

УДК 532.516.011:532.613.4/5

© 1993 г. О. В. БАТОВА, Н. М. ЛИБЕРМАН, Г. А. ШАПОШНИКОВА

ВЛИЯНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ПЕРИМЕТРОВ СМАЧИВАНИЯ И ТЕПЛОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В КАПИЛЛЯРАХ

Исследуются гидродинамические течения, возникающие при механических колебаниях капилляра, заполненного несмешивающимися жидкостями. У герметически запаянных концов капилляра содержатся пузырьки воздуха. Предполагается, что периметры смачивания границ раздела несмешивающихся жидкостей могут скользить относительно стенок капилляра. Приведены результаты численных расчетов для ртутного электрокапиллярного преобразователя [1—4], представляющего собой капилляр, заполненный водой и ртутью. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных амплитудно-частотных характеристик — зависимостей амплитуды электрической разности потенциалов от частоты колебаний.

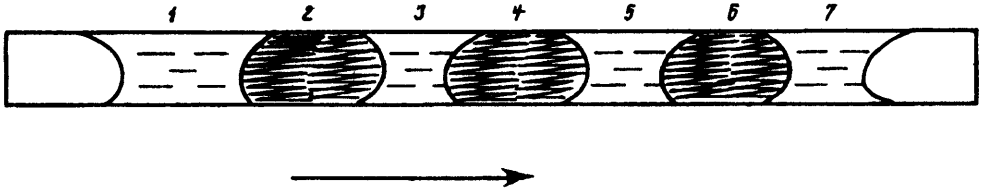
Расчет течений в капиллярах, заполненных несмешивающимися жидкостями, и в ртутных электрокапиллярах преобразователя без учета скольжения периметров смачивания и диссипации за счет теплообменных процессов приведен в [5, 6]. В [5] приведены ссылки на работы по осциллирующим гидродинамическим течениям.

1. Уравнения и граничные условия, описывающие гидродинамические течения жидкости в капилляре. Рассмотрим капилляр, герметически запаянный с обоих концов и заполненный несмешивающимися жидкостями. На концах капилляра имеются пузырьки воздуха. Капилляр совершает гармонические колебания вдоль оси z с заданной частотой ω и малой амплитудой z_0 (фиг. 1).

Для описания гидродинамических течений, возникающих в колеблющемся капилляре, будем использовать цилиндрическую систему координат, связанную с капилляром. Для жидкостей, предполагаемых несжимаемыми, используем систему уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r^{(k)} + \frac{\partial}{\partial t} v_z^{(k)} &= 0 \\ \rho^{(k)} \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r^{(k)} + v_r^{(k)} \frac{\partial}{\partial r} v_r^{(k)} + v_z^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} v_r^{(k)} \right) &= \\ = - \frac{\partial}{\partial r} p^{(k)} + \mu^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_r^{(k)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r^{(k)} - \frac{1}{r^2} v_r^{(k)} \right) & \quad (1.1) \\ \rho^{(k)} \left(\frac{\partial}{\partial t} v_z^{(k)} + v_r^{(k)} \frac{\partial}{\partial r} v_z^{(k)} + v_z^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} v_z^{(k)} \right) &= \\ = - \frac{\partial}{\partial z} p^{(k)} + \mu^{(k)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_z^{(k)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z^{(k)} \right) - \rho^{(k)} \ddot{s} & \\ \ddot{s} = -z_0 \omega^2 \sin \omega t & \end{aligned}$$

Здесь v_r , v_z — осевая и радиальная координата скорости, p , ρ , μ — давление, плотность и вязкость жидкости; \ddot{s} — ускорение системы координат, связанной с капилляром. Верхним индексом (k) обозначены параметры, относящиеся к k -й несмешивающейся жидкости, $k = 1, 2, \dots, N$. Области, занятые воздухом, обозначим



Фиг. 1

индексами 0 и $N+1$. Рассматриваются тонкие капилляры, когда выполнено соотношение $a \ll \sqrt{2\sigma/\rho g}$ (g — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, a — радиус капилляра), силу тяжести в этом случае можно не учитывать.

Процессы расширения и сжатия воздуха в пузырьках на концах капилляра будем описывать системой уравнений (индексы 0 и $N+1$ опущены)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho_z v_r + \frac{\partial}{\partial z} \rho_z v_z &= 0 \\ \rho_z \left(\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r \right) &= - \frac{\partial}{\partial r} p_z \\ \rho_z \left(\frac{\partial}{\partial t} v_z + v_r \frac{\partial}{\partial r} v_z + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z \right) &= - \frac{\partial}{\partial z} p_z - \rho_z \ddot{s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_z \left(U + \frac{\rho_z v_z^2}{2} \right) \right] &= - \operatorname{div} \left[\rho_z v_z \left(U + \frac{\rho_z v_z^2}{2} \right) + v_r p_z + q \right] \\ q &= -\lambda \nabla T, \quad p_z = \rho_z RT, \quad U = c_v T \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ρ_z , v_z , p_z , T — плотность, скорость, давление и температура газа, q — вектор потока тепла, λ , R , c_v — коэффициент теплопроводности, газовая постоянная и теплоемкость воздуха при постоянном объеме; U — внутренняя энергия единицы массы воздуха.

В [5] вместо системы уравнений (1.2) использовалось условие политропности процессов расширения-сжатия $p_z = c \rho_z^n$.

Выпишем граничные условия. На стенке капилляра для жидких сред зададим условия непротекания и прилипания жидкости, на подвижных границах раздела воздух — жидкость, жидкость — жидкость — условия непрерывности скорости и тензора напряжений, а также кинематические условия

$$r = a, \quad v_r^{(k)} = 0, \quad v_z^{(k)} = 0 \quad (1.3)$$

$$z = z_s^{(k)}(r, t), \quad v_z^{(k)} = v_z^{(k-1)}, \quad v_r^{(k)} = v_r^{(k-1)}$$

$$- \{p\} + \left\{ \mu \sin^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cos^2 \varphi \frac{\partial v_z}{\partial z} + \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\} = 2H^{(k)} \sigma^{(k)}$$

$$\left\{ \mu \left(\cos^2 \varphi \frac{\partial v_r}{\partial r} + \sin^2 \varphi \frac{\partial v_z}{\partial z} + \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) \right\} = 0 \quad (1.4)$$

$$2H^{(k)} = - \frac{z_s^{(k)''}}{(1 + z_s^{(k)'}{}^2)^{3/2}} - \frac{z_s^{(k)'}}{r (1 + z_s^{(k)'}{}^2)^{3/2}}$$

$$z_s^{(k)'} = \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial r}, \quad z_s^{(k)''} = \frac{\partial^2 z_s^{(k)}}{\partial r^2}$$

$$v_z^{(k)} = \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial t} + v_r^{(k)} \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial r}$$

Здесь $H^{(k)}$ — средняя кривизна поверхности $z_s^{(k)}$; $\varphi^{(k)}$ — угол между нормалью к поверхности $z_s^{(k)}$ и осью z , $\sigma^{(k)}$ — коэффициент поверхностного натяжения; для любого параметра A обозначено $\{A\} = A^{(k)} - A^{(k-1)}$.

Граничные условия к последнему уравнению (1.4) зададим следующим образом:

$$r = 0, \quad \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial r} = 0; \quad r = a, \quad \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial r} = \cos \theta^{(k)}, \quad \frac{\partial z_s^{(k)}}{\partial t} = v_{sl}^{(k)} \quad (1.5)$$

Здесь θ — динамический угол смачивания.

Первое условие (1.5) следует из симметрии задачи; второе условие (1.5) — определение угла θ .

Возможен различный вид зависимости скорости скольжения $v_{sl}^{(k)}$ от динамического угла смачивания θ [7—10]. При исследовании растекания капли на твердой подложке [7, 9, 10] предполагалось, что скорость скольжения линии контакта является некоторой функцией динамического угла смачивания. Наиболее часто при решении задач с движущимися линиями контакта используется степенная зависимость. При малых отклонениях динамического угла смачивания от его равновесного значения скорость скольжения линии контакта линейно зависит от изменения угла смачивания [10].

Имея в виду малые изменения угла θ , в дальнейшем будем использовать следующую зависимость:

$$v_{sl}^{(k)}(\theta) = (-1)^k \kappa^{(k)} \delta \theta^{(k)} \quad (1.6)$$

$$\delta \theta^{(k)} = \theta^{(k)} - \theta_0^{(k)}, \quad \kappa^{(k)} = O(1)$$

При движении периметра смачивания относительно стенок капилляра условие прилипания жидкости к стенкам капилляра (первая формула (1.3)) вблизи периметра смачивания не выполнено. При решении задач с движущимися линиями контакта обычно используют условия локального проскальзывания [7—10]. Вдали от тройной линии контакта воздух — жидкость — стекло (жидкость — жидкость — стекло) выполнены условия прилипания жидкости, а вблизи линии контакта на расстояниях $\leq \beta'$; $\beta' \sim a$, где a — радиус капилляра, задаются другие условия. В [9] условия вблизи линии контакта задаются в виде

$$v_z = v_z(z), \quad |z - z_s(0)| \leq \beta'; \quad v_z = 0, \quad |z - z_s(0)| > \beta'$$

$$v_z = 0, \quad z = z_s(0) \pm \beta'; \quad v_z = v_{sl}, \quad z = z_s(0) \quad (1.7)$$

Условие (1.6) означает, что скорость скольжения жидкости относительно стенки капилляра линейно зависит от изменения динамического угла относительно его равновесного значения. В зависимости от величины коэффициента κ имеют место различные предельные случаи граничного условия (1.6).

При $\kappa = O(\delta\theta)$, $v_{sl} = O(\delta\theta^2)$ и при малых отклонениях $\delta\theta$ можно считать, как в [5], что выполнено условие прилипания периметра смачивания к стенкам капилляра. В случае $\kappa^{-1} = O(\delta\theta) = B\delta\theta$, $B = \text{const}$, при $\delta\theta \rightarrow 0$ $v_{sl} \rightarrow B^{-1}$, т. е. бесконечно малые изменения динамического угла приводят к конечным значениям скорости скольжения и можно считать, что скольжение происходит с некоторой скоростью без изменения угла смачивания.

На стенках капилляра для воздуха запишем условия непротекания

$$r = a, \quad v_{gr} = 0 \quad (1.8)$$

Граничные условия для определения температуры T в воздушных пузырьках зададим следующими:

$$r = a, \quad T = T_0; \quad r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (1.9)$$

Второе условие (1.9) следует из симметрии задачи. Так как теплопроводность

стекла и жидкостей превышает теплопроводность воздуха, поэтому естественно предположить, что на границе воздух — стекло ($r = a$) температура воздуха равна температуре окружающей среды и постоянна.

Из условия несжимаемости жидкости можно получить равенство между изменениями объемов воздушных пузырьков $\delta V^{(0)}$ и $\delta V^{(N+1)}$ и объемным расходом Q жидкости во всех областях

$$Q = 2\pi \int_0^a v_z^{(k)} r dr = \frac{\partial \delta V^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial \delta V^{(N+1)}}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\delta V^{(k)} = V^{(k)} - V_0^{(k)}, \quad k = 0, N + 1 \quad (1.10)$$

Здесь V — объем пузырька воздуха, нижним индексом нуль здесь и далее обозначены величины в состоянии покоя (кроме z_0 и $v_0 = z_0 \omega$).

2. Решение задачи. Амплитудно-частотные характеристики. При решении системы уравнений (1.1), (1.2), (1.10) с учетом граничных условий (1.3)—(1.9) будем использовать следующие безразмерные параметры:

$$r^* = \frac{r}{a}, \quad z^* = \frac{z}{l}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad l^{*(k)} = \frac{l^{(k)}}{l}, \quad \sigma^{*(k)} = \frac{\sigma^{(k)}}{\sigma^{(1)}}$$

$$t^* = t\omega, \quad v_0 = \omega z_0, \quad \rho_0 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} l^{*(k)}, \quad \eta^{*(k)} = \frac{\eta^{(k)}}{\eta^{(1)}}$$

$$p^{*(k)} = \frac{p^{(k)} - p_0^{(k)}}{p_{ch}}, \quad p_{ch} = \frac{\gamma p_{g0} \pi a^2 z_0}{V_0}, \quad V_0 = \frac{1}{2} (V_0^{(0)} + V_0^{(N+1)})$$

$$\delta H^{*(k)} = \frac{(H^{(k)} - H_0^{(k)}) a^2}{z_0}, \quad p_s^* = \frac{p_s - p_{g0}}{p_{g0}}, \quad \rho_s^* = \frac{\rho_s - \rho_{g0}}{\rho_{g0}}$$

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad V^* = \frac{\delta V}{\pi a^2 z_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{\pi a^2 v_0}, \quad \omega^* = \frac{\omega a^2}{\eta^{(1)}}$$

$$M = \frac{v_0}{\sqrt{RT_0}}, \quad \kappa^{*(k)} = \frac{\kappa^{(k)} a}{\eta^{(1)}}, \quad \alpha = \frac{\rho_{g0} \eta^{(1)} c_p}{\lambda} \quad (2.1)$$

$$Ca = \frac{\eta^{(1)} \omega a \rho_0}{\sigma^{(1)}}, \quad K = \frac{p_{ch}}{lv_0^2 \rho_0}, \quad P_\sigma = \frac{p_{ch} a^2}{\sigma^{(1)} z_0}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}$$

Здесь l — длина капилляра, $l^{(k)}$ — длина k -й области; за характерное значение p_{ch} принято изменение давления в пузырьке воздуха, которое вырабатывается при адиабатическом сжатии пузырька воздуха, когда объем пузырька изменяется на величину $\pi a^2 z_0$; γ — показатель адиабаты; $V_0^{(0)}$, $V_0^{(N+1)}$ — начальные объемы пузырьков воздуха; $\eta^{(k)}$ — кинематическая вязкость k -й области; Q — расход жидкости; c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении. Характерная кривизна поверхности раздела принималась равной изменению кривизны сферической поверхности при изменении радиуса кривизны на величину z_0 .

В уравнение входят следующие безразмерные параметры: параметр α , который характеризует теплообмен воздуха в пузырьках с окружающей средой; Ca — капиллярное число, равное отношению сил вязких напряжений к капиллярной силе; P_σ — отношение силы давления к капиллярной силе; K — отношение градиента давления, действующего в жидкости, к инерционной силе; ε — отношение радиуса капилляра к его длине.

Система уравнений (1.1), (1.2), (1.10) в нулевом приближении по малому параметру ε при условиях, что $\varepsilon \rightarrow 0$, $z_0 l / a^2 \leq 1$, $Ca \sim 1$, $K \sim 1$, $P_\sigma \sim 1$,

$\varepsilon^{-1} M \rightarrow 0$, имеет вид (верхний индекс k опущен)

$$v_r^* = 0, \quad v_z^* = v_z^*(r^*, t^*), \quad p^* = p^*(r^*, t^*)$$

$$p_z^* = p_z^*(t^*), \quad T^* = T^*(r^*, t^*) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} = -\frac{K}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\eta^*}{\omega^* r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + e^{u^*} \quad (2.3)$$

$$\omega^* \alpha \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial p_z^*}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (V^*(t^*) + \int_{v_0^*} \rho_z^* d\tau) = 0 \quad (2.5)$$

$$p_z^* = \rho_z^* + T^* \quad (2.6)$$

$$Q^* = 2 \int_0^1 v_z^* r^* dr^* = \frac{\partial V^{*(0)}}{\partial t^*} = -\frac{\partial V^{*(N+1)}}{\partial t^*} \quad (2.7)$$

Условия (1.7) в нулевом приближении по ϵ вырождаются в условия прилипания (1.3) и условия равенства скорости жидкости на поверхности капилляра скорости скольжения v_{sl} (последнее условие (1.5)). Остальные граничные условия в этом приближении будут иметь вид

$$r^* = 1, \quad v_r^* = 0, \quad v_z^* = 0 \quad (2.8)$$

$$z^* = z_s^*(r^*, t^*), \quad -P_\sigma \{p^*\} = 2\sigma^* \delta H^* \quad (2.9)$$

$$r^* = 0, \quad \frac{\partial z_s^*}{\partial r^*} = 0; \quad r^* = 1, \quad \frac{\partial z_s^*}{\partial r^*} = \cos \theta \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial z_s^*}{\partial t^*} = (-1)^k \chi^* \delta \theta$$

$$r^* = 1, \quad T^* = 1; \quad r^* = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (2.11)$$

Коэффициент поверхностного натяжения σ^* при колебании предполагается не меняющимся.

Условие (2.9) вместе с третьим равенством (2.2) означает, что с точностью до ϵ давления $p^{*(k)}$, $p^{*(k-1)}$ вблизи границы раздела постоянны, их разность не зависит от радиальной координаты и равна величине $2\sigma^* \delta H^*$. В этом случае естественно предположить, что при движении, как и в состоянии равновесия, граница раздела жидкостей остается сферической, кривизна H^* постоянна вдоль всей границы раздела. Периметр смачивания скользит относительно стенок капилляра со скоростью, пропорциональной изменению угла смачивания. При малых отклонениях от равновесия изменения угла $\delta \theta^{(k)}$, кривизны $H^{*(k)}$ и площади поверхностей менисков (границ раздела жидкостей) $S^{*(k)}$ связаны с изменением объема $V^{*(0)}$ формулами ($k = 1, 2, \dots, N$)

$$\delta \theta^{(k)} = (-1)^k \frac{z_0}{a} (\beta_1^{(k)} + i\beta_2^{(k)}) V^{*(0)}$$

$$\delta H^* = -\frac{a}{z_0} \sin \theta_0^{(k)} \delta \theta^{(k)} = (-1)^k (\beta_1^{(k)} + i\beta_2^{(k)}) \sin \theta_0^{(k)} V^{*(0)}$$

$$S^{*(k)} = (-1)^{k-1} \cos \theta_0^{(k)} (\beta_1^{(k)} + i\beta_2^{(k)}) \beta_r^{(k)} V^{*(0)} \quad (2.12)$$

$$\beta_r^{(k)} = \frac{(1 - \sin \theta_0^{(k)})^2}{\cos^4 \theta_0^{(k)}}, \quad \beta_i^{(k)} = \frac{\kappa^{*(k)}}{\omega^*}, \quad \beta_i^{(k)} = \frac{\beta_r^{(k)}}{\beta^2}$$

$$\beta_2^{(k)} = \frac{\beta_i^{(k)}}{\beta^2}, \quad \beta^2 = \beta_r^{(k)2} + \beta_i^{(k)2}, \quad S^{*(k)} = \frac{S^{(k)} - S_0^{(k)}}{2\pi a z_0}$$

Здесь θ_0 — угол смачивания в состоянии равновесия; $S^{(k)}$ — площадь поверхности мениска k -й границы раздела жидкостей.

Из первых трех уравнений (2.2) и уравнения (2.3) следует

$$\frac{\partial p^{*(k)}}{\partial z^*} = c_k(t)$$

$$\frac{\partial v_z^{*(k)}}{\partial t^*} = -\frac{Kc_k}{\rho^{*(k)}} + \frac{\eta^{*(k)}}{\omega^* r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial v_z^{*(k)}}{\partial r^*} + e^{it^*} \quad (2.13)$$

Аналогично из четвертого уравнения (2.2) и уравнений (2.4) получим ($k=0, N+1$)

$$p_r^{*(k)}(t) = c_k(t) \quad (2.14)$$

$$\omega^* \alpha \left(\frac{\partial T^{*(k)}}{\partial t^*} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial c_k(t)}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial T^{*(k)}}{\partial r^*} = 0$$

Функции $v_z^{*(k)}$, $T^{*(k)}$, c_k ищем в виде

$$v_z^{*(k)}(r^*, t^*) = \langle v_z^{(k)} \rangle(r^*) e^{it^*}, \quad k = 1, \dots, N$$

$$T^{*(k)}(r^*, t^*) = \langle T^{(k)} \rangle(r^*) e^{it^*}, \quad k = 0, N+1$$

$$c_k = \langle c_k \rangle e^{it^*}, \quad k = 0, 1, \dots, N, N+1$$

Для определения функций $\langle v_z^{(k)} \rangle$ и $\langle T^{(k)} \rangle$ имеем уравнения (индексы k , знак $\langle \rangle$ и звездочку далее опускаем)

$$iv_z = \frac{K}{\rho} c + \frac{\eta}{\omega r} \frac{d}{dr} r \frac{dv_z}{dr} + 1, \quad k = 1, \dots, N$$

$$iT + i \frac{\gamma - 1}{\gamma} c = \frac{1}{\omega \alpha r} \frac{d}{dr} r \frac{dT}{dr}, \quad k = 0, N+1 \quad (2.15)$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (2.8) и (2.9) соответственно, имеет вид

$$v_z = \left(\frac{K}{\rho} c - 1 \right) i \left[1 - \psi \left(r \sqrt{\frac{\omega}{\eta}} \right) \right], \quad c \equiv \langle c_k \rangle, \quad k = 1, \dots, N$$

$$T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c^s \left[1 - \psi \left(r \sqrt{\omega^* \alpha} \right) \right], \quad c^s \equiv \langle c_k \rangle, \quad k = 0, N+1$$

$$\psi(r, \tau) = \frac{\text{ber } r\tau + i \text{bei } r\tau}{\text{ber } \tau + i \text{bei } \tau} \quad (2.16)$$

Здесь ber , bei — специальные функции [11].

Из уравнений (2.6)–(2.7) с использованием формул (2.16) и граничных условий (2.9) можно получить выражения для констант и уравнение для определения изменения объемов воздушных пузырьков

$$V^* = V^{*(0)} = -V^{*(N+1)}$$

$$\begin{aligned}
V^* &= \left[K \left(\left(\frac{1}{V_0^{*(0)}} + \frac{1}{V_0^{*(N+1)}} \right) \frac{\gamma}{g(\sqrt{\alpha\omega^*})} + \right. \\
&+ \left. 2 \sum_{k=1}^N \frac{\sigma^{*(k)}}{P_\sigma} \sin \theta_0^{(k)} (\beta_1^{(k)} + i\beta_2^{(k)}) \right) - \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{*(k)} l^{*(k)}}{f(\sqrt{\omega^*}/\eta^{*(k)})} \right]^{-1} \\
f(\tau) &= 1 - \frac{2(\operatorname{ber}' \tau + i \operatorname{ber}' \tau)}{\tau(\operatorname{ber} \tau + i \operatorname{bei} \tau)} \\
g(\tau) &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(\operatorname{ber}' \tau + i \operatorname{ber}' \tau)}{\tau(\operatorname{ber} \tau + i \operatorname{bei} \tau)} \\
\operatorname{ber}' \tau &= \frac{d \operatorname{bei} \tau}{d\tau}, \quad \operatorname{bei}' \tau = -\frac{d \operatorname{ber} \tau}{d\tau}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Амплитуда изменения объемов воздушных пузырьков выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
|V^*| &= \left[\left(\frac{D}{\omega^{*2}} - A \right)^2 + \left(\frac{C}{\omega^{*2}} - B \right)^2 \right]^{-1/2} \\
D &= \frac{\gamma p_0 \pi a^6}{\eta^{(1)2} \rho_0 l V_0} \left[\left(\frac{1}{V_0^{*(0)}} + \frac{1}{V_0^{*(N+1)}} \right) \chi_1 + \sum_{k=1}^N \frac{2\sigma^{*(k)}}{P_\sigma} \beta_1^{(k)} \right] \\
C &= \frac{\gamma p_0 \pi a^6}{\eta^{(1)2} \rho_0 l V_0} \left[\left(\frac{1}{V_0^{*(0)}} + \frac{1}{V_0^{*(N+1)}} \right) \chi_2 + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\sigma^{*(k)}}{P_\sigma} \beta_2^{(k)} \right] \\
A &= \sum_{k=1}^N \rho^{*(k)} l^{*(k)} \operatorname{Re} \frac{1}{f(\sqrt{\omega^*}/\eta^{*(k)})} \\
B &= \sum_{k=1}^N \rho^{*(k)} l^{*(k)} \operatorname{Im} \frac{1}{f(\sqrt{\omega^*}/\eta^{*(k)})} \\
\chi_1 &= \operatorname{Re} \frac{1}{g(\sqrt{\alpha\omega^*})}, \quad \chi_2 = \operatorname{Im} \frac{1}{g(\sqrt{\alpha\omega^*})}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

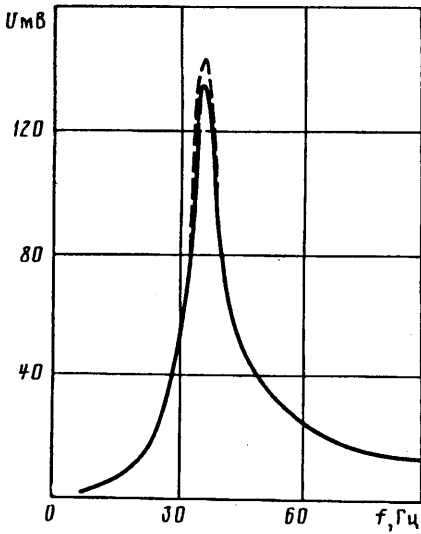
Здесь Re и Im — действительная и мнимая части.

При механических колебаниях капилляра, заполненного несмешивающимися жидкостями, между объемами различных жидкостей возникает электрическая разность потенциалов. Причиной возникновения разности потенциалов является деформация двойных электрических слоев, имеющих на границе раздела жидкостей. Явление возникновения переменной разности потенциалов при механических колебаниях используется в ртутных электрокапиллярных преобразователях. Ртутный электрокапиллярный преобразователь представляет собой стеклянный капилляр, заполненный ртутью и водным раствором электролита. В капле ртути помещена пара электродов, соединенных через прибор, измеряющий возникающую при колебаниях разность потенциалов. Описанное устройство служит для преобразования механических колебаний в электрические. Амплитуда возникающего электрического сигнала зависит от частоты механических колебаний. Эта зависимость называется амплитудно-частотной характеристикой преобразователя.

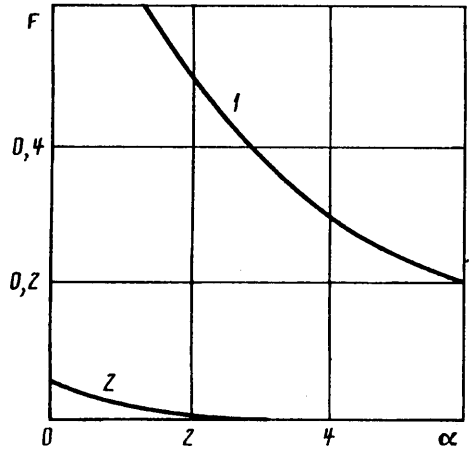
В [6] была получена зависимость измеряемой разности потенциалов от изменения площади границ раздела ртуть — водный раствор электролита

$$U = \Psi_0 \frac{i\omega c_f \delta S Z n}{n + Z S_0 (i\omega c_d + e i_0 (kT)^{-1})} \tag{2.19}$$

Здесь Ψ_0 — скачок потенциала на границе раздела ртуть — раствор электролита в равновесии; Z — сопротивление измерительного прибора, n — число границ раздела ртуть — раствор электролита между электродами; i_0 — ток обмена, S_0 — площадь мениска ртуть — раствор электролита в равновесии, c_d , c_f — дифференциальная и интегральная емкости единицы площади границы раздела ртуть — раствор электролита.



Фиг. 2



Фиг. 3

Подставляя δS и δV из (2.12) и (2.18) в формулу (2.19), можно получить выражение для амплитудно-частотной характеристики преобразователя.

3. Влияние теплообмена в пузырьках воздуха на амплитудно-частотную характеристику. Результаты расчета. Рассмотрим случай, когда $\kappa^{(k)}/\omega^* \rightarrow 0$, т. е. периметр смачивания остается неподвижным относительно стенок капилляра. При этом

$$\beta_1^{(k)} = \frac{\cos^4 \theta_0}{(1 - \sin^2 \theta_0^{(k)})^2}, \quad \beta_2^{(k)} \rightarrow 0$$

$$S^{*(k)} = (-1)^k \cos \theta_0^{(k)} V^{*(0)} \quad (3.1)$$

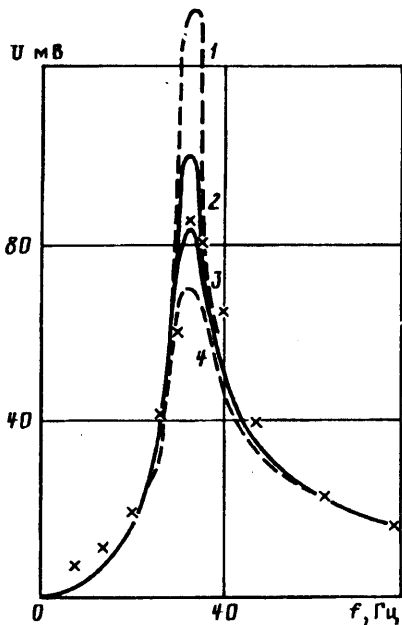
По формулам (2.18), (2.19) и (3.1) были проведены расчеты амплитудно-частотных характеристик двух капилляров с радиусами $a = 0,02$ см ($a = 0,04$ см), заполненных двумя несмешивающимися жидкостями (фиг. 1): водой ($k = 1, 3, 5, 7$) и ртутью ($k = 2, 4, 6$). Суммарная длина областей, заполненных водой, равна 0,7 см (3,7 см) ртути — 5,9 см (2,6 см). Суммы длин воздушных прослоек 1,9 см (1,7 см).

При расчете полагалось $\sigma^{(1)} = \sigma^{(7)} = 73$ дин/см, $\sigma^{(k)} = 370$ дин/см, $k = 2, 3, \dots, 7$; $\theta_0 = 13^\circ$; $p_{\text{ж}0} = 10^6$ дин/см², $\Psi_0 = 250$ мВ.

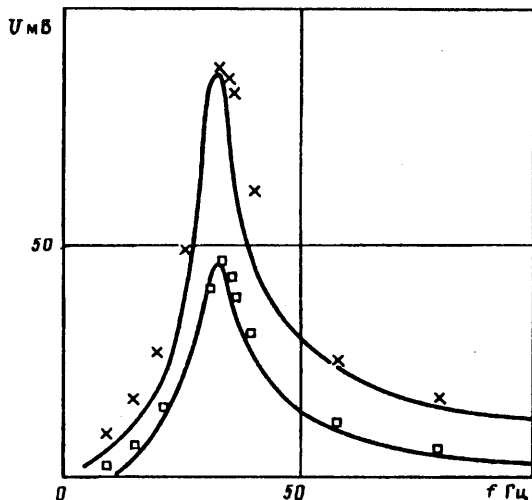
На фиг. 2 сплошной линией изображены амплитудно-частотные характеристики, рассчитанные по формулам (2.9), (2.18), а штриховой линией нанесены амплитудно-частотные характеристики, рассчитанные по формулам работы [5], в которых предполагалась политропность процессов сжатия и расширения воздушных областей. При изменении частоты колебаний сохранялась амплитуда скорости колебаний, т. е. закон механических колебаний капилляра имел вид $v = v_0 \cos \omega t$ ($v_0 = 0,01$ см/с).

Значения резонансных частот, рассчитанные по формулам работы [5] и настоящей работы, совпадают и равны 46 Гц.

Из формулы (2.18) следует, что резонансная амплитуда электрического сигнала обратно пропорциональна сумме двух слагаемых: диссипации механической энергии вследствие теплообмена (C/ω^2) и вязкой диссипации (B). На фиг. 3 приведены



Фиг. 4



Фиг. 5

результаты расчета отношения $F = C/(\omega^2 B)$ в зависимости от параметра α , который характеризует теплообмен воздуха в пузырьках с окружающей средой, для $a = 0,04$ (кривая 1) и $0,02$ см (кривая 2). Для капилляра с радиусом $a = 0,04$ см при изменении частоты колебаний от 10 до 150 Гц параметр изменяется от 1,47 до 9,45, а для капилляра с радиусом $a = 0,02$ см — от 0,12 до 0,77. В первом случае (кривая 1) в рабочей области α отношение $F = C/(\omega^2 B) > 0,1$ и оба слагаемых оказывают влияние на амплитуду электрического сигнала. Во втором случае (кривая 2) в рабочей области α отношение $F \leq 0,1$ и влиянием диссипации механической энергии вследствие теплообмена по сравнению с вязкой диссипацией можно пренебречь.

4. Скольжение границ раздела относительно стенок капилляра. Сравнение с экспериментом. По формулам (2.12), (2.18) и (2.19) были проведены расчеты амплитудно-частотной характеристики капилляра со следующими параметрами (фиг. 1): $a = 0,025$ см, суммарная длина прослоек воды 0,84 см, суммарная длина прослоек ртути 4,95 см, суммарная длина воздушных прослоек 1,68 см, $\theta_0 = 6^\circ$. Капилляр колебался по закону $v = 0,01 \cos \omega t$ (фиг. 4). Результаты численных расчетов проведены для коэффициентов скольжения $\chi^* = 0$ (скольжение отсутствует) — кривая 1, $\chi^{*(2)} = 0,18$; 0,31, 0,54 — кривые 2, 3, 4 соответственно. Экспериментальные данные нанесены точками. Имеется хорошее совпадение экспериментальной и расчетной резонансной частоты колебаний при всех значениях χ^* .

При значениях частот больше 100 Гц теоретические и экспериментальные данные практически совпадают. В случае, когда в гидродинамической модели отсутствует скольжение периметра смачивания относительно стенок капилляра ($\chi^* = 0$), имеется сильное расхождение расчетной и экспериментальной амплитуд электрического сигнала. В области резонансных частот различие составляет 52,3% (кривая 1, фиг. 4). Путем введения эффективного коэффициента скольжения χ^* расчетную амплитуду электрического сигнала в области резонансных частот удастся понизить (кривые 2, 3, 4, фиг. 4). При $\chi^{*(2)} = 0,31$ (кривая 3) экспериментальная и расчетная амплитуды электрического сигнала совпадают.

Для дальнейшей обработки экспериментальных данных коэффициент скольжения был принят равным 0,31.

На фиг. 5 изображены результаты расчетов (сплошная линия) и эксперимента — точки, приведенные для того же капилляра, колеблющегося с различными амплитудами скоростей: $v_0 = 0,05; 0,1$ см/с.

Имеется хорошее совпадение экспериментальных и теоретических амплитудно-частотных характеристик в диапазоне частот и амплитуд скоростей, удовлетворяющих критериям, обеспечивающим линейность задачи.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в области малых отклонений от равновесия имеет место линейная зависимость скорости скольжения периметра смачивания от величины отклонения угла смачивания от его равновесного значения с безразмерным коэффициентом пропорциональности $\chi^{(2)} = 0,31$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Watanaber A. A*—C-method in interfacial electrical phenomena//*J. Electrochem. Soc.* 1963. V. 110. № 1. P. 72—79.
2. *Koczorowski Z.* Własności przetworników elektrokapilarnych. Warszawa: Państw. wyd. naukowe, 1970. 84 p.
3. *Figaszewski Z., Koczorowski Z.* The electrical equivalent circuit of electrocapillary transducers//*Roczn. Chem.* 1972. V. 46. № 3. P. 481—492.
4. *Балашов А. Н., Шорыгин А. П.* Характеристики капиллярного ртутно-электрического преобразователя//*Электрохимия.* 1970. Т. 6. Вып. 11. С. 1663—1666.
5. *Куксенко Б. В., Либерман Н. М., Шапошникова Г. А.* Осциллирующие течения в капиллярах, заполненных несмешивающимися жидкостями//*Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 5. С. 13—18.
6. *Балашов А. Н., Куксенко Б. В., Либерман Н. М., Шапошникова Г. А., Шойхет И. А.* Электрические эффекты при колебаниях капилляра, заполненных каплями ртути и раствора электролита//*Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 2. С. 131—136.
7. *Dussan V. E. B.* The moving contact line: The slip boundary condition//*J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. № 4. P. 665—684.
8. *Huh C., Mason S. G.* The steady movement of a liquid meniscus in a capillary tube//*J. Fluid Mech.* 1977. V. 81. № 3. P. 401—419.
9. *Davis S. H.* Contact line problems in fluid mechanics//*Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1983. V. 50. № 4b. P. 977—982.
10. *Де-Жен П. Ж.* Смачивание: Статика и динамика//*Успехи физ. наук.* 1987. Т. 161. Вып. 4. С. 619—681.
11. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.III.1989