МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1993

УДК 532.59 : 537.62

© 1993 г. В. М. КОРОВИН

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Линейные прогрессивные волны на поверхности раздела двух заключенных между твердыми стенками слоев устойчиво стратифицированных однородных линейно намагничивающихся жидкостей, находящихся в магнитном поле, рассматривались в [1]. В работе [2] проведен аналогичный анализ применительно к случаю горизонтальной поверхности раздела между неограниченными в вертикальном направлении устойчиво стратифицированными магнитными жидкостями с нелинейным законом намагничивания и получено условие устойчивости плоской поверхности раздела в наклонном магнитном поле. Линейные внутренние волны в магнитных жидкостях рассматривались также в связи с исследованием возможности стабилизации неустойчивостей Рэлея — Тейлора и Кельвина — Гельмгольца с помощью тангенциальных магнитных полей [3]. В нелинейной постановке — в рамках уравнения Шрёдингера — воздействие поля на развитие неустойчивости Рэлея — Тейлора изучено в [4].

В данной работе применительно к двухслойной магнитной жидкости получены уравнения Кортевега — де Вриза с квадратичной и кубической нелинейностями. Проведен анализ влияния тангенциального поля на распространение солитонов. Рассмотрено также влияние поля на эволюцию длинноволновых возмущений плоской поверхности раздела магнитных жидкостей в линейном случае.

1. Основные уравнения. В прямоугольной системе координат x, y, z — ось y направлена вертикально вверх — рассматривается плоскопараллельное движение неэлектропроводной слоисто-неоднородной магнитной жидкости при наличии магнитного поля, параллельного плоскости x, y. Жидкость, полностью заполняющая плоский канал, образованный двумя горизонтальными пластинами, состоит из двух несмешивающихся слоев с плотностями $\rho_1 > \rho_2$ и постоянными магнитными проницаемостями $\mu_1 \neq \mu_2$. Индексами 1 и 2 отмечаются параметры, относящиеся соответственно к нижнему и верхнему слоям. В рассматриваемом случае магнитные силы потенциальны. Предполагается, что в состоянии гидростатического равновесия с плоской поверхностью раздела $y = 0$ толщины слоев h_1, h_2 имеют одинаковый порядок, а горизонтальное магнитное поле H однородно и направлено вдоль оси x.

Вводя потенциалы скоростей $\varphi_k(x, y, t)$ и векторные потенциалы индукции $\psi_k = [0, 0, \psi_k(x, y, t)]$, из уравнений неразрывности и условия соленоидальности индукции получаем

$$\Delta\varphi_k = 0, \quad \Delta\psi_k = 0, \quad k = 1, 2 \tag{1.1}$$

Запишем интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_k)^2 + \frac{p_k}{\rho_k} + gy - \frac{\mu_k - \mu_0}{2\rho_k\mu_k^2}(\nabla\psi_k)^2 = C_k(t), \quad k = 1, 2 \tag{1.2}$$

Здесь t — время, p_k — давление, g — ускорение силы тяжести, μ_0 — магнитная постоянная.

На поверхности раздела жидкостей $y = \eta(x, t)$ условия сопряжения векторных потенциалов, обеспечивающие непрерывность нормальной составляющей индукции и касательной составляющей магнитного поля, имеют вид

$$\psi_1 = \psi_2, \ (\mu_2 \operatorname{rot} \psi_1 - \mu_1 \operatorname{rot} \psi_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный в сторону верхнего слоя жидкости. Жидкие частицы не пересекают поверхность раздела и, кроме того, при $y = \eta(x, t)$ должно выполняться динамическое условие с учетом магнитного скачка давления [5]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2 \tag{1.4}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2\mu_0}\left\{\left[\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\psi_2\right]^2 - \left[\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_1}\right)\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\psi_1\right]^2\right\} - \alpha \operatorname{div} \mathbf{n} \tag{1.5}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения. Предполагается, что стенки канала выполнены из магнитно-мягкого материала с большой ($\mu/\mu_k \to \infty$) магнитной проницаемостью μ, так что на их внутренних поверхностях выполняется обычное в такой ситуации [1] условие исчезновения касательной составляющей вызываемого деформацией поверхности раздела возмущения приложенного однородного магнитного поля и ставится также условие непроницаемости для жидкостей

$$y = -h_1{:}\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \mu_1 H, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0; \ y = h_2{:}\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \mu_2 H, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \tag{1.6}$$

В классе течений, описываемых системой (1.1), (1.3)—(1.6), дополненной начальными условиями для функций $\varphi_k(x, y, t)$, $\eta(x, t)$, влияние поля скоростей на распределение магнитного поля осуществляется за счет деформации поверхности раздела жидкостей, вызывающей возмущение лишь x- и y-составляющих магнитного поля. Наличие же однородного магнитного поля, направленного по оси z, не оказывает влияния на плоскопараллельное движение жидкостей, характеристики которого не зависят от z.

Выписанная система уравнений используется далее для исследования влияния магнитного поля на длинные внутренние волны, распространяющиеся по поверхности раздела жидкостей. Анализ возможных нелинейных волновых движений проводится в рамках более простых моделей, при конкретизации которых используется безразмерная форма записи уравнений и краевых условий.

Пусть a и l представляют характерную амплитуду и характерный горизонтальный масштаб волны, а c_0 — предельная скорость распространения линейных длинных волн в двухслойной устойчиво стратифицированной жидкости (см. формулу (2.5)). Вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{a}{h_1}, \ \delta = \frac{h_1}{l}, \ \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \ h = \frac{h_2}{h_1}, \ \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \ m = (\mu_2 - \mu_1)^2 H^2, \ A = \frac{\alpha}{\rho_1 g h_1^2},$$

$$N = \frac{m}{\mu_1 \rho_1 g h_1}$$

$$x' = \frac{x}{l}, \ y' = \frac{y}{h_1}, \ t' = \frac{c_0 t}{l}, \ \eta' = \frac{\eta}{a}, \ \varphi_k' = \frac{\varphi_k}{\varepsilon c_0 l}, \ \psi_k' = \frac{\psi_k}{\mu_k H h_1}, \ k = 1, 2$$

и переходя в (1.1)—(1.6) к безразмерным переменным, получаем (штрихи далее опускаются)

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = 0, \ \delta^2 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} = 0, \ k = 1, 2 \tag{1.7}$$

$$y = \varepsilon\eta{:}\ \psi_1 = \mu\psi_2, \ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \varepsilon\delta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) \tag{1.8}$$

$$y = \varepsilon\eta: \ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} = \delta^{-2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}, \ k = 1, 2 \tag{1.9}$$

$$y = \varepsilon\eta: \ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right] - \rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \delta^{-2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\rho + h}{h}\eta + \frac{N}{2\varepsilon h}\frac{\rho + h}{(\mu - 1)(1 - \rho)}\left[1 + (\varepsilon\delta)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \varepsilon\delta^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2 + \mu\delta^2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)^2\right] -$$

$$- A\frac{\delta^2}{h}\frac{\rho + h}{1 - \rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left[1 + (\varepsilon\delta)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2} = C(t) \tag{1.10}$$

$$y = -1: \ \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0; \ y = h_2: \ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0 \tag{1.11}$$

При записи динамического условия на поверхности раздела жидкостей (1.10) использованы интеграл Коши — Лагранжа и условия сопряжения векторных потенциалов индукции (1.3).

2. Линейные волны. Рассмотрим волны малой амплитуды при наличии однородного магнитного поля, когда невозмущенные потенциалы индукции имеют вид $\psi_k^0 = \mu_k H y$. В результате линеаризации условий (1.2)—(1.5) для малых возмущений η, φ_k, ψ_k получаем

$$y = 0: \ \psi_1 - \psi_2 = (\mu_1 - \mu_2)H\eta; \ \mu_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \mu_2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}; \ \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}, \ k = 1, 2 \tag{2.1}$$

$$\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + g\eta(\rho_1 - \rho_2) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}H\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$$

На стенках канала наряду с условием непроницаемости (1.6) имеем

$$y = -h_1: \ \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0; \ y = h_2: \ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Предполагается, что в начальный момент времени поверхность раздела жидкостей неподвижна, а ее форма известна

$$\frac{\partial\eta(x, 0)}{\partial t} = 0, \ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \tag{2.3}$$

причем функция $\eta_0(x)$ достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$.

С помощью метода преобразования Фурье нетрудно построить решение задачи (1.1), (2.1)—(2.3), удовлетворяющее условию непроницаемости на стенках канала. В частности, при $t > 0$ форма поверхности раздела определяется выражением

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(k)\{\exp[ikx - i\omega(k)t] + \exp[ikx + i\omega(k)t]\}dk \tag{2.4}$$

$$B(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_0(\xi)e^{-ik\xi}d\xi$$

Функция $\omega(k)$, вычисляемая из дисперсионного соотношения, имеет вид

$$\omega(k) = \left[\frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^3}{\rho_1 \operatorname{cth} kh_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kh_2} + \frac{mk^2}{(\rho_1 \operatorname{cth} kh_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kh_2)(\mu_1 \operatorname{cth} kh_1 + \mu_2 \operatorname{cth} kh_2)}\right]^{1/2}$$

Ввиду нечетности функции $\omega(k)$ первое слагаемое в (2.4) описывает волны, движущиеся вдоль оси x, а второе — волны, движущиеся в противоположном направлении. Для длинных ($|k|h_1 << 1$) волн, пренебрегая членами $O[(kh_1)^4]$ по сравнению с единицей, получаем

$$\omega = c_0k - \beta k^3, \quad c_0 = b\sqrt{gh_1}, \quad b^2 = h(1-\rho)(\rho+h)^{-1} \tag{2.5}$$

$$\beta = \frac{\varkappa}{6}c_0h_1^2, \quad \varkappa = \frac{h(1+\rho h)}{\rho+h} - \frac{3}{1-\rho}K, \quad K = A + \frac{h}{\mu+h}N$$

Из выражения для параметра дисперсии β следует, что влияние магнитного поля на эволюцию начального возмущения $\eta_0(x)$, пространственный спектр которого заметно отличен от нуля лишь для $|k| << h_1^{-1}$, формально можно рассматривать как результат увеличения коэффициента поверхностного натяжения на величину $\alpha' = mh_1h_2(\mu_1h_2 + \mu_2h_1)^{-1}$. Согласно [6], при $t \to \infty$ асимптотическое поведение движущихся вдоль оси x волн с законом дисперсии (2.5) существенным образом зависит от знака параметра дисперсии: в случае $\beta > 0$ возмущение поверхности раздела в области $x > c_0t$ экспоненциально убывает с ростом x, а в области $x < c_0t$ затухание возмущения с убыванием x носит осциллирующий характер, тогда как при $\beta < 0$ структура волнового пакета в областях $x > c_0t$ и $x < c_0t$ имеет, напротив, осциллирующий и, соответственно, экспоненциально убывающий вид.

Введем обозначение $A_* = {}^1/_3h(1-\rho)(1+\rho h)(\rho+h)^{-1} > 0$. Обращаясь к (2.5), нетрудно видеть, что при фиксированных ρ, h, μ, A, удовлетворяющих условию $A_* > A$, существует критическое значение параметра N, равное $N_* = h^{-1}(\mu+h)(A_* - A)$, такое, что $\beta > 0$, если $N < N_*$, и $\beta < 0$, если $N > N_*$. Таким образом, в случае $A_* > A$ магнитное поле, превышающее вычисляемое из условия $N = N_*$ критическое значение

$$H_* = \frac{1}{|1-\mu|}\left[\frac{\rho_1gh_1}{\mu_1}\frac{\mu+h}{h}(A_* - A)\right]^{1/2} \tag{2.6}$$

вызывает кардинальное (по сравнению с $H < H_*$) изменение асимптотической формы волнового пакета. Если $A = A_*$, то без магнитного поля волны в рассматриваемом приближении являются гиперболическими, так что $\eta(x, t) = {}^1/_2\eta_0(x - c_0t)$. Для сравнения отметим, что в том же самом случае $A = A_*$ при наличии магнитного поля в головной части волнового пакета за счет дисперсии возникают осцилляции, амплитуда которых с ростом x падает, тогда как в области $x < c_0t$ возмущение поверхности раздела с уменьшением x экспоненциально убывает.

3. **Нелинейные волны. Уравнение Кортевега — де Вриза.** Рассмотрим длинные ($\delta^2 << 1$) внутренние волны на временном масштабе, значительно превышающем характерное время линейной задачи, когда наряду с дисперсией существенную роль играют нелинейные эффекты. Считая $\varepsilon = O(\delta^2)$, преобразуем (1.7)—(1.11) к упрощенной модели, описываемой уравнением КдВ.

Разложив потенциалы $\varphi_k(x, y, t)$, $\psi_k(x, y, t)$ в ряды по степеням y, с учетом (1.7) можем записать

$$\varphi_k(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\delta^{2m}\frac{y^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\left(\varphi_k^0 + \frac{y}{2m+1}\frac{\partial\varphi_k^0}{\partial y}\right), \quad k = 1, 2 \tag{3.1}$$

Верхний индекс градус означает, что функции и их производные вычисляются при $y = 0$. Из краевых условий (1.11) после подстановки в них (3.1) и аналогичных выражений для $\psi_k(x, y, t)$ с помощью метода последовательных приближений по малому параметру δ^2 находим с точностью до членов $O(\delta^4)$

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial y} = -\delta^2\frac{\partial^2\varphi_1^0}{\partial x^2} - \frac{\delta^4}{3}\frac{\partial^4\varphi_1^0}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial\varphi_2^0}{\partial y} = \delta^2 h\frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial x^2} + \frac{\delta^4 h^3}{3}\frac{\partial^4\varphi_2^0}{\partial x^4}$$
$$\frac{\partial\psi_1^0}{\partial y} = 1 - \delta^2\frac{\partial^2\psi_1^0}{\partial x^2} - \frac{\delta^4}{3}\frac{\partial^4\psi_1^0}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial\psi_2^0}{\partial y} = 1 + \delta^2 h\frac{\partial^2\psi_2^0}{\partial x^2} + \frac{\delta^4 h^3}{3}\frac{\partial^4\psi_2^0}{\partial x^4} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1) в кинематические условия на поверхности раздела жидкостей (1.9) и принимая во внимание (3.2), получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi_1^0}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial x}\right) + \frac{\delta^2}{3}\frac{\partial^4\varphi_1^0}{\partial x^4} = O(\varepsilon^2\delta^2)$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - h\frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\right) - \frac{\delta^2 h^3}{3}\frac{\partial^4\varphi_2^0}{\partial x^4} = O(\varepsilon^2\delta^2) \tag{3.3}$$

С учетом последних двух выражений (3.2) разложения векторных потенциалов по степеням y записываются в виде

$$\psi_1(x, y, t) = \psi_1^0 + y - \delta^2\frac{\partial^2\psi_1^0}{\partial x^2}\left(y + \frac{y^2}{2}\right) + \delta^4\frac{\partial^4\psi_1^0}{\partial x^4}\left(\frac{y^4}{24} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{3}\right)$$
$$\psi_2(x, y, t) = \psi_2^0 + y + \delta^2\frac{\partial^2\psi_2^0}{\partial x^2}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) + \delta^4\frac{\partial^4\psi_2^0}{\partial x^4}\left(\frac{y^4}{24} - \frac{hy^3}{6} + \frac{h^3 y}{3}\right) \tag{3.4}$$

Из уравнения, получающегося в результате подстановки разложений (3.4) в первое выражение (1.8), методом последовательных приближений по ε, δ^2 находим

$$\psi_1^0 = \mu\psi_2^0 + \varepsilon(\mu - 1)\eta + \varepsilon\delta^2\mu\eta(h + 1)\frac{\partial^2\psi_2^0}{\partial x^2} + O(\varepsilon^2\delta^2, \varepsilon\delta^4) \tag{3.5}$$

Аналогичным образом после подстановки (3.4) в условие непрерывности касательной составляющей магнитного поля на поверхности раздела (1.8) с учетом (3.5) получаем

$$\frac{\partial\psi_2^0}{\partial x} = \varepsilon\frac{1-\mu}{h+\mu}\frac{\partial\eta}{\partial x} + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^2) \tag{3.6}$$

Далее, подставляя второе выражение (3.4) в продифференцированное по x динамическое условие (1.10) и принимая во внимание (3.6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_1^0}{\partial t\partial x} - \rho\frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial t\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1^0}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_2^0}{\partial x^2}\right) + \frac{\rho + h}{h}\frac{\partial\eta}{\partial x} -$$
$$- \delta^2 K\frac{\rho + h}{h(1-\rho)}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = O(\varepsilon\delta^2) \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что в низшем порядке система (3.3), (3.7), аппроксимирующая задачу (1.7)—(1.11), сводится к волновому уравнению. Ввиду этого для нелинейных волн, бегущих вправо и влево, соответственно имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon, \delta^2), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon, \delta^2) \tag{3.8}$$

Ограничимся исследованием волн, распространяющихся вдоль оси x. Следуя [8], полагаем

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial x} = \eta + \varepsilon A_1 + \delta^2 B_1, \quad \frac{\partial\varphi_2^0}{\partial x} = -\frac{\eta}{h} + \varepsilon A_2 + \delta^2 B_2 \tag{3.9}$$

где A_k, B_k — функции от η и производных η по x. Подставляя (3.9) в (3.3), (3.7), с учетом первого выражения (3.8) получаем

$$f_i + \varepsilon r_i + \delta^2 s_i = O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \; f_i = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}, \; i = 1, 2, 3 \tag{3.10}$$

$$r_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}, \; r_2 = -h\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{2\eta}{h}\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$r_3 = \frac{h}{\rho + h}\left[\rho\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{(h^2-\rho)\eta}{h^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]$$

$$s_1 = \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}, \; s_2 = -h\frac{\partial B_2}{\partial x} + \frac{h^2}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}, \; s_3 = \frac{h}{\rho+h}\left(\rho\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\right) -$$

$$- \frac{1}{1-\rho}K\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}$$

Из условий совместности системы уравнений (3.10) $r_1 = r_2$, $r_2 = r_3$, $s_1 = s_2$, $s_2 = s_3$ находим

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = -\frac{3\rho + 4\rho h + h^2}{2h(\rho+h)}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}, \; \frac{\partial A_2}{\partial x} = -\frac{\rho + 4h + 3h^2}{2h^2(\rho+h)}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \left[\frac{\rho h^2 - 2\rho - h}{6(\rho+h)} - \frac{K}{2(1-\rho)}\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \left[\frac{\rho h + 2h^2 - 1}{6(\rho+h)} + \frac{K}{2h(1-\rho)}\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}$$

При подстановке производных (3.11) в систему (3.10) каждое из трех уравнений, записанное с точностью $O(\varepsilon, \delta^2)$, принимает форму уравнения КдВ. В размерном виде имеем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{q}{h_1}\eta\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \; q = \frac{h^2-\rho}{h(\rho+h)} \tag{3.12}$$

При $q \neq 0$, $\beta \neq 0$ стационарные решения уравнения (3.12) представляют собой либо кноидальные волны, либо солитоны. Волны этих типов распространяются с постоянными скоростями, зависящими от амплитуды и безразмерных параметров ρ, h, μ, A, N. Ограничимся рассмотрением солитонов. В этом случае

$$\eta = a \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3a|\sigma|}{4h_1^3}}(x - Ut)\right], \; U = c_0\left(1 + \frac{aq}{2h_1}\operatorname{sgn}\sigma\right), \; \sigma = \frac{q}{\varkappa} \tag{3.13}$$

Следуя [6], солитон, имеющий вид возвышения — случай $\sigma > 0$, называем положительным, а солитон, имеющий вид впадины — случай $\sigma < 0$,— отрицательным.

В классическом случае — при отсутствии как верхнего слоя жидкости, так и магнитного поля — в пренебрежении капиллярными эффектами ($A = 0$) солитон на мелкой воде является положительным. При учете сил поверхностного натяжения увеличение A вызывает (при $A = {}^1/_3$) изменение знака параметра дисперсии β, что влечет за собой качественное изменение решения (3.13): при $0 \leq A < {}^1/_3$ солитон является положительным, а при $A > {}^1/_3$ — отрицательным [9], причем скорость положительного солитона U_+ больше предельной фазовой скорости $\sqrt{gh_1}$ длинных волн, а скорость отрицательного солитона $U_- < \sqrt{gh_1}$. Учет сил поверхностного натяжения приводит также к уменьшению характерной ширины положительного солитона, имеющего ту же амплитуду, что и в случае $A = 0$.

Рассмотрим двухслойную магнитную жидкость в магнитном поле. Исследуем вначале случай $h^2 > \rho$. С учетом проведенного в разд. 2 анализа влияния поля на коэффициент дисперсии β из (3.13) следует, что при $A < A_*$ солитон в докритическом ($0 < H < H_*$) поле положителен и его скорость $U_+ > c_0$, в то время как в сверхкритическом ($H > H_*$) поле солитон отрицателен и имеет скорость $U_- < c_0$. Если же $A > A_*$, то солитон отрицателен при любом $H \geq 0$, а его скорость $U_- < c_0$. Поскольку в рассматриваемом случае нелинейный член входит в уравнение (3.12) с положительным коэффициентом, то ввиду неустойчивости отрицательного солитона по отношению к длинным поперечным возмущениям [10] решение (3.13) при $H > H_*$ неустойчиво, а при $0 \leq H < H_*$ устойчиво. В случае $A = A_*$ при наличии поля солитон отрицателен; неустойчивость наступает при любом $H > 0$. Если же $A > A_*$, то солитон отрицателен, его скорость $U_- < c_0$ и неустойчивость по отношению к длинным поперечным возмущениям имеет место как без поля, так и при наличии поля. Неустойчивые солитоны, естественно, не могут существовать длительное время.

Пусть теперь $h^2 < \rho$. В этом случае при $A < A_*$ в сверхкритическом поле солитон оказывается положительным, а его скорость $U_+ < c_0$; согласно [10], такой солитон неустойчив. Если же $A < A_*$, а поле докритическое, то солитон оказывается отрицательным, его скорость $U_- > c_0$; такой солитон устойчив. В случае $A = A_*$ при любом $H > 0$ солитон положителен, скорость $U_+ < c_0$ и имеет место неустойчивость. Если же $A > A_*$, то солитон (положительный с $U_+ < c_0$) неустойчив как без магнитного поля, так и при наличии поля.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что при фиксированных ρ, h, μ, A увеличение магнитного поля с переходом через критическое значение (2.6) может вызвать качественное изменение внутренней уединенной волны. Как при $h^2 > \rho$, так и при $h^2 < \rho$ наличие магнитного поля приводит к уменьшению (по сравнению со случаем $H = 0$) характерной ширины солитона, имеющего ту же амплитуду, что и в случае $H = 0$.

4. Модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза. При $h^2 = \rho < 1$ уравнение (3.12) превращается в линейное и эволюция возмущения плоской поверхности раздела описывается выражениями (2.4), (2.5). Асимптотической же моделью задачи (1.7)—(1.11), учитывающей совместное проявление нелинейных и дисперсионных эффектов, при $\rho = h^2$ является модифицированное уравнение КдВ, описывающее те волновые процессы, для которых $\varepsilon = O(\delta)$ [7].

Считая $\varepsilon = O(\delta)$ и следуя изложенной в разд. 3 схеме упрощения задачи (1.7)—(1.11), по-прежнему приходим к системе уравнений (3.3), (3.7), но вместо (3.8) для волн, бегущих вдоль оси x, при $\rho = h^2$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) \tag{4.1}$$

Полагая далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^0}{\partial x} &= \eta + \varepsilon A_1 + \delta B_1 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon\delta D_1 + \delta^2 E_1, \\ \frac{\partial \varphi_2^0}{\partial x} &= -\frac{\eta}{h} + \varepsilon A_2 + \delta B_2 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon\delta D_2 + \delta^2 E_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где A_k, B_k, C_k, D_k, E_k — функции от η и производных η по x, подставим (4.2) в (3.3) и (3.7). В результате с учетом (4.1) получаем

$$f_i + \varepsilon r_i + \delta s_i + \varepsilon^2 u_i + \varepsilon\delta v_i + \delta^2 w_i = O(\varepsilon^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon\delta^2, \delta^3), \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.3}$$

где f_i по-прежнему имеет вид (3.10), а r_i, s_i, u_i, v_i, w_i — некоторые новые функции.

При подстановке в (4.3) производных $\partial A_k/\partial x$, $\partial B_k/\partial x$, $\partial C_k/\partial x$, $\partial D_k/\partial x$, $\partial E_k/\partial x$, вычисляемых из условий совместности системы (4.3), получаем модифицированное уравнение КдВ

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0 \left(1 - \frac{3}{h_1 h_2} \eta^2 \right) \frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \ \beta = \frac{\varkappa}{6} c_0 h_1^2, \ \varkappa = 1 - h + h^2 - \frac{3}{1 - h^2} K \tag{4.4}$$

В общем случае имеется три типа стационарных решений этого уравнения: солитоны, а также ударные и кноидальные волны [11, 12]. В отличие от солитонов, описываемых уравнением (3.12), солитонные решения уравнения (4.4) существуют лишь при $\beta < 0$

$$\eta = \pm a \operatorname{sech} \left[\frac{a}{h_1} \sqrt{-\frac{3}{\varkappa h_1 h_2}} (x - Ut) \right], \ U = c_0 \left[1 - \frac{a^2}{2 h_1 h_2} \right] \tag{4.5}$$

Таким образом, при $A < A_* = {}^1/_3(1 - h)(1 + h^3)$ в докритическом магнитном поле (определяемом выражением (2.6)) солитоны отсутствуют, а в сверхкритическом — существуют. По сравнению с (3.13) солитоны (4.5) при одинаковой амплитуде имеют бо́льшую характерную ширину. Отметим также, что в отличие от (3.13) положительный и отрицательный солитоны (4.5) при одинаковой амплитуде распространяются с одинаковой скоростью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zelazo R. E., Melcher J. R.* Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions//J. Fluid Mech. 1969. V. 39. Pt 1. P. 1—24.
2. *Тарапов И. Е.* Поверхностные волны и устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости//ПМТФ. 1974. № 4. С. 35—40.
3. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
4. *Kant R., Malik S. K.* Nonlinear waves in superposed magnetic fluids//Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3534—3537.
5. *Берковский Б. М., Медведев В. Ф., Краков М. С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
6. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
7. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
8. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. *Benjamin T. B.* The solitary wave with surface tension//Quart. Appl. Math. 1982. V. 40. № 2. P. 231—234.
10. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах//Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753—756.
11. *Jeffrey A., Kakutani T.* Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg — de Vries equation//SIAM Review. 1972. V. 14. № 4. P. 582—643.
12. *Driscoll C. F., O'Neil T. M.* Modulational instability of cnoidal wave solutions of the modified Korteweg — de Vries equation//J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 7. P. 1196—1200.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1992