МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1993

УДК 533.6.011.51

© 1993 г. В. Д. СЕРОВА

ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБЫХ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ В КРУГЛОЙ УДАРНОЙ ТРУБЕ

Существование слабых контактных разрывов можно предположить во многих задачах дифракции ударных волн (особенно слабых) [1], при взаимодействии прямолинейной ударной волны с малым препятствием в ударной трубе [2] и в других подобных случаях. Многими авторами отмечается неустойчивость сильных контактных разрывов, однако слабые контактные разрывы изучены мало. В настоящей работе на основании результатов [2, 3] для случая взаимодействия сильной ударной волны с малым препятствием на оси круглой трубы получены значения скорости ударной волны и числа Маха за нею, при которых не могут возникать слабые контактные разрывы. Показаны области изменения параметров, при которых возникающие в этой задаче слабые контактные разрывы затухают со временем и при которых трансформируются в сильные контактные разрывы.

В [2] показано, что при взаимодействии ударной волны с малой неоднородностью на оси симметрии в круглой трубе возможны различные случаи поведения слабых контактных разрывов в зависимости от знака выражения

$$K_1 = \frac{M_* \operatorname{tg}\psi}{M + M'(M-1) + (1 - M_* \operatorname{ctg}\mu) M_* \operatorname{tg}\psi} \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}\mu = \sqrt{M^2-1}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{M_s - M}{\sqrt{1-(M_s-M)^2}}, \quad M_* = \sqrt{MM'}$$

$$M' = \varepsilon\left(\sqrt{M} - \frac{1}{\sqrt{M}} + \frac{\sqrt{M}}{2M_s}\right)^{-2}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} \approx \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2}$$

Здесь ψ — угол между ударной волной и поверхностью слабого контактного разрыва, M — число Маха за ударной волной, M_s — число Маха ударной волны, определенное как отношение скорости ударной волны к скорости звука c в потоке за ударной волной.

Особый случай поведения слабых контактных разрывов в трубе имеет место, если знаменатель правой части (1) обращается в нуль

$$[M + M'(M-1)]\sqrt{1-(M_s-M)^2} + M_* [1 - M_* \sqrt{M^2-1}](M_s - M) = 0 \tag{3}$$

С другой стороны, при любом отношении теплоемкостей γ в ударной трубе M_s и M связаны зависимостью [4]

$$(M_s - M)^2 + \frac{\gamma+1}{2} M (M_s - M) - 1 = 0 \tag{4}$$

Для отыскания значений M_s и M, которые обращают в нуль знаменатель (1), необходимо решить совместно нелинейные алгебраические уравнения (3) и (4) с учетом (2). Корни этой системы уравнений, найденные численно при различных значениях γ, приведены в таблице.

Напомним, что результаты [2] получены при условии, что ударная волна достаточно сильная, а величина ε достаточно мала.

При обращении в нуль знаменателя в (1) решение для величины скачков разрывов первых

γ	M_s	M	γ	M_s	M
1,05	1,803	1,258	1,50	1,727	1,236
1,10	1,794	1,255	1,60	1,712	1,231
1,15	1,785	1,252	1,70	1,697	1,227
1,20	1,776	1,250	1,80	1,683	1,223
1,30	1,759	1,245	1,90	1,670	1,219
1,40	1,743	1,240	2,00	1,657	1,216

производных, найденное из уравнений переноса в [2], не определено, так как величины скачков производных от плотности и внутренней энергии задаются значениями коэффициента β [2, 3]

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{K_2}, \quad K_2 = K_1 + (\gamma - 1)\, M_* \sqrt{M^2 - 1} \tag{5}$$

где K_1 задается формулой (1). Здесь величина коэффициента β в момент времени t определяется через известное значение коэффициента β_0 в момент времени t_0.

Скачки производных от составляющих скоростей определяются коэффициентом α [2, 3]

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{K_1} \tag{6}$$

Относительно коэффициента α_0 справедливо замечание, сделанное выше для β_0.

Если в выражениях (5) и (6) значения M_s и M стремятся к решению системы (3), (4), (2) из области, где знаменатель (1) отрицателен, то разрывы имеют тенденцию к исчезновению, а если из области, где знаменатель (1) положителен, то разрывы производных неограниченно возрастают. Физически это может означать, что при найденных выше значениях M_s и M слабые контактные разрывы в задаче о взаимодействии ударной волны с малым препятствием на оси круглой трубы существовать не могут. Поскольку в этой задаче значения энтропии с разных сторон от линии, соединяющей центр малых возмущений с точкой пересечения ударной и звуковой волн [2], имеют разную зависимость от времени и координат, то на этой линии возможно возникновение только сильного контактного разрыва для значений M_s и M, близких к найденным.

Отметим, что при значениях M_s и M, бо́льших тех величин, которые приведены выше, знаменатель (1) сохраняет отрицательный знак, а при меньших — положительный. Тогда можно сказать, что если в ударной трубе $M_s > 1{,}85$, то контактные слабые разрывы, возникающие при взаимодействии этой волны с малым препятствием на оси трубы, имеют тенденцию к затуханию с течением времени. Если $M_s < 1{,}60$, то величины скачков разрывов производных неограниченно возрастают с течением времени, что, по-видимому, приводит к образованию сильных контактных разрывов. Более детально поведение контактных слабых разрывов в таких случаях исследовано в [2]. Таким образом, в диапазоне $M_s = 1{,}60$—$1{,}85$ существование устойчивых контактных разрывов при взаимодействии волны с малым препятствием маловероятно, а при определенных значениях M_s и M из этого диапазона и вообще невозможно.

В [5] приведен пример возникновения контактных поверхностей разрыва при наличии в плоской трубе малого препятствия на стенке трубы при $M_s > 2$. На теневых фотографиях [5] контактные слабые разрывы достаточно быстро затухают, что находится в соответствии с полученными в настоящей работе результатами.

В [2] в качестве примера рассмотрен случай $M_s = 1{,}7$, $M = 1{,}2$ при $\gamma = 1{,}4$, в котором значения M_s и M меньше полученных расчетных значений, приведенных выше, и поэтому вероятнее всего здесь быстрое появление сильных контактных поверхностей, т. е. разрывов всех газодинамических функций, кроме давления.

Заметим, что рассуждения относительно возникновения сильных контактных разрывов при неограниченном росте величины разрывов производных могут быть основаны, в частности, на результатах [6]. В [6] показано, что поле решений u исходной системы уравнений газовой динамики, записанной в дивергентной форме, в области гладкости самой функции вблизи поверхности слабого разрыва может быть представлено в виде

$$u = u_0 + \varphi \cdot \pi + O(\varphi^2), \quad \pi = [u_\varphi] \tag{7}$$

где $\varphi(x^j) \equiv 0$ — уравнение поверхности разрыва, u_0 — поле невозмущенного волной решения, x^j — исходные переменные системы, $O(\varphi^2)$ — слагаемые порядка выше второго по отношению к бесконечно малому $\varphi(x^j)$.

Как известно, разрыв выводящей производной $\pi = [u_\varphi]$ линейно зависит от величин разрывов производных газодинамических функций. Тем самым в (7) можно считать, что π линейно зависит от α и β, задаваемых (5) и (6). Отсюда следует, что при неограниченном росте компонент вектора разрыва выводящей производной π газодинамические функции вблизи поверхности слабого контактного разрыва неограниченно возрастают. Это может быть истолковано как возникновение сильного контактного разрыва. Если же, напротив, компоненты вектора π стремятся к нулю, то из представления (7) следует, что u стремится к невозмущенному решению u_0, а это может означать исчезновение слабого контактного разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takayuki A.* A comparative study of TV stable schemes for shock interacting flows//Lecture Notes in Physics. № 323 (11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamic). Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. P. 101—105.
2. *Серова В. Д.* Взаимодействие сильной ударной волны с малой неоднородностью на оси круглой трубы//Вестн. ЛГУ, Математика. Механика. Астрономия. 1991. Вып. 2. (№ 8). С. 104—109.
3. *Серова В. Д.* Распространение слабых контактных разрывов вдоль бихарактеристик уравнений газовой динамики//Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1988. № 1. С. 42—46.
4. Ударные трубы/Под ред. Рахматуллина Х. А., Семенова С. С. М.: Изд-во иностр. лит., 1962: 699 с.
5. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977. 274 с.
6. *Boillat G.* Le propagation des ondes. Paris, 1965. С. 42.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
6.IV.1992