МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1993

УДК 532.546

© 1993 г. И. С. ГИНЗБУРГ, В. М. ЕНТОВ

О ДИНАМИКЕ ТОНКОЙ ОТОРОЧКИ ПРИМЕСИ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ И НЕОБРАТИМОСТИ СОРБЦИИ

Конвективная диффузия сорбирующейся примеси в пористой среде является одним из фундаментальных механизмов переноса, играющим основную роль при распространении загрязнений в фильтрационных потоках, исследовании пластов с помощью индикаторов, хроматографии и в физико-химических процессах повышения нефтеотдачи пластов. Процесс этот детально исследован рядом авторов и для него получены основные решения, в том числе и решение задачи о динамике тонкой оторочки — первоначально локализованной в весьма узкой области «порции» примеси (см., например, [1, 2]).

Динамика тонкой оторочки играет принципиальную роль в теории методов повышения нефтеотдачи, поскольку в крупномасштабном приближении (в пренебрежении диффузией) теория указывает на целесообразность использования химреагента в виде возможно более тонких оторочек с максимальной концентрацией активного вещества (например, [3]).

Такой вывод, полученный в крупномасштабном приближении, не абсолютен, так как по мере уменьшения размера оторочки становятся существенными локальные диссипативные эффекты — диффузия (дисперсия), неравновесность и необратимость сорбции. Эффекты диффузии и неравновесности в приближенной постановке исследовались ранее (см. изложение и дальнейшие ссылки в [3]). Однако для ряда химреагентов, в частности полимеров, характерна частичная необратимость сорбции [4, 5]. Совместные эффекты необратимости сорбции и дисперсии, очевидным образом существенные для динамики тонких оторочек, ранее, по-видимому, не исследовались.

В данной работе делается определенный шаг в этом направлении. Для простейшей модели равновесной частично необратимой сорбции рассматривается динамика тонкой оторочки нейтральной примеси, переносимой потоком с учетом диффузии (дисперсии). Рассмотрено несколько подходов к решению задачи, выделены случаи, допускающие точные автомодельные решения, которые оказываются решениями второго рода [4]. Изучен асимптотический закон вырождения оторочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим одномерный фильтрационный поток однородной несжимаемой жидкости со скоростью $v(x, t) = Qx^{-s}$, переносящий нейтральную примесь.

Уравнение баланса примеси имеет вид

$$\frac{\partial (mc + a)}{\partial t} + \frac{Q}{x^s}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Dx^s\frac{\partial c}{\partial x}\right) \tag{1.1}$$

Здесь c — концентрация примеси в растворе, a — количество примеси, сорбированной в единице объема среды, m — пористость, D — коэффициент диффузии, $s = 0$ для прямолинейно-параллельного потока, $s = 1$ для плоскорадиального; $Q = Q(t)$ характеризует интенсивность фильтрационного потока. Сорбция предполагается частично необратимой и характеризуется соотношениями

$$\frac{da}{dc} = \Gamma^+, \ \frac{\partial c}{\partial t} > 0; \ \frac{da}{dc} = \Gamma^-, \ \frac{\partial c}{\partial t} < 0, \ \Gamma^\pm = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Соотношения (1.2) дают простейшую аппроксимацию равновесной частично необратимой сорбции с гистерезисом зависимости количества сорбированного вещества от концентрации примеси в растворе наподобие наблюдавшегося в экспериментах [5, 6]. Коэффициент диффузии D в уравнении (1.2) будем считать постоянным, пренебрегая его зависимостью от скорости фильтрации.

Рассмотрим сначала прямолинейно-параллельный поток с начальным условием

$$c(x,\ 0) = \varphi(x) \tag{1.3}$$

где $\varphi(x)$ — гладкая функция, «колоколообразная» с одним максимумом, финитная или достаточно быстро убывающая при $|x| \to \infty$. При этом область течения разобьется на области $\Delta^+(t)$, $\Delta^-(t)$, в которых (1.1) и (1.2) переходят в уравнения вида соответственно

$$(m + \Gamma^{\pm}) \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2};\quad \frac{\partial c}{\partial t} > 0,\quad x \in \Delta^+;\quad \frac{\partial c}{\partial t} < 0,\quad x \in \Delta^- \tag{1.4}$$

На границах областей Δ^- и Δ^+ должны выполняться условия непрерывности концентрации и потока примесей $j = vc - D\partial c/\partial x$, а производная $\partial c/\partial t$ меняет знак. Наличие неизвестных границ делает задачу нелинейной и составляет основную ее трудность.

2. Сведéние к системе интегродифференциальных уравнений. Рассмотрим функции

$$V_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu) = \int_0^t \exp\left\{ - \frac{(x - \xi(\tau) - F(t,\tau))^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \frac{\nu(\tau)\, d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

$$W_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu) = - \int_0^t \frac{x - \xi(\tau) - F(t,\tau)}{2a^2(t-\tau)} \times \tag{2.1}$$

$$\times \exp\left\{ - \frac{(x - \xi(\tau) - F(t,\tau))^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \frac{\nu(\tau)\, d\tau}{2a\sqrt{\pi}\ (t-\tau)};\quad F(t,\tau) = \int_\tau^t f(u)\, du$$

для любой дифференцируемой на $0 < t < \infty$ функции $\nu(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial t} + f(t) \frac{\partial c}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

при $x \neq \xi(t)$. Эти функции являются обобщением известных тепловых потенциалов простого и двойного слоя (например, [7]). Потенциал простого слоя $V_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu)$ непрерывен при переходе точкой x границы $\xi(t)$, потенциал двойного слоя $W_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu)$ претерпевает разрыв

$$W_a^f(\xi(t) \pm 0,\ t,\ \xi,\ \nu) = W_a^f(\xi(t),\ t,\ \xi,\ \nu) \mp \nu(t)/2a^2 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial V_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu)}{\partial x} = W_a^f(x,\ t,\ \xi,\ \nu),\quad x \neq \xi(t) \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.2) с начальным условием $\varphi(t)$ может быть записано в виде

$$\omega_a^f(x,\ t,\ \varphi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \exp\left\{ - \frac{[x - \xi - F(t,0)]^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{2.5}$$

Для сведéния задачи (1.1)—(1.4) к системе интегральных уравнений будем искать решение в каждой из областей задачи в виде

$$c(x,\ t) = \omega_a^f(x,\ t,\ \varphi) + V_a^f(x,\ t,\ \xi_1,\ \nu_1) + V_a^f(x,\ t,\ \xi_2,\ \nu_2)$$

$$\xi_2(t) < x < \xi_1(t) \tag{2.6}$$

$$a_{1,2}^2 = \frac{D}{m + \Gamma^{\pm}},\quad f_{1,2}(t) = \frac{Q(t)}{m + \Gamma^{\pm}}$$

Значения коэффициентов $a_{1,2}$, $f_{1,2}$ зависят от знака $\partial c/\partial t$. Если одна из границ,

$\xi_1(t)$ или $\xi_2(t)$, обращается в ∞, соответствующий потенциал в представлении решения (2.6) опускается.

Таким образом, представляя решение в задаче с двумя границами в виде

$$c(x, t) = c_1(x, t) = \omega^{f_1}_{a_1}(x, t, \varphi) + V^{f_1}_{a_1}(x, t, \xi_1, \nu_1), \quad x > \xi_1(t)$$

$$c(x, t) = c_2(x, t) = \omega^{f_2}_{a_2}(x, t, \varphi) + V^{f_2}_{a_2}(x, t, \xi_1, \nu_2) + V^{f_2}_{a_2}(x, t, \xi_2, \nu_4),$$

$$\xi_2 < x < \xi_1(t) \tag{2.7}$$

$$c(x, t) = c_3(x, t) = \omega^{f_1}_{a_1}(x, t, \varphi) + V^{f_1}_{a_1}(x, t, \xi_2, \nu_3), \quad x < \xi_2(t)$$

сведем задачу к системе интегральных уравнений

$$\frac{\partial c_1(\xi_1(t) + 0, t)}{\partial t} = 0; \quad c_1(\xi_1(t), t) = c_2(\xi_1(t), t) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial c_1(\xi_1(t) + 0, t)}{\partial x} = \frac{\partial c_2(\xi_1(t) - 0, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial c_3(\xi_2(t) - 0, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial c_2(\xi_2(t) + 0, t)}{\partial x} = \frac{\partial c_3(\xi_2(t) - 0, t)}{\partial x}$$

$$c_2(\xi_2(t), t) = c_3(\xi_2(t), t)$$

Используя представление $\partial V^f_a(x, t, \xi, \nu)/\partial t$ при $x \neq \xi(t)$

$$\frac{\partial V^f_a(x, t, \xi, \nu)}{\partial t} = \exp\left\{-\frac{[x - \xi(0) - F(t, 0)]^2}{4a^2 t}\right\}\frac{\nu(0)}{2a\sqrt{\pi t}} +$$

$$+ V^f_a(x, t, \xi, \nu') - W^f_a(x, t, \xi, \nu\xi') + W^f_a(x, t, \xi, (f(\tau) - f(t))\,\nu(\tau))$$

приходим к нелинейной системе интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\nu_3(t)$, $\nu_4(t)$. В общем случае для численного решения этой системы ее удобно преобразовать, заменяя производные от границ $\xi(t)$ и весовых функций $\nu_i(t)$ их разностными аналогами.

Сведение задачи к системе интегродифференциальных уравнений дает понижение размерности и уменьшение объемов памяти ЭВМ по сравнению, скажем, с решением задачи разностными методами. Однако в данной работе будут рассмотрены только случаи, допускающие точное решение.

3. Автомодельные решения. В работах [4, 8] построено автомодельное решение 2-го рода и доказано несуществование автомодельного решения 1-го рода с требуемыми свойствами непрерывности для задачи о тепловом источнике для уравнения теплопроводности с гистерезисом теплоемкости. С математической точки зрения эту задачу можно считать частным случаем рассматриваемой в данной работе задачи диффузии с необратимой сорбцией, отвечающим отсутствию конвекции. Пользуясь аналогичными приемами, построим автомодельное решение 2-го рода для двух задач диффузии с необратимой сорбцией и конвекцией, а затем получим соответствующее решение из системы интегральных уравнений (2.8).

Рассмотрим решение задачи (1.4) при $v = Qt^{-1/2}$, удовлетворяющее следующим начальному и граничному (на бесконечности) условиям:

$$c(x, 0) \equiv 0, \quad x \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} c(x, 0)\,dx = c_0, \quad c(\infty, t) = 0$$

непрерывное вместе с частной производной по x.

Из анализа размерности решение (3.1) должно было бы представляться в виде

$$c(x, t) = C_0 (Dt)^{1/2} c(\xi), \quad \xi = x (Dt)^{-1/2} \tag{3.1}$$

причем требование непрерывности $c(x, t)$ и $\partial c(x, t)/\partial x$ приводит к требованию непрерывности $c(\xi)$ и $c'(\xi)$. Из автомодельности задачи для области возрастания концентрации $x > \xi_0^1 \sqrt{Dt}$ и $x < \xi_0^2 \sqrt{Dt}$ и для области уменьшения $\xi_0^2 \sqrt{Dt} < x < \xi_0^1 \sqrt{Dt}$; ξ_0^1, ξ_0^2 — постоянные, зависящие от $\varepsilon^{\pm} = m + \Gamma^{\pm}$, $\beta = Q/\sqrt{D}$; $\xi_0^2 = -\xi_0^1$ при $v = 0$. Подставляя решение в форме (3.1) в уравнение (1.4), получим для $c(\xi)$ обыкновенное уравнение

$$c''(\xi) + (\tfrac{1}{2}\xi\varepsilon^+ - \beta) c'(\xi) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^+ c(\xi) = 0, \quad \xi c'(\xi) + c(\xi) < 0 \tag{3.2}$$

$$c''(\xi) + (\tfrac{1}{2}\xi\varepsilon^- - \beta) c'(\xi) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^- c(\xi) = 0, \quad \xi c'(\xi) + c(\xi) > 0$$

причем константы ξ_0^1 и ξ_0^2 являются корнями уравнения

$$\xi c'(\xi) + c(\xi) = 0$$

Решение уравнения (3.2) с заданным условием на бесконечности представляется в виде

$$c(\xi) = C_1 \exp(\beta\xi - \tfrac{1}{4}\varepsilon^+\xi^2), \quad \xi > \xi_0^1$$

$$c(\xi) + \left(A \int_0^{\xi} \exp\left(\frac{\varepsilon^- u^2}{4} - \beta u\right) du + B \right) \exp\left(\beta\xi - \frac{\varepsilon^-\xi^2}{4}\right), \quad \xi_0^2 < \xi < \xi_0^1 \tag{3.3}$$

$$c(\xi) = C_2 \exp(\beta\xi - \tfrac{1}{4}\varepsilon^+\xi^2), \quad \xi < \xi_0^2$$

и содержит четыре неопределенные константы: A, B, C_1, C_2. Требования непрерывности функции и ее производной в точках границы ξ_0^1, ξ_0^2 приводят к линейной системе однородных алгебраических уравнений для определения A, B, C_1 и C_2. Нетрудно показать, что в случае $\varepsilon^+ \neq \varepsilon^-$ ($\Gamma^+ \neq \Gamma^-$) не существует таких констант ξ_0^1 и ξ_0^2, при которых определитель этой системы был бы равен нулю, и, следовательно, не существует нетривиального решения задачи; в случае обратимой сорбции ($\Gamma^+ = \Gamma^-$) нетривиальное решение существует и границы определяются равенством

$$\xi_0^{1,2} = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\varepsilon})/\varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon^- = \varepsilon^+$$

Таким образом, как и в задаче о модифицированном тепловом источнике [4, 8], решение вида (3.1) не существует и, следовательно, не существует предельной при больших временах асимптотики в форме (3.1) для широкого класса решений, удовлетворяющих начальным условиям вида

$$c(x, 0) = (c_0/l)\, \varphi(x/l) \tag{3.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du = 1; \quad c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, 0)\, dx$$

где l — некоторый пространственный масштаб, характеризующий размер начальной оторочки, c_0 — количество растворенной примеси в начальный момент времени, функция $\varphi(u)$ — четная, безразмерная, достаточно гладкая, монотонно убывающая быстрее любой степени с ростом абсолютной величины аргумента функция.

Решение задачи с такими начальными условиями, содержащими дополнительный размерный параметр l, уже не будет автомодельным и, согласно П-теореме, может быть записано в виде

$$c(x, t) = c_0 (Dt)^{-1/2} F(\xi, \eta), \quad \eta = l (Dt)^{-1/2} \tag{3.5}$$

Предположим, следуя [4, 8], а затем подтвердим численными расчетами, что при $\eta \to 0$ все же существует автомодельная асимптотика, т. е. существует действительное число α, зависящее от ε^+, ε^- и β, такое, что

$$\lim_{\eta \to 0} \eta^{-\alpha} F(\xi, \eta) = c(\xi) \tag{3.6}$$

существует и отличен от нуля.

Поэтому при $\eta \to 0$ асимптотическая форма решения имеет вид

$$c(x, t) = c_0 l^{\alpha} (Dt)^{-(1+\alpha)/2} c(\xi) \tag{3.7}$$

Предельный переход при $\eta \to 0$ к автомодельной асимптотике можно осуществлять как стремлением $t \to \infty$ при неизменном $\xi = x/\sqrt{Dt}$, так и стремлением $l \to 0$. В задаче с обратимой сорбцией, т. е. при $\alpha = 0$, при таком переходе получается то же автомодельное решение, что и при $t \to \infty$. В задаче с $\alpha \neq 0$ необходимо дополнительно потребовать, чтобы выражение $A = \beta_0 c_0 l^{\alpha} \to A_0 \neq 0$ при $l \to 0$ оставалось конечным и не равным нулю. Здесь β_0 — безразмерная постоянная, зависящая от нормировки функции $c(\xi)$. Тогда выражению (3.7) можно придать вид

$$c(x, t) = A (Dt)^{-1/2(1+\alpha)} c(\xi) \tag{3.8}$$

В автомодельном решении (3.8) 2-го рода «момент»

$$M_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) \mid x \mid^{\alpha} dx$$

конечен, отличен от нуля и сохраняется во времени, если конечен и не равен нулю

$$M_{\xi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \mid \xi \mid^{\alpha} d\xi$$

Подставляя (3.8) в основное уравнение (1.4), получим для функции $c(\xi)$ обыкновенное уравнение

$$c''(\xi) + (1/2 \varepsilon^* \xi - \beta) c'(\xi) + 1/2 (1 + \alpha) \varepsilon^* c(\xi) = 0$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon^+, \ \ \xi c'(\xi) + (1 + \alpha) c(\xi) < 0; \ \ \varepsilon^* = \varepsilon^-, \ \ \xi c' + (1 + \alpha) c > 0 \tag{3.9}$$

Для нахождения решения сделаем замену переменной

$$\eta = \xi - 2\beta/\varepsilon^*, \ \ \varepsilon^* = \varepsilon^+, \ \ \xi > \xi_0^1, \ \ \xi < \xi_0^2, \ \ \varepsilon^* = \varepsilon^-, \ \ \xi_0^2 < \xi < \xi_0^1 \tag{3.10}$$

$$\frac{d^2c}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \varepsilon^* \eta \frac{dc}{d\eta} + \frac{1 + \alpha}{2} \varepsilon^* c = 0$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon^-, \ \ \left(\eta + \frac{2\beta}{\varepsilon^-} \right) \frac{dc}{d\eta} + (1 + \alpha) c > 0 \tag{3.11}$$

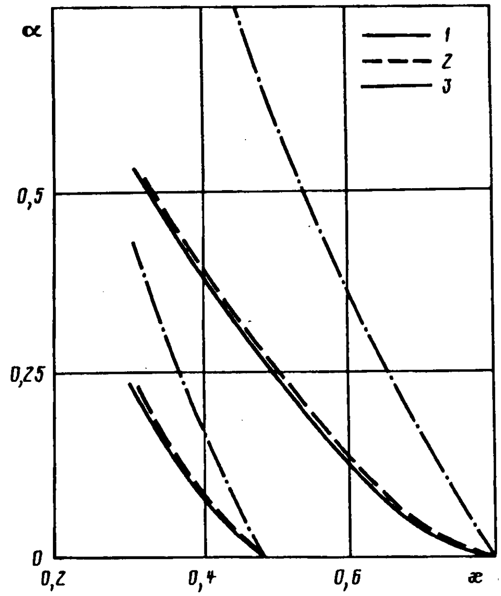
$$\varepsilon^* = \varepsilon^+, \ \ \left(\eta + \frac{2\beta}{\varepsilon^+} \right) \frac{dc}{d\eta} + (1 + \alpha) c < 0$$

Два линейно независимых решения уравнения (3.11) при $\varepsilon^* = 1$ выражаются через вырожденные гипергеометрические функции $F(a, b, x)$ [9]

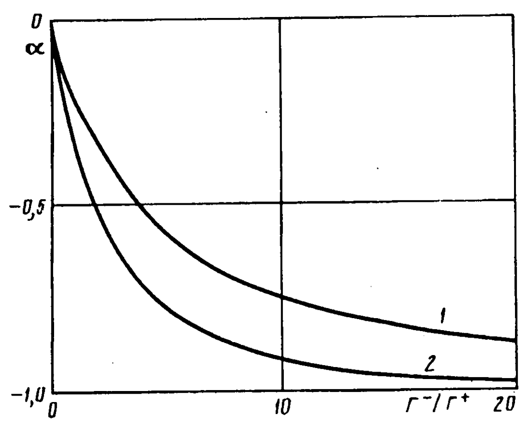
$$c_1(\eta) = C_1^* \exp\left(- \frac{\varepsilon\eta^2}{4} \right) \eta \varepsilon^{3/4} F\left(\frac{1 - \alpha}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\varepsilon\eta^2}{4} \right) \tag{3.12}$$

$$c_2(\eta) = C_2^* \exp\left(- \frac{\varepsilon\eta^2}{4} \right) \varepsilon^{1/4} F\left(- \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon\eta^2}{4} \right)$$

Используя асимптотику функций $F(a, b, x)$ при $x \to \infty$ и a, не равном целому



Фиг. 1



Фиг. 2

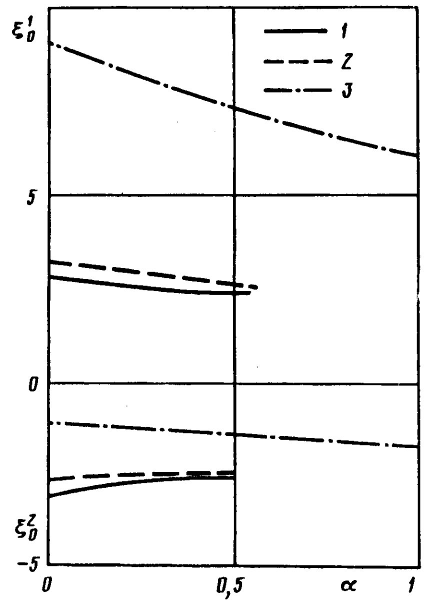
неположительному числу, можно показать, что решение, удовлетворяющее условию сходимости $M_\xi(\alpha)$, имеет вид

$$c(\eta) = C_{1,2}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(1-\alpha))}{\Gamma(\frac{3}{2})} C_1(|\eta|) - \frac{\Gamma(-\alpha/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} C_2(|\eta|),\right.$$

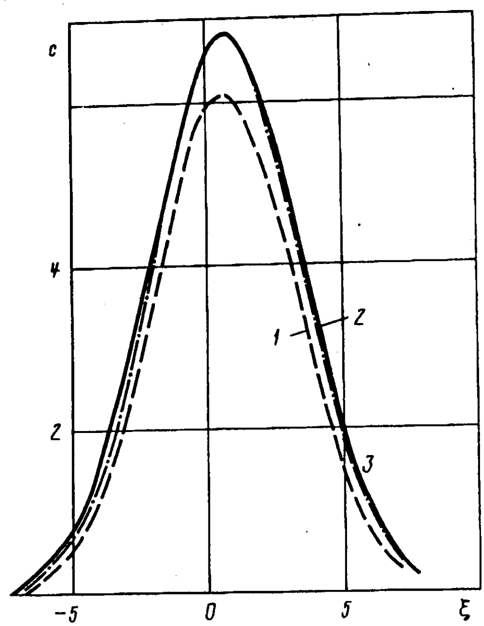
$$\eta = \xi - \frac{2\beta}{\varepsilon^+}, \quad \xi > \xi_0^1, \quad \xi < \xi_0^2 \tag{3.13}$$

$$c(\eta) = AC_1(|\eta|) + BC_2(|\eta|), \quad \eta = \xi - \frac{2\beta}{\varepsilon^-}; \quad \xi_0^2 < \xi < \xi_0^1$$

В том случае, если параметр a равен целому неположительному числу, т. е. ряд для вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b, x)$ содержит лишь



Фиг. 3



Фиг. 4

конечное число отличных от нуля слагаемых, решение в областях $\xi > \xi_0^1$ ($\xi < \xi_0^2$) представим в форме $C_{1,2}(\eta)$, отвечающей данному a.

Требование непрерывности функции $c(\xi)$ и ее производной на границах ξ_0^1 и ξ_0^2 приводит к нелинейной задаче на собственные значения (нелинейной, так как границы задачи неизвестны и должны быть найдены в ходе решения). Решая численно поставленную задачу, находим значения $\alpha(\varepsilon^+, \varepsilon^-, \beta)$ для $\Gamma^+ \geq \Gamma^-$ (фиг. 1) и $\Gamma^+ \leq \Gamma^-$ (фиг. 2) и соответствующие границы $\xi_0^1(\alpha)$ и $\xi_0^2(\alpha)$ (фиг. 3). На фиг. 1 левая группа кривых соответствует $\Gamma^- = 0{,}2$, правая — $\Gamma^- = 0{,}05$; пористость $m = 0{,}2$, $\varkappa = m/(m + \Gamma^+)$. На фиг. 1 и 3 кривым *1*—*3* отвечают значения $\beta = 0$, 0,1 и 1; кривым *1* и *2* на фиг. 2 — $\beta = 0$ и 0,3.

В случае $v = 0$ найденные зависимости полностью соответствуют результатам [4]. При $\Gamma^+ = \Gamma^-$ приходим к уже упоминавшемуся автомодельному решению 1-го рода: $\alpha = 0$, $\xi_0^{1,2} = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\varepsilon})/\varepsilon$. При $\Gamma^+ > \Gamma^-$ величина α положительна, при $\Gamma^+ < \Gamma^-$ и любом β, в том числе $\beta = 0$, $\alpha \in]-1, 0[$. Последний результат будет также подтвержден аналитически из условий разрешимости системы интегральных уравнений (см. ниже разд. 4).

Решение нелинейной задачи на собственные значения определяет решение $c(x, t)$ лишь с точностью до константы A. Как и в случае отсутствия конвекции, найти константу A, используя интегральный закон сохранения количества растворенной примеси, не удается, так как закон сохранения, имеющий место для обратимой сорбции, заменяется неинтегрируемым соотношением ($x_0^1(t)$ и $x_0^2(t)$ — границы зон смены вида уравнения)

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t)\,dx = (D^- - D^+)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=x_0^1(t)} - \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=x_0^2(t)}\right) -$$

$$-\frac{Q^+ - Q^-}{\sqrt{t}}\,[c(x_0^2(t), t) - c(x_0^1(t), t)] \neq 0 \quad D^\pm = \frac{D}{m + \Gamma^\pm}, \quad Q^\pm \frac{Q}{m + \Gamma^\pm}$$

Смысл этого состоит в том, что «закон сохранения» учитывает лишь растворенное вещество и не учитывает того, что часть примеси необратимо сорбирована скелетом.

Таким образом, константа A является более сложным функционалом начального распределения концентрации $c(x, 0)$ и неизвестен какой-либо способ априорного определения этой константы по $c(x, 0)$ при фиксированных ε^+, $\varepsilon-$ и β; т. е. при фиксированной величине α, полностью определенной заданием этих параметров. Воспользуемся поэтому численным алгоритмом определения константы A, предложенным в [4]. Если построенное автомодельное решение является автомодельной промежуточной асимптотикой, то при достаточно больших временах решение с неавтомодельными начальными данными, пусть даже финитными, должно выходить на построенную асимптотику (фиг. 4) (здесь кривые *1—3* соответствуют $t = 0{,}4$; 1 и $t > 1$), а следовательно, например, зависимость $c(0, t)$ должна выходить на асимптотику вида $Ac(0)(Dt)^{-\lambda}$, $\lambda = 1/2 \times (1 + \alpha)$, т. е. зависимость $\ln c\,(0, t)$ при больших значениях t должна хорошо аппроксимироваться прямой

$$\ln A^* - \lambda \ln t, \quad A^* = Ac\,(0)\,D^{-\lambda}$$

Таким образом, в координатах $(\ln c, \ln t)$ константа A^* (A) определяется однозначно, что дает возможность определения функции $c(\xi) = c(0)c(x, t)t^{\lambda}/A^*$ по результатам численных расчетов $c(x, t)$.

Построенное автомодельное решение 2-го рода дает общее представление о поведении концентрации растворенной примеси при больших временах. Например, определяется закон убывания концентрации примеси в точке $x = 0$: $c(0, t) = A^* t^{-\lambda}$.

4. Автомодельные решения системы интегродифференциальных уравнений. Построенную промежуточную автомодельную асимптотику можно использовать также для тестирования различных методов решения задачи с необратимой сорбцией. Рассмотрим решение задачи с $v = Qt^{-1/2}$ и начальным распределением (3.4) методом сведения к системе интегральных уравнений, предложенным выше. Весовые функции $\nu_i(t)$, исходя из анализа размерности, могут быть представлены в виде

$$\nu_i(t) = \frac{c_0}{\sqrt{Dt}} \sqrt{\frac{D}{t}}\, f_i\left(\frac{l}{\sqrt{Dt}}\right)$$

где $f_i(\eta)$ — безразмерные функции, $\eta = l/\sqrt{Dt}$. Предполагая, что существуют такие числа α_i, что предел $\eta^{-\alpha_i} f_i$, $\eta \to 0$, конечен и отличен от нуля, приходим к асимптотическому представлению весовых функций в виде

$$\nu_i(t) = \nu_i^* c_0 l^{\alpha_i} D^{-1/2\alpha_i} t^{-1-1/2\alpha_i} \tag{4.1}$$

Повторяя предыдущие рассуждения о характере предельного перехода при $\eta \to 0$ и учитывая, что в автомодельном решении 2-го рода предел произведения $c_0 l^{\alpha}$ при $l \to 0$ конечен и отличен от нуля, получаем с необходимостью $\alpha_i = \alpha$. Таким образом, будем искать решение в форме (2.6), отвечающее весовым функциям

$$\nu_i(t) = \nu_i^{\circ} t^{-k/2}, \quad \nu_i^{\circ} = \nu_i^* D^{-\alpha_i/2}$$

При этом для существования потенциалов простого слоя необходимо выполнение условия $k < 2$, т. е. $\alpha < 0$, что в свою очередь отвечает $\Gamma^- > \Gamma^+$.

Для начальных распределений $\varphi(x)$ типа (3.4) интегралы Пуассона $\omega_a^{Q\sqrt{t}}(x, t, \varphi)$ и их частные производные по t и x ведут себя при $l \to 0$, $p \to \infty$ как pl, где p — максимальное значение начального распределения $\varphi(x)$; такое же поведение при $l \to 0$ имеет c_0 и, следовательно, при $l \to 0$ в представлении решения (2.6) и в системе (2.8) указанные функции стремятся к нулю при

$\alpha < 0$. Явный вид зависимости потенциалов простого и двойного слоя от времени при $x_0^{1,2}(t) = \xi_{1,2} t^{1/2}$ и $\nu_i = \nu_i^\circ t^{-k/2}$ представим как

$$
\begin{aligned}
&V_a^{Q\sqrt{t}}(\xi_1\sqrt{t}, t, \xi_2\sqrt{t}, \nu_i^\circ t^{-k/2}) = \frac{\nu_i^\circ t^{(1-k)/2}}{2a\sqrt{\pi}} G_k(\xi_1, \xi_2, Q) \\
&W_a^{Q\sqrt{t}}(\xi_1\sqrt{t}, t, \xi_2\sqrt{t}, \nu_i^\circ t^{-k/2}) = \frac{\nu_i^\circ t^{-k/2}}{4a^3\sqrt{\pi}} F_k(\xi_1, \xi_2; Q) \\
&G_k(\xi_1, \xi_2, Q) = \int_0^1 \frac{u^{-k/2}}{\sqrt{1-u}} \exp\left\{ -\frac{(\xi_1 - 2Q - (\xi_2 - 2Q)\sqrt{u})^2}{4a^2(1-u)} \right\} du \\
&F_k(\xi_1, \xi_2, Q) = -\int_0^1 \frac{u^{-k/2}[\xi_1 - 2Q - (\xi_2 - 2Q)\sqrt{u}]}{\sqrt{1-u}\,(1-u)} \times \\
&\times \exp\left\{ -\frac{(\xi_1 - 2Q - (\xi_2 - 2Q)\sqrt{u})^2}{4a^2(1-u)} \right\} du
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Подставляя эти выражения в систему (2.8), используя приведенные выше свойства потенциалов, придем к системе

$$
\begin{aligned}
&-\xi_1 F_k(\xi_1, \xi_1, Q_1) + 2a_1\sqrt{\pi}\,\xi_1 + 2a_1^2(1-k)G_k(\xi_1, \xi_1, Q_1) = 0 \\
&-\xi_2 F_k(\xi_2, \xi_2, Q_1) - 2a_2\sqrt{\pi}\,\xi_2 + 2a_1 a_2(1-k)G_k(\xi_2, \xi_2, Q_1) = 0 \\
&a_2\nu_1^\circ G_k(\xi_1, \xi_1, Q_1) = a_1\nu_2^\circ G_k(\xi_1, \xi_1, Q_2) + a_1\nu_4^\circ G_k(\xi_1, \xi_2, Q_2) \\
&a_2\nu_3^\circ G_k(\xi_1, \xi_1, Q_1) = a_1\nu_2^\circ G_k(\xi_2, \xi_1, Q_2) + a_1\nu_4^\circ G_k(\xi_2, \xi_2, Q_2) \\
&\frac{\nu_1^\circ F_k(\xi_1, \xi_2, Q_1)}{\pi^{1/2}a_1^3} - \frac{2\nu_1^\circ}{a_1^2} = \frac{\nu_2^\circ F_k(\xi_1, \xi_1, Q_2)}{\pi^{1/2}a_2^3} + \frac{\nu_4^\circ F_k(\xi_1, \xi_2, Q_2)}{\pi^{1/2}a_2^3} + \frac{2\nu_2^\circ}{a_2^2} \\
&\frac{\nu_3^\circ F_k(\xi_2, \xi_2, Q_1)}{\pi^{1/2}a_1^3} + \frac{2\nu_i^\circ}{a_i^2} = \frac{\nu_4^\circ F_k(\xi_2, \xi_2, Q_2)}{\pi^{1/2}a_2^3} + \frac{\nu_2^\circ F_k(\xi_2, \xi_1, Q_2)}{\pi^{1/2}a_2^3} - \frac{2\nu_2^\circ}{a_2^2}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Последние четыре уравнения полученной системы, обеспечивающие непрерывность функции и ее производной на границах, образуют линейную однородную систему алгебраических уравнений. Условие существования нетривиального решения этой системы совместно с первым и вторым уравнениями образуют нелинейную систему уравнений относительно констант $\xi_1 = \xi_0^1\sqrt{D}$ и $\xi_2 = \xi_0^2\sqrt{D}$ и $k = \alpha + 2$. Численное решение этой системы при $\Gamma^+ < \Gamma^-$ с хорошей точностью совпадает с результатом, полученным выше при построении автомодельного решения 2-го рода. Более того, $\xi_1 > 0$ и $\xi_2 < 0$ тогда и только тогда, когда $k > 1$ $(\alpha > -1)$.

5. **Автомодельное решение для осесимметричного течения.** Рассмотрим задачу о мгновенной закачке тонкой оторочки примеси через осесимметричный источник (скважину). В этом случае эволюция концентрации описывается уравнением

$$
\begin{aligned}
&(m + \Gamma^+)\frac{\partial c}{dt} + \frac{Q}{x}\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial c}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial c}{\partial t} > 0 \\
&(m + \Gamma^-)\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{Q}{x}\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial c}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial c}{\partial t} < 0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

с краевым условием $c(0, t) \equiv 0$, $t > 0$.

Начальное распределение концентрации будем считать сингулярным и сосредоточенным при $x = 0$. В такой постановке и у задачи (5.1) при $\Gamma^+ \neq \Gamma^-$ не существует автомодельного решения 1-го рода, обеспечивающего непрерывность функции с (x, t) и $\partial c(x, t)/\partial x$, однако имеет место автомодельная промежуточная асимптотика 2-го рода. Действительно, в соответствии с анализом размерности в автомодельном решении 1-го рода

$$c(x,t)=\left(\frac{C_0}{Dt}\right)c(\xi),\quad \xi=\frac{x^2}{(Dt)} \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}4\xi c''(\xi)+(\varepsilon^+\xi-2\beta)c'(\xi)+\varepsilon^+c(\xi)=0,\quad \xi c'(\xi)+c(\xi)\le 0\\ 4\xi c''(\xi)+(\varepsilon^-\xi-2\beta)c'(\xi)+\varepsilon^-c(\xi)=0,\quad \xi c'(\xi)+c(\xi)>0\\ \beta=(Q-D)/D-1;\quad \beta>-2;\quad \varepsilon^\pm=m+\Gamma^\pm\end{gathered} \tag{5.3}$$

Решение этого уравнения с граничным условием $c(0)=0$ имеет вид

$$\begin{gathered}c(\xi)=C_1\exp(-\tfrac14\varepsilon^+\xi)\,\xi^{1/2(\beta+2)},\quad \xi\ge\xi_0\\ c(\xi)=C_2\exp(-\tfrac14\xi\varepsilon^-)\,\xi^{1/2(\beta+2)},\quad 0\le\xi\le\xi_0\\ \xi_0c'(\xi_0)+c(\xi_0)=0\end{gathered} \tag{5.4}$$

Условия непрерывности $c(\xi)$ и $c'(\xi)$ на границе $\xi=\xi_0$ образуют линейную систему однородных уравнений относительно констант C_1 и C_2, определитель которой при $\varepsilon^+\ne\varepsilon-$ отличен от нуля при любом ξ_0.

В задаче с обратимой сорбцией автомодельное решение 1-го рода по-прежнему существует и является асимптотикой при $l\to 0$ задач с начальным условием вида

$$c(x,0)=C_0l^{-2}c^*\left(\frac{x}{l}\right),\quad x\ge 0;\quad \int_0^\infty uc^*(u)\,du=1;\quad \int_0^\infty xc(x,0)\,dx=c_0 \tag{5.5}$$

где $c^*(u)$ — безразмерная, достаточно гладкая, монотонно убывающая быстрее любой степени при $u\to\infty$ функция.

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к представлению автомодельной промежуточной асимптотики в форме

$$c(x,t)=A(Dt)^{-1/2(1+\alpha)}c(\xi),\quad \xi=x^2/(Dt) \tag{5.6}$$

$$4\xi c''+(\varepsilon^+\xi-2\beta)c'(\xi)+\tfrac12(1+\alpha)\varepsilon^+c=0;\quad 2\xi c'(\xi)+(1+\alpha)c<0 \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered}4\xi c''+(\varepsilon^-\xi-2\beta)+\tfrac12(1+\alpha)\varepsilon^-c=0\\ 2\xi c'(\xi)+(1+\alpha)c>0\end{gathered}$$

Для этой задачи «момент» $M_x^+(\alpha)$ конечен, отличен от нуля и сохраняется во времени, если конечен и отличен от нуля $M_\xi^+(\alpha)$. Здесь

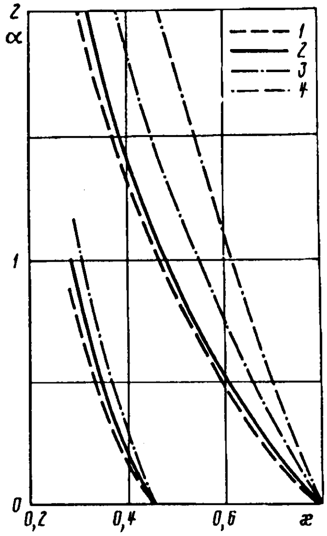
$$M_x^+(\alpha)=\int_0^\infty c(x,t)\,x^\alpha\,dx;\quad M_\xi^+(\alpha)=\int_0^\infty c(\xi)\,\xi^{1/2(\alpha-1)}\,d\xi$$

Требование конечности моментов приводит к представлению решения

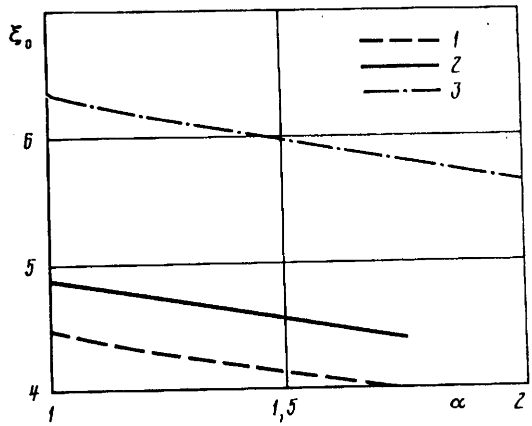
$$\begin{gathered}c(\xi)=C_2\xi^{1+\beta/2}\left(\frac{\varepsilon^-}{4}\right)^{\beta/4+1}\exp\left(-\frac{\varepsilon^-\xi}{4}\right)F\left(\frac{1-\alpha}{2},\,2+\frac{\beta}{2},\,\frac14\varepsilon^-\xi\right),\quad \xi\le\xi_0\\ c(\xi)=C_1\left(\frac{\varepsilon^+}{4}\right)^{-\beta/4}\exp\left(-\frac{\varepsilon^+\xi}{4}\right)\left[\frac{\Gamma(-\tfrac12(\beta+\alpha+1))}{\Gamma(-\tfrac12\beta)}\times\right.\\ \times F\left(-\frac{1+\alpha+\beta}{2},\,-\frac{\beta}{2},\,\frac{\varepsilon^+\xi}{4}\right)-\frac{\Gamma(\tfrac12(1-\alpha))}{\Gamma(2+\beta/2)}\times\\ \left.\times\left(\frac{\varepsilon^+\xi}{4}\right)^{1+\beta/2}F\left(\frac{1-\alpha}{2},\,2+\frac{\beta}{2},\,\frac{\varepsilon^+\xi}{4}\right)\right],\quad \xi>\xi_0\end{gathered} \tag{5.8}$$

Решение при $\xi\le\xi_0$ всегда представляется в указанной форме, однако оно может иметь другое представление при $\xi>\xi_0$ в том случае, когда второй параметр функций $F(a,c,x)$ равен целому неположительному числу, решение целесообразно представить в виде соответствующей функции Трикоми $f(a,c,x)$, определенной при всех значениях параметров [11], если же первый параметр функции $F(a,c,x)$ равен целому неположительному числу, поступаем рассмотренным выше способом.

Автомодельное решение 2-го рода для случая $\beta=-2$ ($Q=0$) и с соответствующим граничным условием $c(0,t)=c^\circ\ne 0$ было построено в [12], а решение задачи $\beta=-1$, $c(0,t)=0$ («диполь») — в



Фиг. 5



Фиг. 6

[8]. Результаты решения нелинейной задачи (5.8) на собственные значения α, обеспечивающие непрерывность функции $c(\xi)$ и ее производной при неизвестной границе ξ_0, представлены на фиг. 5, 6. В случае $\beta = -1$ они совпадают с результатами [8]: в этом случае α зависит только от $\varepsilon = \varepsilon^+/\varepsilon^-$.

На фиг. 5 кривым *1—4* отвечают значения $\beta = -1{,}5$; -1, 1 и 5; прочие параметры и группировка кривых соответствуют фиг. 1. На фиг. 6 кривым *1—3* отвечают $\beta = -1{,}1$ и 5.

Автомодельная промежуточная асимптотика по-прежнему определена лишь с точностью до константы A. Закон сохранения $M_x^+(1)$ при $\Gamma^+ = \Gamma^-$ заменяется $\Gamma^+ \neq \Gamma^-$ неинтегрируемым соотношением

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty xc\,(x,\,t)\,dx = x_0\,(t)\,(D^- - D^+)\,\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)} - c\,(x_0\,(t),\,t)\,(Q^- - Q^+), \tag{5.9}$$

$$D^\pm = \frac{D}{m + \Gamma^\pm};\ Q^\pm = \frac{Q}{m + \Gamma^\pm}$$

Размерность константы A определяется решением сформулированной выше нелинейной задачи на собственные значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
3. *Ентов В. М., Зазовский А. Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989. 232 с.
4. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 206 с.
5. *Szabo M. T.* Some aspects of polymer retention in porous media using a C^{14}-tagged hydrolyzed polyacrylamide//Soc. Petr. Eng. J. 1975. V. 15. № 4. P. 323—337.
6. *Ентов В. М., Полищук А. М.* Движение аномальных жидкостей в пористой среде. II//Реология. Полимеры и нефть. Новосибирск, 1977. С. 144—162.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

8. *Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И.* Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации//ПММ. 1969. Т. 33. № 5. С. 861—870.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
12. *Керчман В. И.* К автомодельным решениям второго рода в теории нестационарной фильтрации//ПММ. 1971. Т. 35. № 1. С. 189—192.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1990