

УДК 532.517.4

© 1993 г. М. В. УСТИНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ МЕТОДОМ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Субгармонический режим ламинарно-турбулентного перехода впервые обнаружен в эксперименте [1]. До этого был известен другой тип перехода, подробно описанный в [2] и впоследствии названный клебановским. Субгармонический переход возникает при сравнительно малых возмущениях, вносимых в поток, и отличается от клебановского наличием половинной частоты в спектре возмущений и расположением λ -образных вихревых структур [1]. Для объяснения механизма этого перехода Крайком предложена модель симметричного триплета, состоящего из прямой волны и находящихся с ней в резонансе двух наклонных волн половинной частоты (субгармоник). Случай неточного резонанса и влияние непараллельности течения исследован в [4, 5]. В [3—5] предполагалось, что зависимость пульсаций скорости от поперечной координаты для компонент триплета соответствует собственным функциям уравнения Орра — Зоммерфельда, а развитие триплета описывается амплитудными уравнениями.

Другая модель, предположенная Гербертом [6], основана на решении задачи на собственные значения для субгармонических возмущений при периодическом основном течении, являющемся суперпозицией течения Пуазейля и плоской волны Толлмина — Шлихтинга конечной амплитуды. Эта модель дает возмущения, существенно отличные от мод уравнения Орра — Зоммерфельда.

В соответствии с моделями Крайка и Герберта выделяют *S*- и *H*-механизмы перехода. Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию субгармонического перехода [7, 8], вопрос о том, какой механизм наблюдается в эксперименте, остается открытым.

В данной работе методом прямого численного моделирования исследуется субгармонический переход в плоском канале с целью выяснения его механизма.

1. Численный метод. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале шириной $2L$. Течение вызвано градиентом давления, направленным вдоль оси X . Оси Z и Y направим перпендикулярно стенкам канала и в трансверсальном направлении. В качестве масштабов для координат и скорости используем полуширину канала L и скорость в его центре при течении Пуазейля u_{00} . Течение в канале описывается уравнениями Навье — Стокса с условиями прилипания на стенках

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{V} = - \text{grad } \Pi + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V}$$
$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$\Pi = P + \frac{\mathbf{V}, \mathbf{V}}{2}, \quad P = - \frac{2}{R} x + p$$

Здесь $\mathbf{V} = \{U_0(z) + u, v, w\}$ — вектор скорости, P — давление, $U_0(z) = 1 - z^2$ — профиль скорости в течении Пуазейля, u, v, w, p — пульсации составляющих скорости и давления, $R = u_{00}L/\nu$ — число Рейнольдса. В направлении осей X и Y течение считается периодическим с периодами $L_x = 2\pi/\alpha$ и $L_y = 2\pi/\beta$ соответственно.

Пульсации скорости и давления представим в виде ряда Фурье по однородным переменным

$$q = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [q_{mn}(z, t) e^{i(\alpha x + n\beta y - c(t)t)} + (\text{с. с.})]$$

$$q = \{u, v, w, p\}, \quad q_{mn} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, p_{mn}\}$$

Здесь и далее (с. с.) означает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому.

Каждая гармоника этого ряда представляет собой бегущую волну с медленно меняющейся со временем амплитудой $q_{mn}(z, t)$. Фазовая скорость волны $c(t)$ предполагается одинаковой для всех гармоник и также медленно меняется со временем.

Аналогичное представление используется в слабонелинейной теории, описывающей развитие возмущений на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода, где $|q_{mn}| \ll 1$ [4, 5]. В этой теории получаются оценки для характерного времени изменения амплитуд и фазовой скорости волн в зависимости от величины амплитуды, числа Рейнольдса и других параметров. В случае пульсаций конечной амплитуды, рассматриваемом в данной работе, медленная зависимость амплитуд и фазовой скорости гармоник от времени не может быть строго обоснованной и является предположением.

Для упрощения задачи будем считать u, w, Π четными, а v — нечетной функциями y . Это предположение часто используется при моделировании развитых турбулентных течений и дает результаты, очень мало отличающиеся от результатов для возмущений общего вида [9].

Представив u, v, w, Π в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \Pi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} u_{0n} \\ w_{0n} \\ p_{0n} \end{pmatrix} (z, t) + \sum_{m=1}^M \left[\begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{im(\alpha x - c(t)t)} + (\text{с. с.}) \right] \right\} \cos n\beta y \quad (1.2)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left\{ v_{0n}(z, t) + \sum_{m=1}^M [v_{mn}(z, t) e^{im(\alpha x - c(t)t)} + (\text{с. с.})] \right\} \sin n\beta y$$

и подставляя эти разложения в уравнения Навье — Стокса (1.1), получим уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{mn}}{\partial t} &= -im\alpha (U_0 - c^*) u_{mn} - U_0' w_{mn} - im\alpha p_{mn} + \\ &+ \frac{1}{R} [u_{mn}'' - (m^2\alpha^2 + n^2\beta^2) u_{mn}] + F_{mn}^u \\ \frac{\partial v_{mn}}{\partial t} &= -im\alpha (U_0 - c^*) v_{mn} + n\beta p_{mn} + \frac{1}{R} [v_{mn}'' - (m^2\alpha^2 + n^2\beta^2) v_{mn}] + F_{mn}^v \\ \frac{\partial w_{mn}}{\partial t} &= -im\alpha (U_0 - c^*) w_{mn} - p_{mn}' + \frac{1}{R} [w_{mn}'' - (m^2\alpha^2 + n^2\beta^2) w_{mn}] + F_{mn}^w \\ im\alpha u_{mn} - n\beta v_{mn} + w_{mn}' &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь штрих обозначает производную по z , $c^* = c + dc/dt$, $F_{mn}^u, F_{mn}^v, F_{mn}^w$ — гармоники нелинейных членов, определяемые из разложений

$$\mathbf{F} = -\text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{F^u, F^v, F^w\}$$

$$\begin{pmatrix} F^u \\ F^w \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} F_{0n}^u \\ F_{0n}^w \end{pmatrix} (z, t) + \sum_{m=1}^M \left[\begin{pmatrix} F_{mn}^u \\ F_{mn}^w \end{pmatrix} (z, t) e^{im(\alpha x - ct)} + (\text{с. с.}) \right] \right\} \cos n\beta y$$

$$F^v = \sum_{n=1}^N \left\{ F_{0n}^v(z, t) + \sum_{m=1}^M [F_{mn}^v(z, t) e^{im(\alpha x - ct)} + (\text{с. с.})] \right\} \sin n\beta y$$

Уравнения импульсов в (1.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_{mnl}}{\partial t} = L_{mnl}(f_{mnl} \dots f_{mnl}) + F_{mnl}(u, v, w), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

$$f_{mnl} = u_{mn}, \quad f_{mn2} = v_{mn}, \quad f_{mn3} = w_{mn}, \quad f_{mn4} = p_{mn}$$

где L_{mnl} — линейный относительно f_{mnl} оператор, $f_{mnl} = F_{mnl}^u$, $F_{mn2} = F_{mn}^v$; $F_{mn3} = F_{mn}^w$ — нелинейные члены. Запись $F_{mnl}(u, v, w)$ означает, что нелинейные члены зависят от всех гармоник компонент скорости.

Для аппроксимации (1.4) по времени использовалась схема

$$\frac{f_{is}^{k+1} - f_{is}^k}{\tau} = L_i(f_{1s}^{k+1/2} \dots f_{4s}^{k+1/2}) + F_i(u_{s-1}^{k+1/2}, v_{s-1}^{k+1/2}, w_{s-1}^{k+1/2}) \quad (1.5)$$

$$f_{is}^{k+1/2} = \frac{1}{2}(f_{is}^{k+1} + f_{is}^k), \quad f_{i0}^{k+1} = f_{is}^k$$

где τ — шаг по времени, индекс k обозначает номер временного слоя, индексы m, n для простоты опущены. Решение на $(k+1)$ -м — временном слое ищется путем итераций и индекс s обозначает номер итерации. Схема (1.5) имеет второй порядок точности, абсолютно устойчива в линейном приближении и при условии сходимости итераций эквивалентна схеме Кранка — Николсона. В дальнейших расчетах использовался вариант схемы с фиксированным числом итераций, равным 3.

Для аппроксимации решения по пространственной переменной использовался метод коллокаций. В качестве узлов коллокации выбирались нули полинома Якоби $P_Q^{(1,1)}(z)$. Во всех расчетах число узлов Q выбиралось равным 31. Метод пространственной аппроксимации идентичен описанному в [10]. Нелинейные члены вычислялись методом свертки [11].

В отличие от [8], где уравнения Навье — Стокса интегрировались в движущейся с постоянной скоростью системе отсчета, предлагаемый метод позволяет использовать переменную фазовую скорость $c(t)$. Зависимость $c(t)$ подбиралась в ходе решения из условия обеспечения наиболее медленной зависимости $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, p_{mn}$ от времени. Для этого на каждом шаге по времени находились изменения аргументов амплитуд гармоник Δ_{mn}

$$\Delta_{mn} = \int_{-1}^1 \arg \left(\frac{w_{mn}^{k+1}(z)}{w_{mn}^k(z)} \right) dz, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N$$

Затем по известным фазовым скоростям гармоник на k -м слое находились фазовые скорости на $(k+1)$ -м слое c_{mn}^{k+1} по формулам

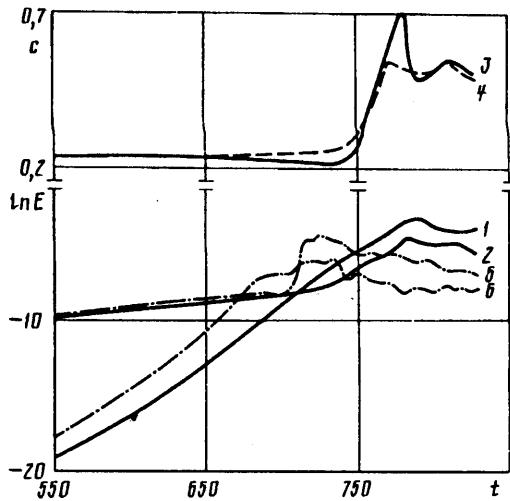
$$\omega_{mn}^k = m\alpha c^k, \quad \omega_{mn}^{k+1} = \omega_{mn}^k - \Delta_{mn}/\tau, \quad c_{mn}^{k+1} = m\alpha \omega_{mn}^{k+1}$$

После этого определялось значение c , дающее минимум максимуму отклонения частот гармоник ω_{mn}^{k+1} от предписанного значения $m\alpha c$, т. е. $\min_c D(c)$, где $D(c) = \max_{m,n} |m\alpha c - \omega_{mn}^{k+1}|$. Это значение

c считалось фазовой скоростью на слое $k+1$, c^k . В выражении для c^k в (1.3) членом dc/dt пренебрегали и считали $c^k = c^{k+1}$. Величина $D(c^{k+1})$ использовалась для автоматического выбора шага τ . Для этого сначала определялся минимальный период пульсаций амплитуд $w_{mn}(t)$, $T = (2\pi/D(c^{k+1}))\tau^k$. Затем находился шаг по времени τ^{k+1} по формуле $\tau^{k+1} = T/N$, где N — число шагов на период. Путем проведения методических расчетов установлено, что для получения решения хорошего качества минимальное значение $N = 30$.

Описанная процедура автоматического выбора шага по времени позволяет использовать очень большой шаг ($\tau = 5$) в начальной стадии развития возмущений, когда фазовые скорости всех гармоник близки между собой, и уменьшать шаг по мере приближения к развитому турбулентному течению.

С целью тестирования описанного метода решения уравнений Навье — Стокса повторен расчет развитого турбулентного течения в канале при $R = 5000$, $\alpha = 1,25$, $\beta = 2,0$, $M = 4$ и $N = 4$ из [9]. По сравнению с результатами [9] отличие среднего расхода жидкости через сечение канала Q составило 1,5%, максимальное отличие профиля осредненной скорости — 5%, напряжений Рейнольдса τ_{xz} — 7%, что позволяет говорить о неплохом совпадении результатов. Следует заметить, что используемый



Фиг. 1

метод интегрирования уравнений Навье — Стокса позволил проделать этот расчет с шагом по времени $\tau \sim 0,5$, на порядок превосходящим шаг, примененный в [9].

2. Развитие изолированных триплетов. Простейшей моделью, описывающей субгармонический режим перехода, является изолированный симметричный триплет, состоящий из основной волны $q_1(z)\exp[i(\alpha_1 x - \omega_1 t)]$ и пары косых волн равной амплитуды (субгармоник), имеющих удвоенный период по оси X :

$$q_{1/2} \exp [i (\alpha_{1/2} x - \omega_{1/2} t \pm \beta y)], \quad \alpha_{1/2} = \alpha_1 / 2.$$

В настоящей работе исследуется развитие изолированного триплета при конечных амплитудах волн. Для этого в представлении для пульсаций скорости и давления (1.5) выбирается $M = 2$ и $N = 1$. Основной волне соответствует гармоника с $m = 2, n = 0$, паре наклонных волн — гармоника с $m = 1, n = 1$. Гармоники основной волны с волновыми числами $2\alpha_1, 3\alpha_1, \dots$ и комбинационные гармоники $3/2\alpha_1, 5/2\alpha_1, \dots$ и другие не учитываются. Влияние этих гармоник на полученные результаты будет исследовано в конце этого раздела.

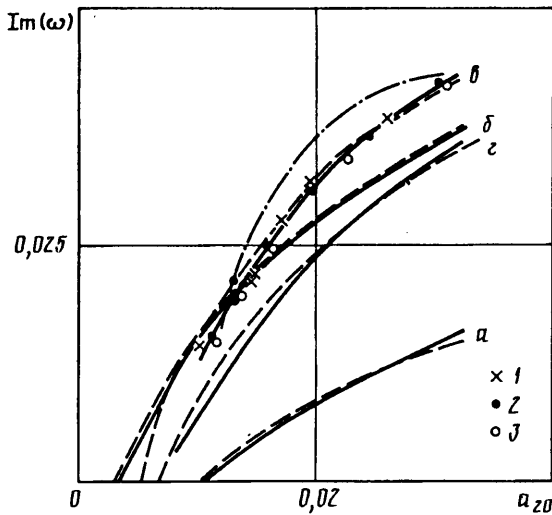
Рассмотренная здесь модель описывает переход, наблюдаемый в эксперименте при контролируемом возбуждении основной волны и субгармоники с заданным поперечным волновым числом β [7].

Перед изложением результатов введем определение энергий E_{mn} и амплитуд a_{mn} гармоник

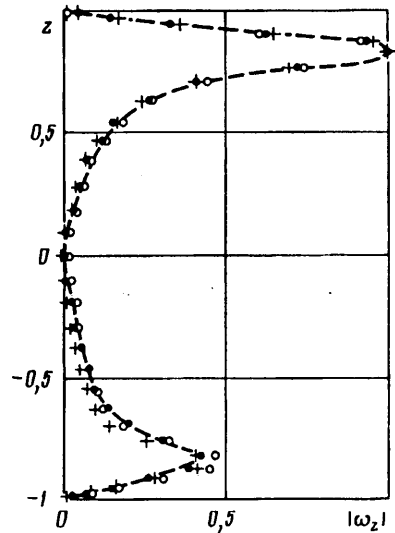
$$E_{mn} = \int_{-1}^1 (|u_{mn}|^2 + |v_{mn}|^2 + |w_{mn}|^2) dz, \quad a_{mn} = \max_z (\sqrt{|u_{mn}|^2 + |v_{mn}|^2})$$

С целью изучения основных закономерностей развития триплетов проведена серия расчетов при $\alpha_1 = 2\alpha = 1, R = 10\,000$ и различных β и начальных условиях. Для задания начальных условий для основной волны во всех расчетах использовалась собственная функция первой моды уравнения Орра — Зоммерфельда (моды здесь и далее нумеруются в порядке уменьшения $\text{Im}(\omega)$). При заданных параметрах α, R основная волна является возрастающей ($\omega = 0,237 + i0,0037$), резонанс с субгармониками имеет место при $\beta = \beta_r = 0,67$.

Результаты типичного расчета, выполненного при $\beta = 1,5$, начальных амплитудах основной волны и субгармоник $a_{20} = 10^{-3}, a_{11} = 2 \cdot 10^{-4}$ и начальных условиях



Фиг. 2



Фиг. 3

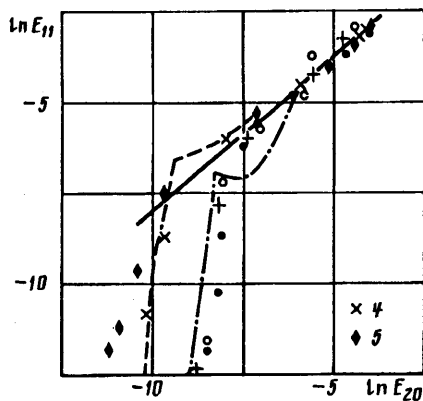
для субгармоник, задаваемых первой модой уравнения Орра — Зоммерфельда, представлены на фиг. 1. Зависимости энергии основной волны E_{20} и субгармоники E_{11} от времени показаны сплошными кривыми 2 и 1, аналогичные зависимости их фазовых скоростей c_{20} и c_{11} — сплошной и штриховой кривыми 3 и 4. В развитии триплета можно выделить три характерных этапа. На первом этапе происходит параметрическое усиление субгармоник на фоне основной волны. Обратное влияние субгармоник на основную волну очень мало и последняя сохраняет постоянный инкремент нарастания. Фазовые скорости основной волны и субгармоник близки и остаются практически постоянными.

Второй этап наступает, когда энергия субгармоник становится сравнимой с энергией основной волны. Он характеризуется тем, что основная волна и субгармоники влияют друг на друга и образуют единую систему. При этом наблюдается резкое увеличение скорости роста основной волны. Фазовые скорости основной волны и субгармоник, оставаясь близкими между собой, резко возрастают. Это является свидетельством существенной перестройки формы профиля пульсаций скорости основной волны и субгармоник. Этот этап уже полностью нелинеен и не может быть описан с достаточной точностью в рамках амплитудных уравнений.

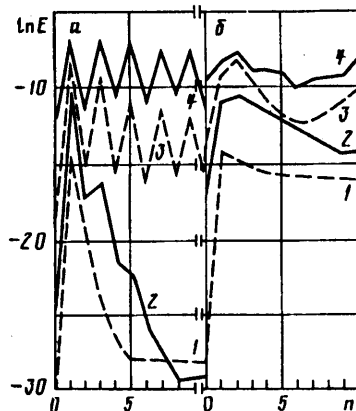
Третий этап характеризуется достаточно хаотическими изменениями энергий и фазовых скоростей основной волны и субгармоник. В реальном течении ему соответствует возникновение хаоса и заполнение энергетического спектра. Поведение течения на этом этапе не может быть адекватно описано моделью изолированного триплета и поэтому третий этап для триплета здесь подробно не рассматривается.

Как уже отмечалось выше, на первом этапе происходит параметрическое усиление субгармоник. Этот процесс изучался в [6] в рамках задачи на собственные значения для субгармонических возмущений. Согласно результатам [6], инкремент нарастания субгармоники при заданном β , зависит только от амплитуды основной волны a_{20} .

На фиг. 2 кривыми a , b , c , d показаны зависимости инкрементов нарастания субгармоник от амплитуды основной волны a_{20} при $\beta = 0,3, 0,67, 1,5, 3$ соответственно. Сплошными кривыми показаны результаты, полученные из прямого моделирования по формуле $\omega_i = 1/2 d \ln E_{11} / dt$, штриховой кривой — результаты



Фиг. 4



Фиг. 5

решения задачи на собственные значения методом, близким к предложенному в [6]. При $\beta = 1,5$ на фиг. 2 представлены результаты трех различных расчетов при $a_{20}(0) = 10^{-3}$, $a_{11}(0) = 2 \cdot 10^{-4}$, различающиеся начальными условиями для субгармоник. Точки 1 соответствуют начальным условиям, задаваемым первой модой уравнения Орра — Зоммерфельда, точки 2 и 3 — начальным условиям, задаваемым 7-й и 15-й модами уравнения для вертикальной завихренности (сквайровские моды). При других β начальные условия для субгармоник соответствовали первой моде уравнения Орра — Зоммерфельда.

На фиг. 3 показаны зависимости амплитуд вертикальной завихренности субгармоник $|\omega_{11}(z)|$, рассчитанные при $\beta = 1,5$ с различными начальными условиями в близкие моменты времени $t \sim 650$ (обозначения аналогичны фиг. 2). Штриховой кривой показана аналогичная зависимость для собственного решения задачи [6] при амплитуде $a_{20} = 0,027$, соответствующей $t = 650$.

Из фиг. 2 и 3 видно хорошее соответствие результатов прямого моделирования при различных начальных условиях и результатов, полученных в рамках модели Герберта [6]. Это означает, что при любых начальных условиях для субгармоник в присутствии основной волны выделяются и усиливаются субгармонические возмущения строго определенного вида, соответствующие собственному решению задачи [6]. Следует отметить, что эти возмущения асимметричны относительно центра канала и сильно отличаются как от мод уравнения Орра — Зоммерфельда, так и от сквайровских мод. Качественно аналогичные результаты получены и для $\beta = 0,67$, соответствующего резонансу.

Из изложенного можно сделать вывод, что на первом этапе реализуется механизм усиления субгармоник, предложенный Гербертом, и этот механизм не может быть описан в рамках амплитудных уравнений [3—5], соответствующих модели Крайка.

С целью выявления общих закономерностей, присущих второму этапу развития триплета, на фиг. 4 показаны результаты различных расчетов при $\beta = 1,5$ в виде зависимости $\ln E_{11}$ от $\ln E_{20}$ для конечной стадии развития триплетов. Точки 4 и 5 соответствуют начальным условиям, заданным первой модой уравнения Орра — Зоммерфельда при $a_{20}(0) = a_{11}(0) = 2 \cdot 10^{-2}$ и при $a_{20}(0) = 2 \cdot 10^{-3}$, $a_{11}(0) = 8 \cdot 10^{-3}$, остальные обозначения аналогичны фиг. 2. Из фиг. 4 видно, что при $\ln E_{11} > -6$ точки, соответствующие всем расчетам, группируются вблизи единой сплошной прямой. Это означает, что на втором этапе развития триплета существует жесткая связь между амплитудами основной волны и субгармоник. Наличие такой связи позволяет предполагать, что на этом этапе формируется некоторая универсальная структура, состоящая из сильно

взаимодействующих между собой компонентов триплета. Развитие этой структуры приводит к резкому росту энергий основной волны и субгармоник. При достижении этими энергиями пороговых значений $\ln E_{20} \sim 4$ и $\ln E_{11} \sim 3$ происходит разрушение структуры и хаотизация течения.

Для изучения влияния высших гармоник на результаты моделирования развития триплета выполнены два расчета при $\alpha_1 = 2\alpha = 1$, $R = 10\,000$, $\beta = 1,5$ с несколько большим числом гармоник ($M = 4$, $N = 4$). В этих расчетах начальные условия для основной волны и субгармоник задавались первой модой уравнения Орра — Зоммерфельда. Начальные амплитуды в первом расчете имели значения $a_{11}(0) = 2 \cdot 10^{-4}$, $a_{20}(0) = 10^{-3}$, во втором $a_{11}(0) = 2 \cdot 10^{-4}$, $a_{20}(0) = 10^{-2}$, начальные условия для остальных гармоник нулевые. Результаты первого расчета показаны штрихпунктирными кривыми на фиг. 1, 2, 4 (зависимости E_{11} и E_{20} от t на фиг. 1 показаны кривыми 5 и 6). Результаты второго расчета показаны штриховой кривой на фиг. 4.

Из фиг. 1 видно, что учет дополнительных гармоник не приводит к качественному изменению зависимостей $E_{11}(t)$ и $E_{20}(t)$. На этапе параметрического усиления наличие дополнительных гармоник приводит к небольшому увеличению инкрементов нарастания субгармоник (см. фиг. 2). Учет дополнительных гармоник значительно сильнее сказывается на втором нелинейном этапе развития триплетов. На фиг. 4 кривые, соответствующие двум последним расчетам, несколько отклоняются от универсальной зависимости, показанной сплошной прямой линией, и подходят к ней только перед самой хаотизацией течения. Последняя происходит при меньших энергиях основной волны и субгармоники: $\ln E_{11} \sim 4,5$, $\ln E_{20} \sim 5,5$.

3. Субгармонический переход при «естественных» начальных условиях. В большинстве экспериментов по изучению ламинарно-турбулентного перехода контролируемым образом задается только основная волна. Субгармонические возмущения, вносимые в поток, обычно имеют широкий непрерывный спектр по β . Для моделирования такой ситуации выполнены два расчета, в которых в качестве начальных условий выбиралась основная волна и достаточно большое количество субгармоник с разными β и одинаковыми начальными амплитудами. В этих расчетах $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,67$, $R = 10\,000$, $M = 8$, $N = 10$. В качестве начальных условий для субгармоник использовалась первая мода уравнения Орра — Зоммерфельда, начальные амплитуды субгармоник в обоих расчетах одинаковы: $a_{1n}(0) = 10^{-3}$, $n = 1, \dots, N$. Начальная амплитуда основной волны в первом расчете $a_{20}(0) = 10^{-3}$, во втором — 10^{-2} . Из решения задачи на собственные значения [6] следует, что пороговое значение a_{20} , начиная с которого усиливаются субгармоники составляет $5 \cdot 10^{-3}$. Начальная амплитуда основной волны в первом расчете меньше, а во втором существенно больше пороговой.

Результаты расчетов в виде зависимостей энергий субгармоник от номера n (энергетические спектры) в различные моменты времени представлены на фиг. 5. Кривым 1—4 фиг. 5, а соответствуют значения $t = 330, 450, 530, 570$, на фиг. 5, б — значения $t = 10, 70, 96, 109$. В первом расчете при достижении основной волной пороговой амплитуды начинают усиливаться только субгармоники с $\beta = 0,67$, соответствующие резонансу. В дальнейшем, начиная с $t = 450$, в результате нелинейных взаимодействий генерируются субгармоники с четными n . Это приводит к заполнению спектра, который до конца расчета сохраняет характерную пилообразную форму.

Существенно отличная картина наблюдается во втором расчете (фиг. 5, б). Здесь сразу начинает усиливаться широкий диапазон субгармоник. Сильнее всего усиливаются субгармоники с $n = 2$, $n\beta = 1,34$. В конце расчета спектр также заполняется, но зависимость $E(n)$ остается гладкой. Поведение спектра в этом расчете качественно согласуется с результатами численного моделирования перехода в плоском канале при $R = 5000$, $\alpha = 1,12$ [8].

Результаты двух последних расчетов хорошо соответствуют выводам [6], где

показано, что при увеличении амплитуды основной волны расширяется интервал β , в котором усиливаются субгармоники, и максимум усиления сдвигается в сторону больших β .

Таким образом, можно сделать вывод, что развитие возмущений на этапе их параметрического усиления и в случае «естественных» начальных условий описывается моделью Герберта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 42—50.
2. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability//J. Fluid Mech. 1962. V. 12. № 1. P. 1—34.
3. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers//J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 2. P. 393—413.
4. Зельман М. Б., Масленникова И. И. Об эффектах резонансных взаимодействий волновых возмущений в пограничном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 23—30.
5. Nayfeh A. H., Bozattly A. N. Nonlinear interactions in boundary layers//AIAA Pap., 1979. № 1456.
6. Herbert T. Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances//Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 871—874.
7. Corke T. C., Mangano R. A. Resonant growth of three-dimensional modes in transitioning Blasius boundary layers//J. Fluid Mech. 1989. V. 209. P. 93—150.
8. Singer B., Reed H. L., Ferziger J. H. Investigation of the effects of initial disturbances on plane channel transition//AIAA Pap. 1986. № 433. 10 p.
9. Rozhdestvensky B. L., Simakin I. N. Secondary flow in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows//J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 261—289.
10. Рождественский Б. Л., Стойнов М. И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье-Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии: Препринт № 119. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 1987. 28 с.
11. Пономарев С. Г., Стойнов М. И. Решение уравнений Навье-Стокса проекционными методами; вычисление нелинейных членов: Препринт № 58. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1987. 17 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.I.1992