

УДК 532.516

© 1993 г. А. Ф. ОЛИЦКИЙ, Г. Р. ШРАГЕР, В. А. ЯКУТЕНОК

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается задача об определении стационарной формы свободной поверхности вязкой жидкости, частично заполняющей горизонтальный цилиндр, вращающийся с постоянной скоростью. Большинство работ, посвященных данной задаче, выполнено в предположении малости толщины слоя жидкости, покрывающего внутреннюю поверхность цилиндра [1—3]. В [4] рассматривается случай свободной поверхности, незначительно отличающейся от горизонтальной, когда практически вся жидкость находится на дне цилиндра. Эта работа выполнена при значительных упрощениях исходных дифференциальных уравнений, сводящих их к обыкновенным.

В настоящей работе в приближении ползущего течения методом граничных элементов исследовано поведение свободной поверхности в широком диапазоне изменения определяющих параметров. Получено экспериментальное подтверждение численных результатов.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Для малых чисел Рейнольдса в присутствии силы тяжести стационарное течение вязкой жидкости описывается уравнениями Стокса

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{e}_{ij}, \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $p$  — давление,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\dot{e}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $x_i$  — декартовы координаты,  $\rho$  — плотность,  $g_i$  — компоненты вектора силы тяжести,  $u_i$  — компоненты вектора скорости.

К уравнению (1.1) следует присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

На твердых стенках цилиндра задаются условия прилипания

$$u_1(x) = \omega(R - x_2), \quad u_2(x) = \omega(x_1 - R), \quad x \in S_1 \quad (1.3)$$

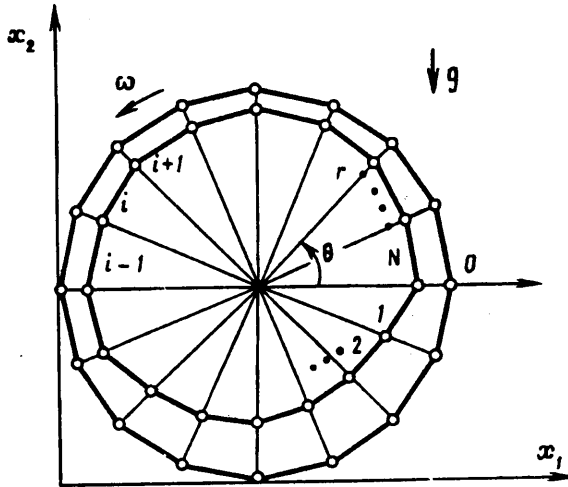
где  $\omega$  — угловая скорость вращения цилиндра,  $R$  — радиус цилиндра,  $S_1$  — твердая стенка.

Расположение системы координат видно на фиг. 1, где схематично изображена область течения. На свободной поверхности жидкости граничные условия следующие: отсутствие касательных напряжений и равенство нормального напряжения внешнему давлению в газе  $p_0$ , что выражается соотношением

$$t_i(x) = \sigma_{ij}n_j = -p_0n_i \quad (1.4)$$

где  $n_i$  — компоненты вектора внешней нормали к свободной поверхности.

Перейдем к безразмерным переменным, вводя следующие масштабы: для



Фиг. 1

координат —  $R$ , для скорости —  $U = \omega R$ , для давления и напряжений —  $\mu U/R$ . Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W_i = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.5)$$

$$W_1 = 0, \quad W_2 = -\frac{\rho g R^2}{\mu U}$$

Здесь и далее сохраняются прежние обозначения для безразмерных переменных. Граничное условие (1.3) запишется в виде

$$u_1(x) = 1 - x_2, \quad u_2(x) = x_1 - 1, \quad x \in S_1 \quad (1.6)$$

В (1.5) избавимся от постоянного слагаемого, введя потенциал для силы тяжести  $\varphi = W_j x_j$ . Тогда имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{ij} = -(p - \varphi) \delta_{ij} + 2\dot{e}_{ij}$$

Далее под величиной давления понимается величина  $p - \varphi$ . В этом случае граничное условие на  $S_2$ , в котором без ограничения общности можно положить  $p_0 = 0$ , примет вид

$$t_i(x) = W_j x_j n_i, \quad x \in S_2 \quad (1.8)$$

В качестве начального условия необходимо задать форму свободной поверхности. Начальной принимается форма в виде концентрической цилиндру окружности радиуса  $h$ . Мерой заполнения цилиндра жидкостью будем считать отношение объемов жидкости и цилиндра  $\lambda = 1 - h^2$ .

Стационарная форма свободной поверхности находится методом последовательных приближений с использованием кинематического условия, которое в полярных координатах  $(r, \theta)$  (см. фиг. 1) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u_r - \frac{u_\theta}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (1.9)$$

где  $f(t, \theta)$  — функция, задающая  $S_2$ ;  $u_r, u_\theta$  — компоненты вектора скорости в полярных координатах  $(r, \theta)$ . На стационарной свободной поверхности должно быть  $\partial f / \partial t = 0$ .

Таким образом, задача заключается в решении уравнений (1.2), (1.7) при граничных условиях (1.6), (1.8) для заданной или найденной из предыдущих вычислений формы свободной поверхности и нахождении следующей формы в соответствии с кинематическим условием (1.9) до выполнения условия стационарности  $\partial f / \partial t = 0$ .

Известно, что система уравнений (1.2), (1.7) для случая единичной сосредоточенной силы, направленной вдоль оси  $k$  (т. е. когда в правой части уравнения (1.7) стоит член  $\delta(x - \xi)\delta_{ik}$ , где  $\xi$  — точка приложения единичной силы  $\delta(x - \xi)e_k$ , а  $e_k$  — орт декартовой системы координат), имеет следующее сингулярное решение [5]:

$$u_{ik}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi} \left( \delta_{ik} \ln r - \frac{y_i y_k}{r^2} \right), \quad p_k(x, \xi) = -\frac{y_k}{2\pi r^2} \quad (1.10)$$

$$r = |x - \xi|, \quad y_i = x_i - \xi_i$$

Используя (1.10) и уравнение

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

получим фундаментальное решение для усилий

$$t_{ik}(x, \xi) = \frac{1}{\pi r^2} y_i y_j y_k n_j \quad (1.11)$$

Выписанные соотношения позволяют перейти к интегральной формулировке задачи в ее непрямом варианте [6]. Для этого реальная область течения заменяется фиктивной, которая считается помещенной в неограниченную двумерную область, заполненную ньютоновской жидкостью. Будем считать, что по границе  $S = S_1 \cup S_2$  распределены усилия неизвестной интенсивности  $\varphi_k(\xi)$  таким образом, что выполняются граничные условия (1.6), (1.8). Скорости  $u_i(x)$  и усилия  $t_i(x)$ , обусловленные действием сил  $\varphi_k(\xi)$ , в любой внутренней точке  $x$  можно найти сверткой решений (1.10), (1.11) с функцией  $\varphi_k(\xi)$  по формулам

$$u_i(x) = \int_S u_{ik}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi)$$

$$t_i(x) = \int_S t_{ik}(x, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi)$$

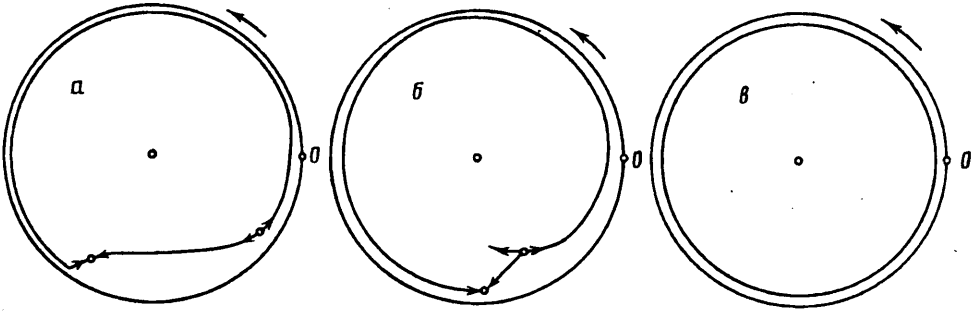
Устремляя  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in S$ ), получим систему граничных интегральных уравнений, решая которую можно найти значения неизвестных граничных сил  $\varphi_k(\xi)$

$$u_i(x_0) = \int_S u_{ik}(x_0, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi), \quad x_0 \in S_1 \quad (1.12)$$

$$t_i(x_0) = \int_S t_{ik}(x_0, \xi) \varphi_k(\xi) dS(\xi) + \frac{1}{2} \varphi_i(x_0), \quad x_0 \in S_2 \quad (1.13)$$

Интеграл по границе в (1.13) следует понимать в смысле главного значения по Коши [6].

Для решения системы уравнений (1.12), (1.13) используется метод граничных элементов, успешно применяемый для решения линейных задач теории упругости [6—8]. Граница области течения (твердая стенка и свободная поверхность) разбивается на прямолинейные отрезки, в пределах которых функции считаются постоянными. Дискретизация уравнений (1.12), (1.13) позволяет получить



Фиг. 2

систему линейных алгебраических уравнений для нахождения значений  $\varphi_i(\xi)$  на каждом из элементов. Коэффициенты системы для данного случая можно вычислить аналитически. Значения скоростей в граничных точках элементов, описывающих свободную поверхность, находятся из дискретного аналога уравнения (1.12). После нахождения скоростей в граничных узлах (способ разбиения границ на элементы ясен из фиг. 1) рассчитывается новое положение свободной поверхности с помощью кинематического условия (1.9). Для этого используется разностная схема с разностями против потока [9]

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = u_{\theta_i}^n - \frac{u_{\theta_i}^n}{f_i^n} \frac{\Delta f_i^n}{\Delta \theta}, \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{N} \quad (1.14)$$

$$\Delta f_i = \begin{cases} f_{i+1} - f_i, & u_{\theta_i} < 0 \\ f_i - f_{i-1}, & u_{\theta_i} > 0 \end{cases}$$

где  $n$  — номер приближения,  $N$  — количество граничных элементов,  $\Delta t > 0$  — шаг по фиктивному времени.

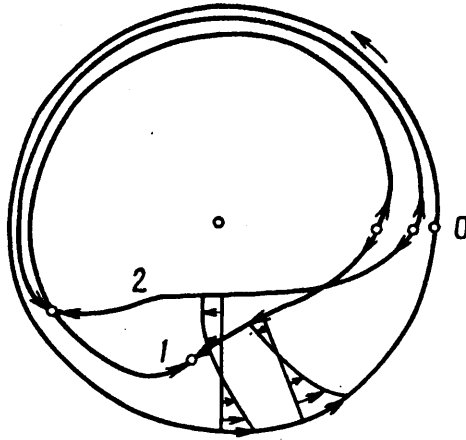
Условие устойчивости схемы (1.14) имеет вид [9]

$$\Delta t < \min_i \left| \frac{f_i \Delta \theta}{u_{\theta_i}} \right|$$

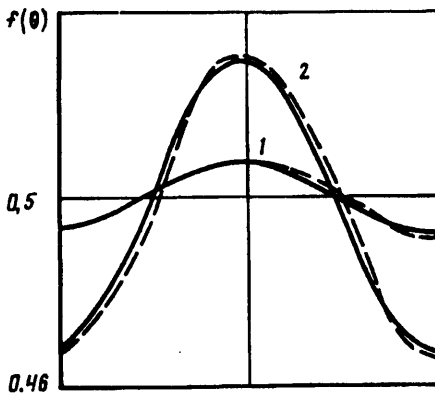
В заключение отметим, что численная методика подвергалась различным внутренним проверкам. Были проведены расчеты на последовательности разбиений границ, которые показали хорошую сходимость метода. Результаты при 32 граничных элементах на свободной поверхности и твердой стенке ( $N = 16$ ) при определении  $f$  совпадали с результатами при 64 элементах ( $N = 32$ ). Различие объемов жидкости в начальный момент времени, когда свободная поверхность имеет вид окружности, и при достижении поверхностью стационарной формы не превышало 5%. Кроме этого, метод тестировался на задаче о течении ньютоновской жидкости в плоском канале.

Задача заключалась в нахождении профиля скорости на выходной границе при заданных скоростях на входной границе и твердых стенках и напряжениях на выходе. При разбиении единичного квадрата на 32 равных граничных элемента отличие от аналитического решения составляло около 2%.

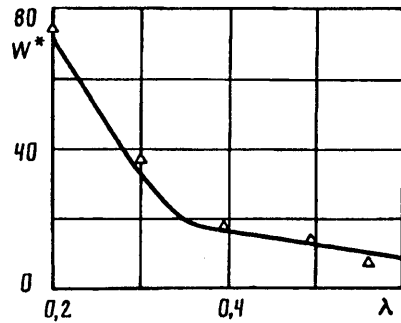
**2. Результаты расчетов.** Рассматриваемое течение определяется параметром  $W = \rho g R / \mu \omega$ , а также коэффициентом заполнения  $\lambda$ , являющимся мерой заполнения цилиндра жидкостью. При  $W = 0$  реализуется случай квазитвердого течения и свободная поверхность имеет вид окружности. При возрастании  $W$  увеличивается толщина слоя жидкости на поднимающейся стороне цилиндра и уменьшается на опускающейся. Далее при достижении некоторого критического значения  $W = W^*$  происходит образование наплыва на поднимающейся стороне цилиндра и зарождение в месте наплыва вихревой зоны. Такая эволюция свободной поверхности при изменении числа  $W$  показана на фиг. 2 ( $a$  —  $W = 350$ ,  $б$  —  $W = 100$ ,  $в$  —  $W = 76$ ;  $\lambda = 0,19$ ). При достаточно больших значениях числа  $W$  (в данном



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

случае  $W \approx 350$ ) свободная поверхность практически горизонтальна и поверхность цилиндра, находящаяся выше уровня жидкости, покрыта тонкой пленкой.

Таким образом, существует два режима течений ньютоновской жидкости во вращающемся цилиндре: с зоной возвратного течения и без нее. В случае существования зоны возвратного течения на свободной поверхности появляются две точки, в которых окружная составляющая скорости  $u_\theta$  меняет знак (они показаны на фигурах): точка стекания (внизу) и точка растекания (вверху), т. е. зона возвратного течения представляет собой один вихрь. Характерные профили скорости в зоне возвратного течения показаны на фиг. 3 ( $\lambda = 0,36$ ), (кривая 1 —  $W = 30$ , 2 —  $W = 100$ ).

Для режима течения, реализующегося при  $W < W^*$ , проведено сравнение получаемых форм свободной поверхности с данными [2] при  $\lambda = 0,75$ . На фиг. 4 кривые 1 соответствуют  $W = 0,5$ , кривые 2 —  $W = 2$ ; сплошные кривые — результаты настоящей работы, штриховые — данные [2]. Следует отметить, что в [2] расчеты проводились методом конечных элементов при  $Re = We = 1$  ( $Re = \rho\omega R/\mu$  — число Рейнольдса,  $We = \sigma/\rho\omega^2 R^3$  — число Вебера, где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения).

На основе расчетов стационарных свободных поверхностей при различных  $\lambda$  построена зависимость  $W^*$  от  $\lambda$ , показанная на фиг. 5 сплошной кривой. Выше этой кривой реализуется течение с возвратной зоной, ниже — без нее, с небольшими отклонениями свободной поверхности от окружности. Здесь же точками представлены результаты экспериментов по определению  $W^*$ .

Экспериментальная установка состояла из полого выполненного из плексигласа цилиндра внутренним диаметром 120 и длиной 216 мм; торцевые стенки также изготавливали из плексигласа. Цилиндр в сборе располагался на станине, опираясь на четыре подшипника вращения, и приводился во вращение сменными двигателями РД-09 с различными постоянными частотами вращения через ременную передачу. Набор двигателей и шкивов к ним позволял дискретно менять скорость вращения цилиндра от  $5,3 \cdot 10^{-2}$  до  $7,1 \text{ с}^{-1}$ .

Эксперименты проводились с пластифицированным конденсаторным маслом бутилкаучуком (вязкость 16,16 Па·с, плотность  $893 \text{ кг/м}^3$ ) при различной частоте вращения, чтобы получить критические значения  $W^*$ . Опыты проводились при  $Re < 1$ .

Вначале цилиндр в вертикальном положении заполняли жидкостью до заданной высоты, соответствующей определенной степени заполнения цилиндра жидкостью  $\lambda$ . Высоты заполнения цилиндра жидкостью были предварительно нанесены на стенки цилиндра рисками. Затем цилиндр с жидкостью устанавливался в рабочее положение и приводился во вращение. Далее, меняя частоту вращения цилиндра, добивались безциркуляционного (или близкого к нему) течения жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре. Наблюдение велось визуально по движению пузырьков воздуха, захватываемых жидкостью при движении. Частота вращения, при которой наступало безциркуляционное течение, использовалась для расчета критического значения  $W$  и значения  $Re$ . Такие опыты проведены для различных степеней наполнения цилиндра жидкостью в диапазоне  $\lambda = 0,2—0,582$ .

Расчетная максимальная ошибка по  $W$  составляла 4,5%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruschak K. J., Scriven L. E. Rimming flow of liquid in a rotating horizontal cylinder//J. Fluid Mech. 1976. V. 76. № 1. P. 113—125.
2. Orr F. M., Scriven L. E. Rimming flow: numerical simulation of steady, viscous, free-surface flow with surface tension//J. Fluid Mech. 1978. V. 84. № 1. P. 145—165.
3. Johnson R. E. Steady-state coating flow inside a rotating horizontal cylinder//J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 321—342.
4. Хаджи-Шейх, Лакшмараянан, Лу Райан. Течение в частично заполненном жидкостью вращающемся горизонтальном цилиндре//Теорет. основы инж. расчетов. 1984. № 3. С. 101—110.
5. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
6. Бенерджи П. К., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. Крауч С., Старфильд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.