МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1993

УДК 532.527

 Ю. Б. СЕДОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ С ГРАНИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В двумерных течениях идеальной жидкости точечным особенностям поля завихренности (δ-функции и ее производным) отвечают точечные вихри и мультиполи различных порядков. Комплексные потенциалы вихря и мультиполя порядка $2m$, $m \geq 1$, будут [1]

$$w_0 \sim \ln z, \quad w_m \sim z^{-m}, \quad z = x + iy$$

Модель точечных вихрей применяется достаточно широко, так как, будучи сравнительно простой и наглядной, она позволяет исследовать нетривиальное поведение вихревых систем (см., например, [2, 3]). Гораздо реже при моделировании вихревых течений используются мультиполи, отчасти потому, что взаимодействие особенностей различных порядков исследовано еще недостаточно полно.

Поле скорости, индуцируемое мультиполем порядка $2m$, $v_m = (\partial_y \psi_m, \ -\partial_x \psi_m)$, $\psi_m = \operatorname{Im} w_m$, уже не обладает центральной симметрией, а среди линий тока имеются m прямых, пересекающихся под углом π/m. Наличие прямолинейных линий тока позволяет рассматривать мультиполи, помещенные на твердые граничные поверхности. Следует отметить, что вихревой монополь — точечный вихрь — таким свойством не обладает, так как при приближении к твердой границе скорость вихря неограниченно возрастает.

Рассмотрим случай прямолинейной границы, т. е. движение точечного вихря в верхней полуплоскости $y \geq 0$ в поле мультиполя, помещенного в начало координат и ориентированного так, чтобы выполнялось граничное условие непротекания. Динамика вихря определяется гамильтоновой системой уравнений

$$r\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad r\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial r} \tag{1}$$

$$H = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{\sin m\theta}{r^m} + \frac{\varkappa}{2\pi}\ln y \tag{2}$$

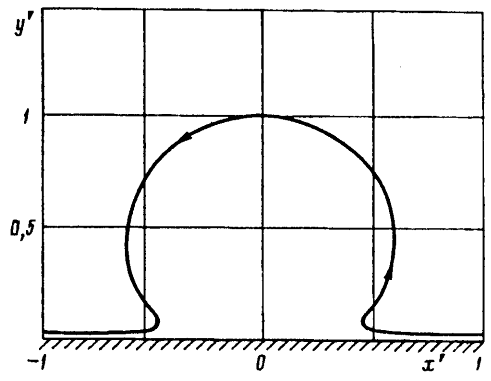
где (r, θ) — полярные координаты, первый член в гамильтониане отвечает действию на вихрь мультиполя с моментом μ, второй — влиянию границы, эквивалентному действию отраженного вихря с интенсивностью $-\varkappa$.

Гамильтониан (2) не зависит явно от времени, поэтому траекториями вихря являются линии уровня гамильтониана $H = \text{const}$. Остановимся подробнее на случае мультиполя второго порядка — диполя, имеющего простую гидродинамическую интерпретацию как локализованную струйку жидкости, направление которой совпадает с осью x [4]. Уравнения траекторий вихря, как следует из (2), запишутся

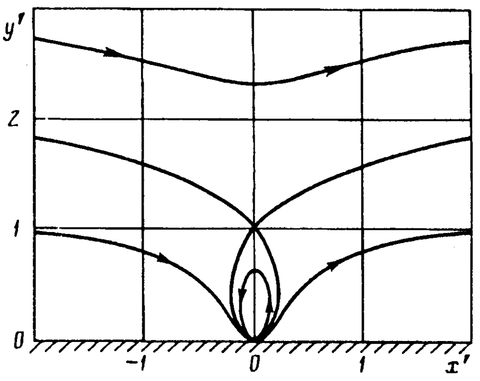
$$r^2 = \frac{y}{\lambda \ln y/y_\infty}, \quad \lambda = \frac{\varkappa}{\mu}, \quad y_\infty = \exp\left\{\frac{2\pi}{\varkappa}H\right\} \tag{3}$$

где y_∞ — асимптотическое положение вихря при $t \to -\infty$. В зависимости от знака λ имеем два типа взаимодействия. При $\lambda > 0$ происходит набегание вихря из бесконечности на встречную дипольную струйку. В этом случае всегда $y(t) > y_\infty$, максимальное значение $y = y_0$ принимает при $x = 0$. Траектории вихря при $\lambda > 0$ представлены на фиг. 1, где $x' = x/y_0$, $y' = y/y_0$.

Более интересное поведение вихря имеем при $\lambda < 0$, когда вихрь набегает на дипольную струйку с тыла. Траектории вихря при $\lambda < 0$ представлены на фиг. 2, где жирной линией изображена сепаратрисная линия тока, имеющая точку самопересечения — неустойчивое стационарное положение вихря при $x = 0$, $y_* = -\lambda^{-1}$ и проходящая через положение диполя. Здесь $x' = x/y^*$, $y' = y/y^*$. Таким образом, при $\lambda < 0$ имеем два типа траекторий, отвечающих слабому взаимодействию вихря



Фиг. 1



Фиг. 2

и диполя, если $y_\infty > y^*_\infty = e/\lambda$, и сильному — при $y_\infty < y^*_\infty$. В первом случае траектории вихрей расположены над сепаратрисой, и силы диполя не хватает для захвата и вовлечения вихря.

При $y_\infty < y^*_\infty$ траектории вихря проходят через диполь. В момент попадания вихря в диполь происходит аннигиляция завихренности, так как в диполь одновременно попадает и отраженный вихрь противоположного знака. С конечных расстояний вовлечение вихря в диполь с последующей аннигиляцией происходит за конечное время. Следующие два отрезка траектории отвечают излучению вихря диполем. В первом случае (петлеобразная часть траектории) вихрь живет конечное время и опять вовлекается в диполь, во втором — уходит вдоль границы на бесконечность.

Аналогичные режимы как с аннигиляцией, так и с излучением имеют место при взаимодействии вихря с мультиполем произвольного порядка. Следует также отметить, что режим с излучением завихренности может иметь отношение к наблюдаемым в турбулентных пограничных слоях взрывах локализованной завихренности [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастизация вихрей //Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 12. С. 737—740.
3. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Коллапс вихрей // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. № 2(8). С. 588—597.
4. *Милн-Томпсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 656 с.
5. *Kim H. T., Kline S. J., Reynolds W. C.* The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 1. P. 133—160.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1992