

УДК 532.5.013.4 : 536.624

© 1993 г. С. В. РУСАКОВ

ОСОБЕННОСТИ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА
ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ
ПЕРЕПАДОВ ТЕМПЕРАТУР

Путем прямого численного моделирования методом сеток исследуется конвективное течение вязкого сжимаемого газа в замкнутой квадратной области при подогреве снизу. Используются полные уравнения Навье — Стокса и некоторые упрощенные модели типа уравнений Буссинеска. Исследуется влияние гидростатической сжимаемости на характер ветвления решений. Предлагается определение числа Рэлея, позволяющее состыковать результаты, получаемые по различным моделям.

Исследование ветвлений решения конвективных задач в замкнутых областях при помощи прямого численного эксперимента чаще всего осуществляется на основе уравнений Буссинеска [1]. Но модель Буссинеска работает лишь при относительно небольших перепадах температур и плотностей. В реальных ситуациях (атмосферные явления, технологические процессы и т. д.) перепады температур могут быть весьма существенными. В этом случае адекватное описание возникающих течений возможно лишь на основе полной системы уравнений Навье — Стокса. Некоторые результаты по этой модели предъявлены в [2].

1. Постановка задачи аналогична работе [3]: рассматриваются течение и перенос тепла при конвекции сжимаемого газа в замкнутой квадратной области (с горизонтальными границами Γ_0 , Γ_1 — верхней и нижней соответственно и вертикальными Γ_2 , Γ_3) под действием внешней массовой силы, параллельной вертикальной оси Y . Горизонтальные границы области изотермичны: $T|_{\Gamma_0} = T_0$ и $T|_{\Gamma_1} = T_1$. Газ предполагается совершенным, удельные теплоемкости и число Прандтля — постоянными, вязкость и теплопроводность — зависящими только от температуры по закону Сатерленда. Моделирование осуществляется на основе полных уравнений Навье — Стокса вязкого сжимаемого газа, записанных в виде, приведенном в [4]. При обезразмеривании в качестве характерных величин выбираются следующие: L — длина стороны квадрата, T_0 — температура холодной поверхности, a_0 и μ_0 — скорость звука и вязкость при температуре T_0 , ρ_1 — плотность на горячей поверхности.

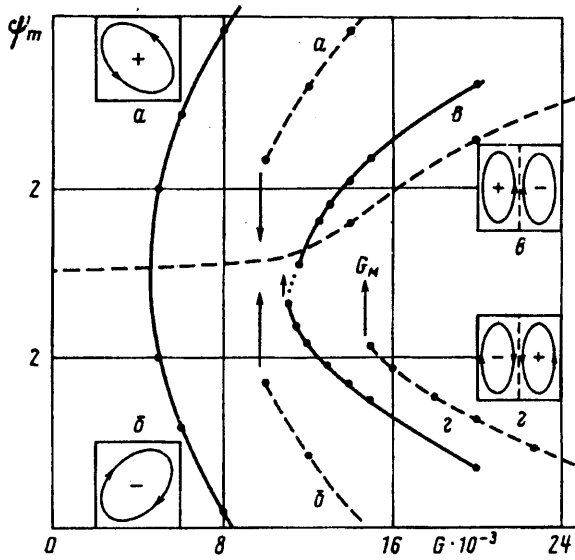
Безразмерные параметры задачи: $\gamma = 1,405$ — адиабата, $P = 0,71$ — число Прандтля, $C^+ = 0,37$ — безразмерная константа в законе Сатерленда, $C_F = gL/a_0^2 = 0,05$ — безразмерный коэффициент при массовой силе в уравнениях движения, $\delta_T = (T_1 - T_0)/T_0$ — относительный перепад температур, $G = gL(L\rho_1/\mu_0)^2\delta_T$ — число Грасгофа. В зависимости от типа граничных условий на границах $\Gamma_{2,3}$ будем рассматривать две задачи: задача 1 — адиабатические границы ($\partial T/\partial n(\Gamma_{2,3}) = 0$), задача 2 — идеально теплопроводящие границы ($T(\Gamma_{2,3}) = 1 + (1 - y)\delta_T$).

Важной особенностью газов в отличие от жидкостей является свойство сжимаемости. В некоторых случаях сжимаемость может быть учтена одним параметром $K = (\gamma - 1)C_F/\delta_T$, для которого известно условие устойчивости подогреваемого снизу невязкого нетеплопроводного газа [5]: $K \geq 1$.

Область применимости уравнений Буссинеска характеризуется значениями параметров: δ_T , C_F , M_0^2 , M_0^2/δ_T , $C_F/\delta_T \gg 0$, где M_0 — число Маха. В книге [6] описана модель, позволяющая снять последнее из этих условий, специфика которой состоит в добавлении в уравнении энергии дополнительного источникового члена

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(\theta)}{P} \frac{\partial \theta}{\partial x} - u\theta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v(\theta)}{P} \frac{\partial \theta}{\partial y} - v\theta \right) - K\theta \quad (1.1)$$

В дальнейшем для краткости используются следующие названия: модель 0 — уравнения Буссинеска с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры по закону Сатерленда; модель 1 — обобщение уравнений Буссинеска (1.1); модель 2 — полная система уравнений Навье —



Фиг. 1

Стокса. При используемых значениях параметров величины M_0^2 , M_0^2/δ_T достаточно малы, что делает возможным при малых δ_T сравнение результатов расчетов по моделям 0, 1 и 2.

Для моделей 0 и 1 в качестве характерной (нормирующей) скорости берется $U = \mu_0/(\rho_1 L)$. Поскольку безразмерные скорости в моделях 0, 1 и 2 определяются следующим образом: $u_{(0,1)}' = u/U$, $u_{(2)}' = u/a_0$, связь между $u_{(0,1)}'$ и $u_{(2)}'$ имеет вид $u_{(0,1)}' = a_0 u_{(2)}'/U = u_{(2)}'(G/(C_T \delta_T))^{1/2}$. Это преобразование используется при определении функции тока в модели 2.

2. Численное решение поставленной задачи осуществлялось с помощью сплайн-схем, методика построения которых описана в [7]. Для расчетов в полной области использовались квадратные сетки с $N_x = N_y = 15$, а при наличии симметрии относительно оси $x = 1/2$ в половине области бралось $N_x = 7$, $N_y = 15$.

Перейдем к обсуждению результатов расчетов. Полная картина бифуркаций решения представлена на фиг. 1, где сплошными линиями обозначено решение задачи 1, штриховыми — задачи 2. Первое ветвление в задачах 1 и 2 (ветви a и б на фиг. 1) и второе ветвление в задаче 1 описываются корневым законом

$$(\Psi_m^-)^2 = a^2 G^- \quad (2.1)$$

$$G^- = G - G_1, \quad \Psi_m^- = \Psi_m \quad (2.2)$$

$$G^- = (G - G_2) \cos \beta + (\Psi_m - \Psi_2) \sin \beta,$$

$$\Psi_m^- = -(G - G_2) \sin \beta + (\Psi_m - \Psi_2) \cos \beta \quad (2.3)$$

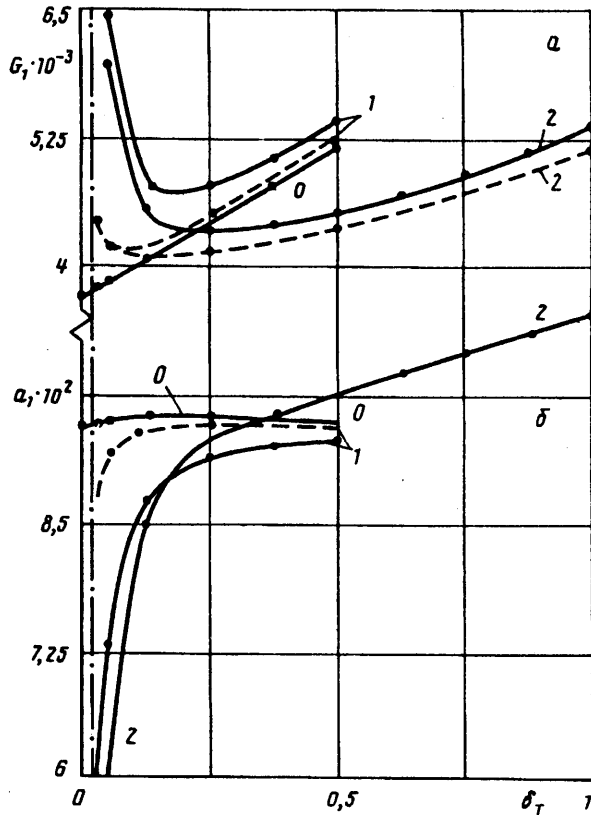
где (2.2) — для первого ветвления и (2.3) — для второго (во всех случаях $|\beta| < 10^{-4}$).

В задаче 2 отсутствует конвективное равновесие и для двухвихревой структуры имеется режим «ползущего» течения (фиг. 1), появление которого связано с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры, что при линейном распределении температуры вдоль границы порождает температурный градиент по координате x .

Второе ветвление в задаче 2 (ветви в и г на фиг. 1) в окрестности $G = G_M$ описывается кубическим уравнением

$$(\Psi_m^-)^3 - a^2 G^- \Psi_m^- + b = 0, \quad G^- = G - G_2, \quad \Psi_m^- = \Psi_m - \Psi_2$$

На фиг. 2, a, б изображены зависимости параметров первого ветвления задачи 1 от величины δ_T (критические числа Грасгофа и амплитуды ветвлений a в других вариантах ведут себя подобным образом). Здесь кривые промаркированы в соответствии с номером модели, по которой они получены.



Фиг. 2

Штрихпунктирная линия обозначает границу возможности возникновения конвективного течения (при $C_F = 0,05$) по критерию Шварцшильда. Как и следовало ожидать, уравнения Буссинеска (модель 0), не учитывающие сжимаемость, дают неверные значения параметров ветвления вблизи этой границы. Промежуточная модель 1 неплохо улавливает качественную зависимость поведения параметров ветвления. На фиг. 2, а, б штриховой линией нанесены результаты, полученные по моделям 1 и 2 при $C_F = 0,01$. В этом случае кривая 1 хорошо согласуется количественно при больших значениях величины C_F/δ_T с кривой 2, а при малых — с кривой 0.

В [2] было предложено обобщение числа Рэлея, учитывающее сжимаемость: $Ra = PG(1-K)$. При больших значениях δ_T требуется учитывать нелинейную зависимость вязкости от температуры, поэтому будем определять число Рэлея следующим образом:

$$Ra = PG(1-K)/\nu_e \quad (2.4)$$

где ν_e — эффективная вязкость. Вычисление эффективной вязкости ν_e осуществим через точное равновесное решение, которое возможно в задаче 1. В этом случае при $u \equiv 0$ и $v \equiv 0$ из уравнений энергии и движения имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} (\mu(T(y))T'(y))' &= 0, \quad (\rho(y)T'(y))' = -\gamma C_F \rho(y) \\ T(0) &= 1 + \delta_T, \quad T(1) = 1, \quad \rho(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрируя систему уравнений (2.5), можно получить точное решение в виде зависимости $\rho(T)$. Выразив температуру T через безразмерный параметр θ : $T = 1 + \delta_T \theta$, $\theta \in [0, 1]$, определим эффективную вязкость ν_e как функцию параметра θ : $\nu_e(\theta) = \mu(\theta)/\rho(\theta)$.

При обработке данных расчетов было получено, что существуют значения параметра θ ($\theta_1 = \theta_1 - 0,75$ и $\theta_2 = \theta_2 - 0,60$ в одно- и двухвихревой структурах соответственно), для которых число Рэлея, определяемое по формуле (2.4), равно константе (с разбросом экспериментальных данных, не превышающим 5%). Используя выражение (2.4), можно построить формулы для аналогичной

Модель	Задача 1				Задача 2			
	$Ra_1 \cdot 10^{-3}$	$A_1 \cdot 10$	$Ra_2 \cdot 10^{-3}$	$A_2 \cdot 10^2$	$Ra_1 \cdot 10^{-3}$	$A_1 \cdot 10^2$	$Ra_2 \cdot 10^{-3}$	$A_2 \cdot 10^2$
2	2,65	1,11	7,10	5,14	5,21	9,05	8,30	4,38
0 ($\nu \equiv 1$)	2,63	1,12	7,10	5,16	5,25	9,28	8,59	4,44

перенормировки значений амплитуд ветвлений a_1 и a_2 . Перейдя в формуле (2.1) от числа Грасгофа к числам Рэлея, определяемым по формуле (2.4), после дополнительной нормировки получим, что с разбросом не более 8%

$$a^2 v_a(\theta) / (P(1 - K) v_a(1)) = \text{const} \quad (2.6)$$

Значения критических чисел Рэлея, определенных по формуле (2.2), и амплитуд, отнормированных в соответствии с (2.6), представлены в таблице. Там же приведены данные, полученные по уравнениям Буссинеска (модель 0 при $\nu \equiv 1$), где $Ra = PG$, $A^2 = a^2/P$. Из таблицы видно, что определенные по разным моделям численные значения хорошо согласуются между собой.

Для варианта с $C_F = 0,01$ соответствующая обработка (для задачи 1) дала: $Ra_1 = 2,70 \cdot 10^3$, $A_1 = 1,09 \cdot 10^{-1}$. В работе [2] приведены результаты по определению $G_1(C_F)$ для задачи 1 при $\delta_T = 0,5$. Обработка этих данных по формуле (2.3) дала: $Ra_1 = 2,95 \cdot 10^3$ при $\theta_1 = 0,43$ с разбросом менее 1%.

Таким образом, определение параметров ветвления по формулам (2.4) и (2.6) позволяет состыковать результаты, полученные по различным моделям (полным уравнениям Навье — Стокса и уравнениям Буссинеска), и обобщить известные данные на широкий диапазон перепадов температур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
2. Полежаев В. И. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов//Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 86—180.
3. Полежаев В. И. Течение и теплообмен при естественной конвекции газа в замкнутой области после потери устойчивости гидродинамического равновесия//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 124—129.
4. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 2. С. 103—111.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
7. Русаков С. В. Разностные сплайн-схемы и их приложения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1992. 32 с.

Пермь

Поступила в редакцию
2.VI.1992