МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1993

УДК 532.516 : 534.2

© 1993 г. С. В. КОРСУНСКИЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Исследуются распространение и устойчивость нелинейных волн в вязкой сжимаемой жидкости с релаксацией, подчиняющейся реологическому уравнению состояния типа Олдройда. Выведено эволюционное уравнение, описывающее структуру волновых возмущений при условии баланса нелинейно-диссипативных эффектов и эффектов релаксации, проанализированы его решения типа уединенных волн.

Рассмотрим среду, в которой распространение звуковых волн нарушает состояние термодинамического равновесия. В силу второго начала термодинамики среда стремится вернуться к равновесному состоянию при новых, измененных волной значениях параметров. Однако установление такого равновесного состояния часто происходит не мгновенно после изменения внешних условий, а спустя некоторое время, характеризуемое временем релаксации. В качестве релаксационных процессов, вносящих запаздывание, могут выступать химические реакции, диссоциация, фазовые переходы, обмен энергией между различными степенями свободы молекул и т. д. Следует отметить, что все релаксационные процессы обладают некоторыми общими чертами и при феноменологическом описании можно отвлечься от их конкретной природы: приближение к состоянию термодинамического равновесия в данной степени свободы происходит асимптотически, по экспоненциальному закону [1, 3].

Классическая теория движения вязкой жидкости, основанная на уравнениях Навье — Стокса, построена в предположении, что характерное время релаксационных процессов в среде пренебрежимо мало [1—4] и, следовательно, не описывает динамические процессы в средах с релаксацией. В то же время эффекты релаксации играют важную роль в растворах органических и неорганических веществ, в морской воде, а также в слабых водных растворах полимеров [6, 13]. Кроме того, анализ влияния релаксационных свойств жидкости на параметры звуковых волн представляет существенный интерес для увеличения эффективности работы параметрических излучателей [3, 5].

1. Учет релаксационных свойств жидкости может быть осуществлен с помощью введения временной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций в реологическом уравнении состояния [2, 4]. Наличие такой временной связи приводит к появлению сдвига фаз между напряжением и скоростью деформации движущейся жидкости и, следовательно, к дисперсии и дополнительным потерям механической энергии потока по отношению к диссипативным потерям вследствие вязкости и теплопроводности.

Для несжимаемой вязкой жидкости реологическое соотношение может быть взято в виде [4]

$$P = -pE + 2\eta_1\dot{S} + 2K\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/q}\,\frac{d\dot{S}}{dt'}\,dt' \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) по существу является интегральной формой реологического уравнения Олдройда, принимаемого во многих практических исследованиях [2, 6, 7]. Здесь P — тензор напряжений, E — единичный тензор, $\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций, p — давление, η_1 — сдвиговая вязкость, K — релаксационная вязкость, q — время релаксации. Для вязкой сжимаемой жидкости реологическое уравнение состояния обобщается и принимает вид

$$P = -(p + \eta\nabla\mathbf{v})E + 2\eta_1\dot{S} + 2K\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/q}\,\frac{d\dot{S}}{dt'}\,dt' \tag{1.2}$$

где $\eta = 2\eta_1/3 - \eta_2$, η_2 — коэффициент объемной вязкости. Величины K и q в (1.1), (1.2) не являются независимыми: $K \to 0$ при $q \to \infty$ $(K \sim q^{-1})$.

Уравнение неразрывности и уравнение движения среды с реологическим уравнением состояния (1.2) записывается в виде

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathrm{v}) = 0, \tag{1.3}$$

$$\rho(\mathrm{v}_t + (\mathrm{v}\nabla)\mathrm{v}) = -\nabla p + \eta_1 \Delta \mathrm{v} + (\eta_2 + \eta_1/3)\nabla(\nabla \mathrm{v}) + 2K \operatorname{Div} I(\dot{S})$$
$$I(\dot{S}) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/q} \frac{d\dot{S}}{dt'}\, dt' \tag{1.4}$$

Предполагая, что среда подчиняется уравнению состояния идеального газа $p = \rho RT$, уравнение энергии запишем в виде [2, 7]

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p\nabla \mathrm{v} = \varkappa \Delta T - \left(\frac{2}{3}\eta_1 - \eta_2\right)(\nabla \mathrm{v})^2 + 2\eta_1 \dot{S}^2 + 2K\dot{S}I(\dot{S}) \tag{1.5}$$

Соотношения (1.3) — (1.5) составляют замкнутую систему уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости с релаксацией.

2. Запишем систему уравнений (1.3) — (1.5) в случае одномерного движения вдоль оси x

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho(u_t + uu_x) = -\frac{1}{\gamma}(\rho T)_x + \nu_1 u_{xx} + \nu_4 \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{q}\right) u_{xxt'}\, dt'$$

$$\rho(\mathrm{v}_t + \mathrm{v}\mathrm{v}_x) = \nu_2 \mathrm{v}_{xx} + \frac{\nu_4}{2}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{q}\right)\mathrm{v}_{xxt'}\, dt'$$

$$\rho(T_t + uT_x + (\gamma - 1)u_x T) = \nu_3 T_{xx} + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)(\nu_1 u_x^2 + \nu_2 \mathrm{v}_x^2 + \nu_4 F(x))$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{e}_2 v_2 + \mathrm{e}_3 v_3$$

где F — зависящая от x часть выражения $\dot{S}I(\dot{S})$ и введены безразмерные величины по формулам (звездочки опущены)

$$(u^*, \mathrm{v}^*) = \frac{(u, \mathrm{v})}{c_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{tc_0}{L}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad \nu_1 = \frac{\eta_2 + 4/3\,\eta_1}{\rho_0 c_0 L}, \quad \nu_2 = \frac{\eta_1}{\rho_0 c_0 L}, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa}{c_v \rho_0 c_0 L}$$

$$\nu_4 = \frac{2K}{\rho_0 L^2}, \quad q^* = \frac{qc_0}{L}, \quad c_0^2 = RT_0$$

Здесь L — характерный линейный масштаб, ρ_0, T_0 — значения плотности и температуры в невозмущенном состоянии.

Линеаризуем систему уравнений (2.1) относительно невозмущенного состояния, при котором $\rho = T = 1$, $u = v = 0$. Имеем

$$u_t = -\frac{1}{\gamma}(\rho + T)_x + \nu_1 u_{xx} + \nu_4 \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{q}\right) u_{xxt'}\, dt'$$

$$\mathrm{v}_t = \nu_2 \mathrm{v}_{xx} + \frac{\nu_4}{2}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{q}\right)\mathrm{v}_{xxt'}, \quad \rho_t + u_x = 0 \tag{2.2}$$

$$T_t + (\gamma - 1)u_x = \nu_3 T_{xx}$$

Эффекты диссипации в жидкости за счет вязкости и теплопроводности исследовались достаточно подробно [3, 8]. Поэтому при анализе влияния эффекта релаксации на распространение линейных гармонических волн для упрощения полагаем $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$. Исключая из первого уравнения (2.2) величины ρ, T, получаем

$$u_{tt} = u_{xx} + \nu_4 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{q}\right) u_{xxt'}\, dt' \tag{2.3}$$

Полагая $u \sim \exp(i(kx - \omega t))$, из (2.3) находим дисперсионное уравнение для звуковых волн в идеальной релаксирующей среде

$$\omega^2 - k^2 + \nu_4 q \omega^2 k^2 (1 - i\omega q)^{-1} = 0 \tag{2.4}$$

Для $\nu_4 << 1$ решения этого уравнения представим в виде

$$\omega = k - \frac{\nu_4}{2} \frac{qk^3}{(1 - ikq)} + O(\nu_4^2) \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}\omega = k - \frac{\nu_4}{2} \frac{qk^3}{1 + k^2q^2}, \quad \operatorname{Im}\omega = -\frac{\nu_4}{2} \frac{q^2k^4}{1 + k^2q^2}$$

Таким образом, наличие релаксации приводит к сильной дисперсии гидродинамических возмущений и их диссипации даже в отсутствие вязкости и теплопередачи.

3. В рамках полной системы уравнений (2.1) рассмотрим эволюцию одномерных волн конечной амплитуды в релаксирующей среде с учетом эффектов вязкости и теплопроводности. Вывод эволюционного уравнения для возмущений малой, но конечной амплитуды осуществляется с помощью асимптотических разложений по степеням малого параметра ε для искомых функций, зависящих от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и координаты $\xi = x - t$, сопровождающей волну [8]. При этом предполагается $\nu_1 \sim \nu_2 \sim \nu_3 \sim \nu_4 \sim \varepsilon << 1$. Подставляя разложения вида $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$ в (2.1) и удерживая члены одного порядка по ε, из соотношений, получаемых в нулевом и первом приближении по ε, находим эволюционное уравнение

$$u_{0\tau} + \beta u u_{0\xi} - \nu u_{0\xi\xi} + \delta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \exp\left(\frac{\xi - \xi'}{q}\right) u_{\xi'}\, d\xi' = 0 \tag{3.1}$$

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{2}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{2} + \nu_3 \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad \delta = \frac{\nu_4}{2}$$

Уравнение (3.1) в дифференциальной форме записывается в виде (индекс ноль для простоты записи опускается)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{q}\right)(u_\tau + \beta u u_\xi - \nu u_{\xi\xi}) = \delta u_{\xi\xi\xi}$$

При малых временах релаксации ($q << 1$) находим

$$\int_{\xi}^{+\infty} \exp\left(\frac{\xi - \xi'}{q}\right) u_{\xi'}\, d\xi' \approx q u_\xi - q^2 u_{\xi\xi}$$

$$u_\tau + \beta u u_\xi - \nu u_{\xi\xi} + \delta q u_{\xi\xi\xi} - \delta q^2 u_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.2}$$

При $q >> 1$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\xi}^{+\infty} \exp\left(\frac{\xi - \xi'}{q}\right) u_{\xi'}\, d\xi' \approx -u_{\xi\xi} + q^{-1} u_\xi$$

$$u_\tau + \delta q^{-1} u_\xi + \beta u u_\xi - (\nu + \delta) u_{\xi\xi} = 0 \tag{3.3}$$

Последнее уравнение позволяет сделать вывод, что при $q >> 1$ влияние эффектов релаксации сводится к увеличению скорости распространения возмущений и ширины переходной области слабых ударных волн, описываемых уравнением Бюргерса (3.3). Анализ решений уравнения (3.3) будет проведен ниже. Здесь рассмотрим устойчивость гармонических возмущений, распространяющихся в среде.

Полагая в (3.1) $u \sim \varepsilon \exp(i(k\xi - \omega\tau))$ и пренебрегая членом $O(\varepsilon)$, относительно ω и k получаем

$$\omega = -i\nu k^2 + \delta q k^3 (1 - ikq)^{-1} \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Re}\omega = \frac{\delta k^3}{1 + k^2 q^2}, \quad \operatorname{Im}\omega = -\frac{\nu k^2 + q^2 k^4 (\nu - \delta)}{1 + k^2 q^2} \tag{3.5}$$

Распространение гармонических возмущений будет устойчивым при $\operatorname{Im}\omega > 0$ и неустойчивым при $\operatorname{Im}\omega < 0$. Анализ функции (3.5) показывает, что при $\nu \geq \delta$ имеем $\operatorname{Im}\omega > 0$ для всех k. В случае $\nu < \delta$ имеем $\operatorname{Im}\omega > 0$ при $k < k_0$ и $\operatorname{Im}\omega < 0$ при $k > k_0$, где $k_0 = q^{-1}(\nu/|\nu - \delta|)^{1/2}$. Таким образом, наличие в среде эффектов релаксации может приводить к неустойчивости волновых возмущений.

Для большинства реальных сред время релаксации $q \ll 1$. Так, для воды $q \sim 10^{-3}$ с для 0,01%-ного раствора полиакриламида в воде $q \sim 10^{-4}$ с [1, 4], для морской воды имеют место по крайней мере два выраженных релаксационных процесса: с $q \sim 10^{-3}$ и 10^{-5} с [13]. При выводе уравнения (3.1) предполагалось, что величины ν и δ одного порядка малости и, следовательно, $k_0 \sim q^{-1} \gg 1$. Принимая во внимание соотношение $q \sim l/v_T$, где l — длина свободного пробега частиц среды, v_T — их средняя тепловая скорость [1], получаем $k_0 \sim l^{-1}$. Эта оценка показывает, что неустойчивость гармонических волновых пакетов в рассматриваемой системе возникает в том случае, когда длина распространяющейся волны становится соизмеримой с характерной длиной газокинетического движения молекул жидкости, т. е. в диапазоне очень высоких частот.

4. Точные решения уравнения (3.1) при произвольных значениях q не найдены. Ниже рассматриваются его решения при малых временах релаксации $q \ll 1$. В этом приближении эволюция возмущений поля описывается уравнением (3.2), которое относительно функции $\varphi = \beta u$ записывается в виде

$$\varphi_\tau + \varphi\varphi_\xi + \delta q \varphi_{\xi\xi\xi} = \nu\varphi_{\xi\xi} + \delta q^2 \varphi_{\xi\xi\xi\xi} \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) описывает нелинейные волны в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью и было исследовано в [9, 10]. С помощью преобразования Бэклунда

$$\varphi = -60\delta q^2 f_{\xi\xi\xi} + 15\delta q f_{\xi\xi} - {}^{15}\!/\!_{76}\,(16\nu - \delta) f_\xi$$

где $f = \ln F$ в работах [9, 10] построены точные решения уравнения (4.1) типа уединенных волн. Такие решения представляются в виде

$$\varphi = 15k_*^2 \left(\frac{\delta q}{4} + \delta q^2 k_* U(\tau, \xi)\right) \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{k_*\xi - \omega_*\tau}{2}\right) +$$
$$+ 15k_* (\delta - 16\nu)(1 + U(\tau, \xi)) \tag{4.2}$$
$$U(\tau, \xi) = \operatorname{th}((k_*\xi - \omega_*\tau)/2)$$

и существуют при трех значениях параметров $\sigma_*^2 = \delta/\nu$, k_*, ω_*:

$$\sigma_*^2 = 16, \quad k_*^2 = \frac{\nu}{\delta q^2}, \quad \omega_* = -\frac{3\delta q k_*^3}{2}$$

$$\sigma_*^2 = \frac{144}{7}, \quad k_*^2 = \frac{\nu}{47\delta q^2}, \quad \omega_* = -\frac{60\nu k_*^2}{47}$$

$$\sigma_*^2 = \frac{256}{73}, \quad k_*^2 = \frac{\nu}{73\delta q^2}, \quad \omega_* = -\frac{90\nu k_*^2}{73}$$

В первом случае решение (4.2) представляет собой уединенную волну вида

$$\varphi = \frac{15\nu}{4q} \frac{1 + U(\tau, \xi)}{\operatorname{ch}(1/2(k_*\xi - \omega_*))} \tag{4.3}$$

которая имеет единственный максимум и убывает при $\xi \to \pm\infty$. В [10] численно было показано, что волна (4.2) является в классическом смысле солитоном. В двух других случаях решение (4.2) представляет собой кинк, удовлетворяющий условиям $\varphi \to 0$, $\xi \to -\infty$, $\varphi \to b$, $\xi \to \infty$, $b = 15\nu k_*(\delta_*^2 - 16)/76$. При расчстах эволюции начальных возмущений, описываемых уравнением (4.1), установлено, что независимо от вида начального импульса со временем он трансформируется в автоструктуру, состоящую из набора уединенных волн типа (4.3). При изменении параметра σ_* форма уединенных волн в структуре меняется, а при некоторых значениях σ_* солитоны не образуются и волны в структуре имеют апериодический характер [10].

При больших временах релаксации ($q \gg 1$), которые могут иметь место, например, в смеси газов с химическими превращениями [1], уравнение (4.1) приводится к уравнению Бюргерса

$$\varphi_\tau + \varphi\varphi_z - \nu^*\varphi_{zz} = 0$$

$$z = \xi - \delta q^{-1}\tau, \quad \nu^* = \nu + \delta$$

Таким образом, при $q >> 1$ солитоны в среде не образуются, а возмущения распространяются в виде слабых ударных волн тейлоровского типа. Наличие релаксации приводит в этом случае к изменению скорости распространения волн и увеличению коэффициента диссипации возмущений. Подробный анализ решений уравнения Бюргерса был проведен в [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
4. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров//Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809—812.
5. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
6. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1983. 399 с.
7. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 247 с.
8. *Селезов И. Т., Корсунский С. В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наук. думка, 1991. 200 с.
9. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса — КдФ//Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 342—345.
10. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики//ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465—470.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. *Sachdev P. L.* Nonlinear diffusive waves. Cambridge: Camb. Univ. Press. 1987. 246 p.
13. *Наугольных К. А., Островский Л. А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.

Киев

Поступила в редакцию
11.VI.1992