^* = -\frac{D_0^2}{2} + o(1) \quad (3.21)$$

$$\zeta = \frac{Y}{X}, D_0 = 2f(-\infty) (3k^*)^{-2/3}$$

Вспомня выражение (3.10) для N , на основании (3.19)—(3.21) находим, что при $X = O(R^{-1/6})$ (или $x = O(R^{-2/3})$) толщина слоя смешения и продольный размер области возвратного течения становятся величинами одного порядка: $O(R^{-2/3})$. Это означает, что в окрестности начала координат лежит новая характерная область $3c$, в которой зарождается слой смешения. Если воспользоваться разложениями (3.10), (3.15), (3.19)—(3.21), то нетрудно видеть, что решение здесь запишется в виде

$$x = R^{-2/3} x', r = R^{-2/3} r'$$

$$\psi = R^{-5/3} \psi'(x', r') + \dots, u = R^{-1/3} u'(x', r') + \dots$$

$$v = R^{-1/3} v'(x', r') + \dots, p = \pi_{00}(R) + R^{-2/3} p'(x', r') + \dots$$

$$w = R^{-1/2} w'(x', r') + \dots, c = R^{-7/6} c'(x', r') + \dots$$

Подставив эти разложения в (1.1), приходим для искомым функций к системе полных уравнений Навье — Стокса для потока без закрутки с локальным числом Рейнольдса, равным единице. Краевые условия на оси симметрии $r' = 0$ имеют вид (1.4), а внешние условия ($|x'| \rightarrow \infty, r' \rightarrow \infty$) определяются из сращивания с решениями в областях $3, 3a, 3b$, т. е. это условия вида (3.9), (3.19)—(3.21), переписанные во внутренних переменных x', r' .

Сделаем одно замечание. При рассмотрении течения (разд. 2) в слое смешения (область 5) неявно предполагалось, что этот слой «вязкий». Нельзя исключить и другую возможность, когда эта область имеет двухслойную структуру: основная часть, где справедлив интеграл Бернулли, и «вязкий» подслой, который является продолжением области $3b$. Используя теорему количества движения применительно к жидкому объему, охваченному нулевой поверхностью тока, покажем противоречивость такой ситуации.

Согласно (3.10), (3.12), (3.14), при $x = O(\lambda)$ в «вязком» подслое значение $u = O(\lambda^{2/3} R^{1/6})$, а его толщина есть величина порядка $(\lambda^{1/6} R^{-7/12})$. Следовательно, интеграл напряжений трения вдоль разделительной поверхности тока есть величина $O(\tau_0 \lambda^{5/2} R^{-1/4})$. Интеграл составляющих сил давления в проекции на ось x есть величина $O(R^{-1})$, поскольку основной вклад здесь вносит область смыкания зоны возвратных токов 7 , в которой $r = O(R^{-1/2})$, а давление восстанавливается до величины порядка единицы. В соответствии с теоремой количества движения сумма этих интегралов должна равняться нулю. Поэтому, приравнявая их порядки величин, находим, что $\tau_0 \lambda^{5/2} = O(R^{-3/4})$. Используя это выражение вместе с (2.4), вновь приходим к соотношениям (2.10), что и доказывает «вязкий» характер течения в слое смешения.

4. Проведенный анализ показал, что разрушение вихря происходит в два этапа. Сначала торможение жидкости за счет закрутки внешнего потока приводит к обращению в нуль полного давления на оси симметрии вязкого ядра. Затем в области с размерами $x = O(R^{-1/2}), r = O(R^{-1/2})$ в результате дальнейшего торможения скорость на оси симметрии обращается в нуль, причем механизм торможения здесь носит «невязкий» характер. Это подтверждается экспериментальными данными [22], согласно которым обращение осевой скорости в нуль происходит резко, в непосредственной близости от точки разрушения.

Образующаяся в результате поверхность охватывает область медленного возвратного течения. Эта поверхность имеет форму эллипсоида с продольным размером $O(R^{-1/4})$ и относительной толщиной $O(R^{-1/8})$.

В окрестности точки смыкания слоя смешения, как и в окрестности точки разрушения, лежит область 7 (фиг. 1) с размерами $x - \lambda 2L_0 = O(R^{-1/2})$, $r = O(R^{-1/2})$, в которой скорость и давление меняются на конечную величину, и течение здесь описывается системой полных уравнений Эйлера. Если течение в этой области стационарно, то, как и для течения за тупым телом при $R \rightarrow \infty$ [21], неизбежно появление возвратной струи, состоящей в соответствии с интегралом Бернулли из перевернутых профилей скорости внутренней части слоя смешения при $x^* = 2L_0$. Это приводит к известному противоречию [29]: беспрепятственное развитие струи нарушает структуру течения в окрестности точки разрушения. Выходом из этой ситуации на основе результатов [30] является предположение о том, что в области 7 течение носит ярко выраженный нестационарный характер и вследствие развивающихся здесь диссипативных процессов образования возвратной струи не происходит. Однако, поскольку нестационарность (при $R \rightarrow \infty$) локализована в области 7, это не нарушает исходных представлений о рассмотренном выше течении в целом.

Экспериментальные данные [22, 31] и результаты численного решения системы уравнений Навье — Стокса [7] как раз и свидетельствуют о нестационарности течения вблизи точки смыкания. Эта нестационарность, по-видимому, распространяется и в область возвратных токов, где, как было показано, скорость течения мала: $u = O(R^{-1/4})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Werlé H. Visualisation en tunnel hydrodynamique//Rech. Aéronaut. 1953. № 33. P. 3—7.
2. Leibovich S. The structure of vortex breakdown//Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 221—246.
3. Hall M. G. Vortex breakdown//Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195—218.
4. Leibovich S. Vortex stability and breakdown: survey and extension//AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192—1206.
5. Тригуб В. Н. Задачи теории разрушения вихрей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 1986. 181 с.
6. Escudier M. Vortex breakdown: observations and explanations//Progr. Aerospace Sci. 1988. V. 25. № 2. P. 189—229.
7. Spall R. E., Gatski T. B., Ash R. L. The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 429. № 1877. P. 613—637.
8. Gartshore I. S. Recent work in swirling incompressible flow// Nat. Res. Coun. Canada, Aeronaut. Rep. 1962. LR-343. 42 p.
9. Hall M. G. A new approach to vortex breakdown//Proc. 1967 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. San Diego-La Jolla, Calif. 1967. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1967. P. 319—340.
10. Brown G. L., Lopez J. M. Axisymmetric vortex breakdown. Part 2. Physical mechanisms//J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 553—576.
11. Bossel H. H. Vortex computation by the method of weighted residuals using exponentials//AIAA Journal. 1971. V. 9. № 10. P. 2027—2034.
12. Reyna L. G., Menne S. Numerical prediction of flow in slender vortices//Int. J. Comput. Fluids. 1988. V. 16. № 3. P. 239—256.
13. Тригуб В. Н. К вопросу о разрушении вихревой нити//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 220—226.
14. Benjamin T. B. Theory of the vortex breakdown phenomenon//J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 4. P. 593—629.
15. Асимптотическая теория отрывных течений/Под ред. В. В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
16. Тригуб В. Н. О течении в окрестности точки торможения осесимметричного следа//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 53—59.
17. Тригуб В. Н. К вопросу о разрушении вихря в идеальной жидкости//Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 100—104.

18. Кожуро Л. А. Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли//ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 88—94.
19. Сычев Вук. В. О разрушении осесимметричного ламинарного следа//Уч. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 2. С. 27—42.
20. Van Dyke M. D. Second-order slender-body theory-axisymmetric flow//NASA. Tech. Rep. 1959. R-47. 26 p.
21. Сычев В. В. Об установившемся ламинарном течении жидкости за тупым телом при большом числе Рейнольдса//Докл. на 8-м симпоз. по совр. проблемам механики жидкостей и газов. Тарда, Польша, 1967. 25 с.
22. Faler J. H., Leibovich S. An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown//J. Fluid Mech. 1978. V. 86. Pt 2. P. 313—335.
23. Long R. R. Steady motion around a symmetrical obstacle moving along the axis of a rotating liquid//J. Meteor. 1953. V. 10. № 3. P. 197—203.
24. Keller J. J., Egli W., Exley J. Force-and loss-free transitions between flow states//ZAMP. 1985. V. 36. № 6. P. 854—889.
25. Van Dyke M. Higher approximations in boundary-layer theory. Part 1. General analysis//J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 2. P. 161—177.
26. Нейланд В. Я. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 19—25.
27. Диесперов В. Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403—414.
28. Brown S. N., Stewartson K. Trailing-edge stall//J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 3. P. 561—584.
29. Messiter A. F. Laminar separation — a local asymptotic flow description for constant pressure downstream//AGARD Conf. Proc. № 168, Flow Separation. Gottingen, 1975. Pap. № 4. 10 p.
30. Сычев В. В. Асимптотическая теория отрывных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 20—30.
31. Sarpkaya T. On stationary and travelling vortex breakdowns//J. Fluid Mech. 1971. V. 45. Pt 3. P. 545—559.

Москва

Поступила в редакцию
15.XI.1991