

УДК 532.59:534.1

© 1993 г. А. В. МАРЧЕНКО

## ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ТРЕЩИНЕ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ

Рассматриваются периодические во времени движения слоя жидкости конечной глубины под ледяным покровом с бесконечной прямолинейной трещиной, имеющие периодическую зависимость от горизонтальной координаты вдоль трещины. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной. Предполагается, что толщина пластины меняется скачком при переходе через трещину. Решены задачи о дифракции плоских волн на трещине, о дифракции плоских волн на  $N$  трещинах в однородном ледяном покрове, об отражении плоской волны от твердой стенки. Исследовано влияние предварительного напряженного состояния ледяного покрова на свойства отраженных волн. Получено условие непрохождения волн фиксированной частоты под кромку льда.

Решение задач строится методом Винера — Хопфа. Этот метод использовался ранее при решении задач о дифракции гидроакустических волн на неоднородностях различного типа в упругой пластине [1—5]. Специфика данной работы состоит в исследовании двумерных эффектов, возникающих при взаимодействии плоских волн с трещиной, при условии, что угол между фронтом падающей волны и трещиной не равен нулю.

1. Рассматриваются периодические во времени потенциальные движения тяжелой жидкости, находящейся под ледяным покровом, моделирующимся тонкой упругой пластиной. Полагается, что зависимость от времени потенциала скоростей жидкости  $\varphi$  выражается множителем  $\exp(i\omega t)$ , который в дальнейшем опускается. Линеаризованная система уравнений и граничных условий в безразмерной форме записывается в виде [4, 6]

$$\mu \nabla \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad z \in (0, -1) \quad (1.1)$$

$$-\gamma \varphi + R^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -1$$

$$\mu = \left(\frac{H}{L}\right)^2, \quad \gamma = \frac{\omega^2 H}{g}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$R^* (q_{\alpha\beta}, D) = 1 - q_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2q_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - q_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \Delta^2$$

$$q_{\alpha\beta} (h, \sigma_{\alpha\beta}) = \frac{\sigma_{\alpha\beta} h}{\rho g L^2}, \quad D (h) = \frac{E h^3}{\rho g L^4 (1 - \nu^2)}$$

Здесь  $L$  — горизонтальный масштаб;  $H$  — вертикальный масштаб и глубина жидкости;  $\omega^{-1}$  — временной масштаб;  $\rho$  — плотность жидкости;  $h$ ,  $E$ ,  $\nu$  — толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда,  $\sigma_{\alpha\beta}$  — тензор напряжений в ледяном покрове.

Если в качестве характерной величины потенциала  $\varphi$  взять  $a\omega H$ , где  $a$  —

амплитуда волн, то возвышение поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия определяется в безразмерном виде формулой

$$i\eta = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (1.2)$$

Подставляя в (1.1) решение в виде  $\varphi = \exp[i(kx + ky)]$ , получаем дисперсионное соотношение

$$\kappa(k, k_y, q_{\alpha\beta}, D) = \gamma - \lambda\sqrt{\mu} \operatorname{th}(\lambda\sqrt{\mu}) R = 0 \quad (1.3)$$

$$R(k, k_y, q_{\alpha\beta}, D) = 1 + q_{xx}k^2 + 2q_{xy}kk_y + q_{yy}k_y^2 + D\lambda^4$$

$$[\lambda(k, k_y)]^2 = k^2 + k_y^2$$

Далее для сокращения записи некоторые или все аргументы функций  $\kappa$ ,  $R$ ,  $\lambda$ , стоящие в скобках, опускаются.

Корни уравнения  $\kappa(k) = 0$  определены на комплексной плоскости  $k$  и непрерывно зависят от параметров  $k_y$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $q_{\alpha\beta}$ ,  $D$ . При  $\gamma = 0$  уравнение (1.3) распадается на систему

$$\lambda = 0, \quad \operatorname{th}(\lambda\sqrt{\mu}) = 0, \quad R = 0$$

корни которой при  $q_{\alpha\beta} = 0$  определяются формулами

$$k^\pm = \pm ik_j; \quad k^j = i\Delta_j, \quad j \in N; \quad k^{-j} = (k^j)^*$$

$$n = n_0, \quad n^*, \quad m = -n_0^*, \quad m^*$$

$$\Delta_j^2 = (j\pi)^2/\mu + k_y^2, \quad n_0^2 = (1+i)(2\sqrt{D})^{-1/2} - k_y^2$$

Знак «звездочка» означает комплексное сопряжение. При изменении  $\gamma$  и  $q_{\alpha\beta}$  все корни смещаются в плоскости  $k$ , причем  $m \neq -n^*$  при  $q_{xy} \neq 0$ . При  $D \rightarrow 0$  корни  $m$ ,  $n$  стремятся к бесконечности.

При  $\gamma = \gamma(k^\circ) = \gamma^\circ$  ( $\gamma = \gamma(k)$  — функция, определяемая из (1.3) для действительных  $\gamma$  и  $k$ ) корни  $k^\pm = k^\circ$  сливаются и становятся действительными. В соответствии с оценкой  $|q_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta| \ll 1 + D\lambda^4$  [6] для действительных корней дисперсионного соотношения имеем

$$k^\circ = 2k_y^2 q_{xy} (5\gamma^\circ - 4k_y) + O(q_{xy}k_y^2) \quad (1.4)$$

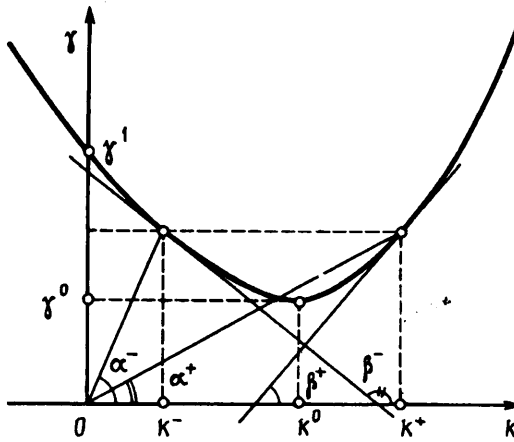
При  $\gamma > \gamma^\circ$  корни  $k^\pm$  действительны и различны, и  $k^+ = -k^-$  при  $q_{xy} = 0$ . Дисперсионная кривая  $\gamma = \gamma(k)$  представлена на фиг. 1. Корни  $k^\pm$  соответствуют действительным периодическим волнам, фазовые и групповые скорости которых в направлении оси  $x$  пропорциональны  $\operatorname{tg}(\alpha^\pm)$  и  $\operatorname{tg}(\beta^\pm)$  соответственно (фиг. 1). Групповые скорости волн  $k^\pm$  имеют различные знаки, поэтому эти волны переносят энергию в различных направлениях оси  $x$ . При  $\gamma = \gamma^\circ$  волна  $k^\circ$  переносит энергию только в направлении  $y$ . При  $\gamma \in (\gamma^\circ, \gamma^1)$  знаки групповых и фазовых скоростей волн  $k^\pm$  в направлении  $x$  различны. При  $q_{xy} = 0$  кривая  $\gamma = \gamma(k)$  симметрична относительно оси  $\gamma$ .

При  $\mu \ll 1$  (мелкая вода), корни  $k^j$  стремятся к бесконечности, при  $\mu \gg 1$  (глубокая вода) корни  $k^j$  в пределе заполняют мнимую ось  $k$  при  $|k| \geq k_y$ . При  $\gamma \ll 1$  находим асимптотику

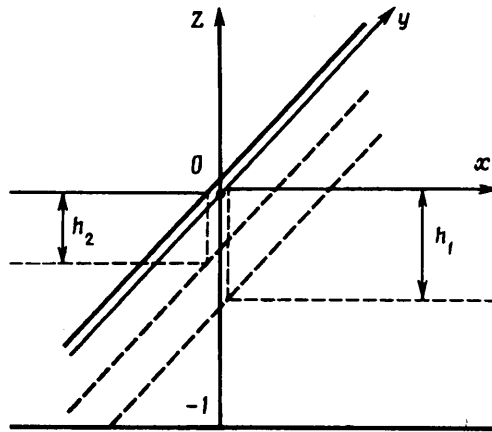
$$k^j = i\Delta_j (1 - \gamma [\mu\Delta_j^2 R(k = i\Delta_j, k_y)]^{-1}) + O(\gamma^2) \quad (1.5)$$

$$k^j = ij\pi\mu^{-1/2} (1 - \gamma\mu^2 [j\pi(\mu^2 + D(j\pi)^4)]^{-1}), \quad j \rightarrow \infty$$

2. Рассмотрим слой жидкости, находящийся под двумя полубесконечными пластинами толщиной  $h_1$  и  $h_2$ ,  $h_1 > h_2$  (фиг. 2). Место стыка пластин совпадает



Фиг. 1



Фиг. 2

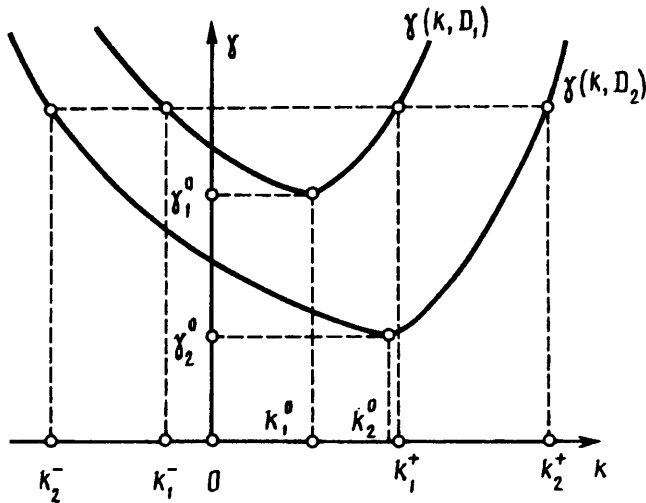
с прямой  $x = z = 0$ . При  $h_2 = 0$  поверхность жидкости при  $x < 0$  свободна ото льда.

Исследуются движения периодические во времени и вдоль оси  $y$ , и полагается, что зависимость всех функций входящих в задачу от  $t, y$  выражается множителем  $\exp [i(\gamma t + k, y)]$ , который далее опускается. Источник периодических возмущений находится либо на бесконечности, где возбуждаются плоские волны, несущие энергию к плоскости  $x = 0$ , либо на прямой  $x = z = 0$ , где на кромки пластин действуют сосредоточенные силы  $F_{1,2}$  и моменты  $M_{1,2}$  (индексы 1 и 2 присваиваются функциям и постоянным, соответствующим областям  $x > 0$  и  $x < 0$ ). Силы  $F_1 = -F_2 = F(q_{\alpha\beta})$  и моменты  $M_1 = M_2 = M(q_{\alpha\beta})$  могут возникать при периодическом сжатии льдин с неровными краями. Источник возмущений в математической формулировке задачи определяется заданием контактно-граничных условий при  $x = z = 0$  и асимптотики решения при  $|x| \rightarrow \infty$ . Контактные граничные условия имеют вид [7]:

$$M_1 = M_{xx}^+, M_2 = M_{xx}^-, F_1 = ikM_{xy}^+ - R_x^+ - q_{xx}\eta_x^+ - ikq_{xy}\eta^+ \quad (2.1)$$

$$F_2 = -ikM_{xy}^- + R_x^- + q_{xx}\eta_x^- + ikq_{xy}\eta^+$$

$$\left( \frac{\eta_{xx}^\pm}{\pi}, M_{xx}^\pm, M_{xy}^\pm, R_x^\pm \right) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left( \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n}, M_{xx}^{1,2}, M_{xy}^{1,2}, R_x^{1,2} \right)$$



Фиг. 3

$$M_{xx}^{1,2} = -D_{1,2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \nu \right) \eta, \quad M_{xy}^{1,2} = -ik(1 - \nu) D_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$R_x^{1,2} = -D_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) \eta$$

Рассмотрим контактно-граничные условия на кромках льдин при  $z = 0$ ,  $x = \pm 0$ . Полагается, что края льдин взаимодействуют при их относительных смещениях и поворотах. В простейшем случае можно предположить, что сила трения между краями льдин пропорциональна скорости их относительных смещений, и моменты, действующие на кромки льдин, пропорциональны углу между прямыми, лежащими в плоскости  $y = \text{const}$  и касательными к поверхности льдин при  $x = \pm 0$ . Отсюда следует

$$F_{1,2} = \pm i \gamma K_f (\eta^+ - \eta^-) \pm f_{1,2}, \quad M_{1,2} = K_m (\eta_x^+ - \eta_x^-) + m_{1,2} \quad (2.2)$$

Здесь  $f_{1,2}$  и  $m_{1,2}$  внешние сосредоточенные силы и моменты, действующие на кромки льдин. Знаки + и - соответствуют индексам 1 и 2 соответственно.

При  $K_f \rightarrow \infty$ ,  $K_m \rightarrow \infty$ ,  $f_1 = f_2$ ,  $m_1 = m_2$  из (2.1) следуют условия на стыке двух сходящихся льдин

$$\eta^+ = \eta^- = \eta(0), \quad \eta_x^+ = \eta_x^- = \eta_x(0), \quad D_1 \eta_{xx}^+ - D_2 \eta_{xx}^- = (D_1 - D_2) k^2 \nu \eta(0)$$

$$D_1 \eta_{xxx}^+ - D_2 \eta_{xxx}^- = (D_1 - D_2) k^2 \nu \eta_x(0) \quad (2.3)$$

При  $K_f = K_m = D_2 = F_{1,2} = M_{1,2} = q_{xx} = q_{xy} = 0$  из (2.1) вытекает условие на свободной кромке льдины

$$D \eta_{xx}^+ - D k^2 \nu \eta^+ = D \eta_{xxx}^+ - D k^2 \nu \eta_x^+ = 0 \quad (2.4)$$

Условия в месте контакта льдины, занимающей область  $x > 0$  с твердой стенкой при  $x = 0$  в предположении, что край льдины может смещаться относительно стенки, имеют вид (2.1), (2.2), где надо положить

$$\eta^- = \eta_x^- = 0 \quad (2.5)$$

и выбрать индекс 1 и знак +.

При  $K_f \rightarrow \infty$ ,  $K_m \rightarrow \infty$  из (2.1), (2.2), (2.5) следуют условия для примерзшей к стенке льдины

$$\eta_x^+ = \eta^+ = 0$$

Движение жидкости описывается системой (1.1), где надо положить  $R^* = R^*(q_{\alpha\beta}, D_1)$  при  $x > 0$  и  $R^* = R^*(q_{\alpha\beta}, D_2)$  при  $x < 0$ ; где  $D_{1,2} = D(h_{1,2})$ . Отсюда следует, что граничные условия имеют разрыв в точке  $x = 0$ . Взаимное расположение дисперсионных кривых  $\gamma = \gamma(k, D_{1,2})$  представлено на фиг. 3.

Далее принимаются обозначения

$$\kappa_{1,2}(k) = \kappa(k, k, q_{\alpha\beta}, D_{1,2}) + i\mu_{1,2}(k)$$

где  $\mu_{1,2}(k)$  — малая фиктивная поверхностная вязкость жидкости [5], которая смещает действительные корни уравнений  $\kappa_1(k) = 0$  и  $\kappa_2(k) = 0$  в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексного переменного  $k$  соответственно. Фиктивная вязкость вводится для правильного учета всех волн при факторизации в методе Винера — Хопфа [8] и полагается в конечном решении равной нулю.

3. Решение задачи представляется в виде интеграла Фурье

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x} \varphi_j(k) \frac{\operatorname{ch} [\lambda \sqrt{\mu} (z+1)]}{\operatorname{ch} [\lambda \sqrt{\mu}]} dk \quad (3.1)$$

Функция (3.1) тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа и условию непротекания на дне. Из граничных условий при  $z = 0$  следует система парных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x} \varphi_j(k) \kappa_j(k) dk = 0; \quad j = 1, \quad x > 0; \quad j = 2, \quad x < 0 \quad (3.2)$$

В [9] показано, что система (3.2) эквивалентна системе функциональных уравнений

$$\varphi_j \kappa_1 = \Phi^+, \quad \varphi_j \kappa_2 = \Phi^- \quad (3.3)$$

где  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  — функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного  $k$ .

Из условий сходимости интеграла (3.1) и (3.3) находим асимптотику при  $|k| \rightarrow \infty$

$$|\varphi_j| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad |\Phi^+| = O(|k|^{4-\delta}), \quad \operatorname{Im} k > 0 \quad (3.4)$$

$$|\Phi^-| = O(|k|^{4-\delta}), \quad \operatorname{Im} k < 0, \quad D_2 > 0$$

$$|\Phi^-| = O(|k|^{-\delta}), \quad \operatorname{Im} k < 0, \quad D_2 = 0$$

Из (2.3) следует задача сопряжения на действительной оси  $k$

$$\Phi^+ = \chi \Phi^-, \quad \chi = \kappa_1 / \kappa_2 \quad (3.5)$$

Задача (3.5) легко разрешима после факторизации функции  $\chi(k)$  [7]. Решение (3.5) не единственно и зависит от нескольких произвольных постоянных. Неединственность устраняется после удовлетворения контактно-граничных и асимптотических условий. Количество последних зависит от числа действительных волн при  $|x| \rightarrow \infty$ . В связи с этим удобно различать следующие случаи (см. фиг. 3): а)  $\gamma > \gamma_1^0$ , б)  $\gamma \in (\gamma_1^0, \gamma_2^0)$ , в)  $\gamma \in (0, \gamma_2^0)$  при  $D_2 > 0$  и а'), б'), в') при  $D_2 = 0$ .

Факторизация  $\chi$  выглядит следующим образом:

$$\chi = \chi^+ \chi^- \quad (3.6)$$

$$\chi^+ = \frac{(1 - k/k_1^-)^{-t} (1 - k/n_1^*) (1 - k/m_1^*) J^+(k)}{(1 - k/k_2^+)^s (1 - k/k_2^-) (1 - k/m_2^*)^r (1 - k/n_2^*)^f}$$

$$\chi^- = \frac{(1 - k/k_1^-)^t (1 - k/k_1^+) (1 - k/n_1) (1 - k/m_1) J^-(k)}{(1 - k/k_2^+)^{-s} (1 - k/n_2)^r (1 - k/m_2)^f}$$

$$J^{\pm} = \prod_{j=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{1 - k/k_j^{\mp j}}{1 - k/k_j^{\pm j}}; |J^{\pm}| = O(1), |k| \rightarrow \infty, \text{sign}(\text{Im } k) = \pm 1$$

$$r = 1, D_2 > 0; r = 0, D_2 = 0; t = 0, \gamma < \gamma_1^0; t = 1, \gamma \geq \gamma_1^0;$$

$$g = 0, \gamma < \gamma_2; g = 1, \gamma \geq \gamma_2$$

Формулы (3.6) неявно зависят от  $q_{\alpha\beta}$ , что сильно увеличивает время численных расчетов функций  $\chi^{\pm}$  для различных напряженных состояний ледяного покрова. Поэтому с учетом оценки, приведенной в [6], факторизация может быть проведена приближенно и с выделением явной зависимости от  $q_{\alpha\beta}$

$$\chi^{\pm} = \chi_0^{\pm} + (\delta\chi^{\pm})^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}, (\delta\chi^{\pm})^{\alpha\beta}(k) = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi i} \chi_0^{\pm}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{\alpha} t^{\beta} K(t) dt}{\chi_0(t)(t-k)} \quad (3.7)$$

$$\chi_0 = \chi_0^+ \chi_0^-, K(t) = \lambda(t) \text{th}(\lambda(t) \sqrt{\mu}) \frac{\kappa_2^0(t) - \kappa_1^0(t)}{(\kappa_2^0(t))^2}$$

Индекс ноль у функций  $\chi$  и  $\kappa_{1,2}$  означает, что при их вычислении по формулам (1.3), (3.5) надо положить  $q_{\alpha\beta} = 0$ . Интеграл в (3.7) вычисляется по вычетам в плоскости  $t$ .

Из (3.5), (3.6) по теореме Лиувилля получаем

$$\Phi^+/\chi^+ = \chi^-\Phi^- = P_{\zeta}(k) = \sum_{l=0}^{\zeta} d_l k^l, d_l = \text{const} \quad (3.8)$$

В случаях а)  $\zeta = 5$ , б)  $\zeta = 4$ , в)  $\zeta = 3$ , а')  $\zeta = 3$ , б')  $\zeta = 2$ , в')  $\zeta = 1$ . Коэффициенты полиномов  $P_{\zeta}(k)$  определяются из асимптотических и контактно-граничных условий.

Из (3.3), (3.7) следует

$$\varphi_f = P_{\zeta} \chi^+ / \kappa_1 = P_{\zeta} / (\chi^- \kappa_2) \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.1), (1.2) и затем вычисляя интеграл по вычетам, находим

$$\eta = P_{\zeta}(k_1^+) \Lambda^+(k_1^+) \exp(ik_1^+ x) + t P_{\zeta}(k_1^-) \Lambda^+(k_1^-) \exp(ik_1^- x) + \\ + P_{\zeta}(n_1) \Lambda^+(n_1) \exp(in_1 x) + P_{\zeta}(m_1) \Lambda^+(m_1) \exp(im_1 x) + I^+, x > 0 \quad (3.10)$$

$$\eta = g P_{\zeta}(k_2^+) \Lambda^-(k_2^+) \exp(ik_2^+ x) + P_{\zeta}(k_2^-) \Lambda^-(k_2^-) \exp(ik_2^- x) + \\ + r P_{\zeta}(n_2^*) \Lambda^-(n_2^*) \exp(in_2^* x) + r P_{\zeta}(m_2^*) \Lambda^-(m_2^*) \exp(im_2^* x) + I^-, x < 0$$

$$\Lambda^+(k) = -i \chi^+(k) \left( \frac{\partial \kappa_1}{\partial k} \right)^{-1} \lambda \sqrt{\mu} \text{th}(\lambda \sqrt{\mu}), \Lambda^-(k) = \\ = i \left( \chi^-(k) \frac{\partial \kappa_2}{\partial k} \right)^{-1} \lambda \sqrt{\mu} \text{th}(\lambda \sqrt{\mu})$$

$$I^+ = \sum_{j=1}^{\infty} P_{\zeta}(k_j^+) \Lambda^+(k_j^+) \exp(ik_j^+ x), I^- = \sum_{j=-1}^{-\infty} P_{\zeta}(k_j^-) \Lambda^-(k_j^-) \exp(ik_j^- x)$$

В приближении мелкой воды положим  $L^2 = gH/\omega^2$ , при этом  $\gamma = \mu$ . Из (1.5), (3.6), (3.10) следует

$$I^{\pm} = O(\mu^{1+\delta}), J^{\pm} = 1 + O(\mu^{1+\delta}), \delta > 0 \quad (3.11)$$

Таким образом, в приближении мелкой воды можно положить  $I^{\pm} = 0, J^{\pm} = 1$ , что значительно упрощает формулы (3.10).

В силу оценок (1.5) имеют место конечные пределы для  $\partial^n I^{\pm} / \partial x^n$  при  $x \rightarrow \pm 0, n=1, 2, 3, D > 0$ .

Амплитуды волн  $A_{1,2}$ , приносящих и уносящих энергию в бесконечность, определяются соответственно формулами

$$tP_{\zeta}(k_1^+) \Lambda^+(k^+) = tA_1, \quad gP_{\zeta}(k_2^-) \Lambda^-(k_2^-) = gA_2 \quad (3.12)$$

$$tR_1 = tP_{\zeta}(k_1^-) \Lambda^+(k_1^-), \quad gR_2 = gP_{\zeta}(k_2^+) \Lambda^-(k_2^+) \quad (3.13)$$

Из (3.12), (3.13) находятся коэффициенты отражения волн

$$T_1 = R_1/A_1, \quad T_2 = R_2/A_2 \quad (3.14)$$

Легко проверить, что количество контактно-граничных условий, приведенных в разд. 2, и асимптотических условий (3.12) в каждом из рассматриваемых случаев а) — в') в точности равно числу коэффициентов в полиномах  $P_{\zeta}$ .

Приведем формулы, полезные для вычисления предельных граничных значений функции  $\eta(x)$  и ее производных. Из (3.10) следует

$$\eta_{xxx\dots}^{\pm} = \sum_{l=0}^{\zeta} S_{nl}^{\pm} d_l \quad (3.15)$$

$$S_{nl}^+ = \zeta_{nl}^+(k_1^+) + t \zeta_{nl}^+(k_1^-) + \zeta_{nl}^+(n_1) + \zeta_{nl}^+(m_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{nl}^+(k_j^+)$$

$$S_{nl}^- = g \zeta_{nl}^-(k_2^+) + \zeta_{nl}^-(k_2^-) + r \zeta_{nl}^-(n_2^*) + r \zeta_{nl}^-(m_2^*) + \sum_{j=-1}^{\infty} \zeta_{nl}^-(k_j^-)$$

$$\zeta_{nl}^{\pm}(k) = (ik)^n k^l \Lambda^{\pm}(k)$$

В соответствии с оценками (1.5), (3.11) выполняется

$$\zeta_{nl}^{\pm}(k_{1,2}^{\pm}) = O(\mu^{l+\delta}), \quad \mu \ll 1, \quad \delta > 0$$

Поэтому в приближении мелкой воды бесконечные суммы в (3.15) можно не учитывать.

4. Рассмотрим решение (3.10) в случае а) и положим

$$\kappa_1 = \kappa(k, k_y, q_{xx}, q_{xy}, q_{yy}, D), \quad \kappa_2 = \kappa(k, k_y, q_{xx}, -q_{xy}, q_{yy}, D)$$

Тогда выполняется

$$k_1^+ = -k_2^- = k^+, \quad k_1^- = -k_2^+ = k^-, \quad n_1 = -m_2^*, \quad m_1 = -n_2^*, \quad k_j^+ = -k_j^-$$

$$\kappa_1(-k) = \kappa_2(k), \quad \chi^+(k) = (\chi^-(k))^{-1}, \quad \Lambda^+(k) = \Lambda^-(-k)$$

Если положить

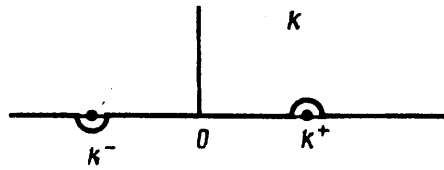
$$P_3(k) = d(k^4 + d_1 k^2 + d_0) \quad (4.1)$$

то решение (3.10) будет симметрично относительно плоскости  $x=0$  и для любых  $z \in (0,1)$  выполняется  $d\varphi/dx=0$  при  $x=0$ . Иными словами, полученное решение описывает отражение волны от твердой стенки при  $x=0$ . Коэффициент отражения определяется формулами (3.12) — (3.14), где надо положить  $A_1 = A_2 = A$ ,  $A$  — амплитуда падающей на стенку волны.

Решение задачи о периодических волнах в жидкости под ледяным покровом постоянной толщины  $h = h_1 = h_2$  с трещиной вдоль прямой  $x = a_j, z = 0$

$$\varphi = \Phi_j + \varphi_0 \quad (4.2)$$

$$\Phi_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} P_3^j(k) \frac{\operatorname{ch}[\lambda \sqrt{\mu}(z+1)]}{\kappa(k) \operatorname{ch}[\lambda \sqrt{\mu}]} e^{ik(x-a_j)} dk$$



Фиг. 4

$$\varphi_0 = C^+ \frac{\text{ch} [\lambda^+ \sqrt{\mu} (z+1)]}{\text{ch} [\lambda^+ \sqrt{\mu}]} e^{ik^+ x} + C^- \frac{\text{ch} [\lambda^- \sqrt{\mu} (z+1)]}{\text{ch} [\lambda^- \sqrt{\mu}]} e^{ik^- x}$$

$$C^\pm = \text{const}, \lambda^\pm = \lambda(k^\pm, k_j), \kappa(k^\pm) = 0, P_3^j(k) = d_3^j k^3 + d_2^j k^2 + d_1^j k + d_0^j$$

Здесь контур интегрирования обходит действительные корни  $k^\pm$  так, как показано на фиг. 4.

Если в ледяном покрове имеется  $N$  параллельных трещин в точках  $x = a_j$ , то решение имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=1}^N \Phi_j + \varphi_0 \quad (4.3)$$

Подставляя (4.2) в (1.2) и вычисляя интеграл по вычетам при  $a_j = 0$  (одна трещина при  $x = 0$ ), находим

$$i\eta = P_3(k^-) \Lambda(k^-) e^{ik^- x} + P_3(n) \Lambda(n) e^{inx} + P_3(m) \Lambda(m) e^{imx} + D^+ e^{ik^+ x} + D^- e^{ik^- x} + I^+, \quad x > 0 \quad (4.4)$$

$$-i\eta = P_3(k^+) e^{ik^+ x} + P_3(n^*) \Lambda(n^*) e^{in^* x} + P_3(m^*) \Lambda(m^*) e^{im^* x} - D^+ e^{ik^+ x} - D^- e^{ik^- x} + I^-, \quad x < 0$$

$$\Lambda(k) = \lambda \sqrt{\mu} \text{th}(\lambda \sqrt{\mu}) \left( \frac{\partial \kappa}{\partial k} \right)^{-1}, \quad D^\pm = C^\pm \lambda^\pm \text{th}(\lambda^\pm \sqrt{\mu}), \quad I^\pm = \sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} P_3(k^j) \Lambda(k^j)$$

Постоянные  $d_j^l$  находятся из контактно-граничных условий на берегах трещин. Постоянные  $C^\pm$  определяются из асимптотических условий при  $|x| \rightarrow \infty$

$$D^+ = -iA_1, \quad D^- = -iA_2 \quad (4.5)$$

Амплитуды  $R_{1,2}$  волн, уносящих энергию в бесконечность, определяются формулами

$$R_1 = -iP_3^N(k^-) \Lambda(k^-), \quad R_2 = iP_3^1(k^+) \Lambda(k^+) \quad (4.6)$$

Коэффициенты отражения находятся из (3.14).

Из (4.4) находим

$$\eta_{\frac{xx}{n}}^\pm = \sum_{l=0}^3 F_{nl}^\pm d_l - i(ik^+)^n D^+ - i(ik^-)^n D^- \quad (4.7)$$

$$F_{nl}^+ = \xi_{nl}^+(k^-) + \xi_{nl}^+(n) + \xi_{nl}^+(m) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{nl}^+(k^j)$$

$$F_{nl}^- = \xi_{nl}^-(k^+) + \xi_{nl}^-(n^*) + \xi_{nl}^-(m^*) + \sum_{j=-1}^{-\infty} \xi_{nl}^-(k^j)$$

$$\xi_{nl}^\pm = \mp i(ik)^n k^l \Lambda(k)$$



Аналогично (3.15) бесконечные суммы в (4.7) в приближении мелкой воды можно не учитывать.

5. Рассмотрим задачу о дифракции волны, приходящей со стороны чистой воды, на кромке ледяного покрова (случаи а'), б')). Полагая  $A_1 = 0$ ,  $q_{\text{эф}} = 0$  из (2.1), (2.2), (2.4), (3.10), (3.12) получаем

$$P_{\zeta}(k_2^-) \Lambda^-(k_2^-) = A_2, \quad tP_{\zeta}(k_1^+) = 0, \quad (5.1)$$

$$\sum_{l=0}^{\zeta} (S_{3l}^+ - k^2 v S_{ll}^+) d_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{\zeta} (S_{2l}^+ - k^2 v S_{0l}^+) d_l = 0$$

где  $\zeta = 3$  в случае а') и  $\zeta = 2$  в случае б')). Система (5.1) имеет определитель не равный нулю и поэтому  $d_l = 0$  при  $A_2 = 0$ . Из (3.10) следует, что при  $\gamma < \gamma_1^\circ$  волны не проходят в область  $|x| \gg 1$ . Условие  $\gamma = \gamma_1^\circ$  можно записать в виде

$$\cos(\alpha_2^-) (1 + D \gamma^4 \cos(\alpha_2^-)) = 1 \quad (5.2)$$

где  $\alpha_2^-$  угол падения на кромку льда волны  $k_2^-$ . Уравнение (5.2) всегда имеет решение  $\alpha_2^- = \alpha$  в интервале  $(0, \pi/2)$ , причем  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Если угол падения волны  $k_2^-$  частоты  $\gamma$  меньше  $\alpha$ , то волна не проходит под ледяной покров.

Рассмотрим задачу об отражении волны от твердой стенки. Предполагается, что ледяной покров примерз к стенке. Из (2.6), (3.10), (4.1), (4.7) находим

$$d_0 = (F_{04}^+ F_{12}^+ - F_{14}^+ F_{02}^+) / \Delta, \quad d_1 = (F_{14}^+ F_{00}^+ - F_{04}^+ F_{10}^+) / \Delta$$

$$d = A [(k^+)^4 + d_1 k^+ + d_0]^{-1}, \quad \Delta = F_{10}^+ F_{02}^+ - F_{00}^+ F_{12}^+$$

Сила  $F$  и момент  $M$ , действующие со стороны льда на твердую стенку, определяются из (2.1), (3.15), где надо положить  $K_f = K_m = 0$ . Из (3.13), (3.14) следует, что при  $q_{xy} = 0$  коэффициент отражения равен единице и угол падения равен углу отражения. При  $q_{xy} \neq 0$  отражается волна с длиной не равной длине падающей волны, их амплитуды не равны и угол падения не равен углу отражения.

Рассмотрим задачу о дифракции волны, приходящей из  $+\infty$ , на трещине в ледяном покрове. Полагая  $D^- = 0$  из (2.1), (4.7) находим систему уравнений для определения постоянных  $d_l$

$$f_1 - f_2 = \sum_{l=0}^3 [D (F_{3l}^+ - F_{3l}^-) - (Dk^2 v + q_{xx} (F_{ll}^+ - F_{ll}^-) - ikq_{xy} (F_{0l}^+ - F_{0l}^-))] d_l \quad (5.3)$$

$$m_1 - m_2 = D \sum_{l=0}^3 [-F_{2l}^+ + F_{2l}^- + k^2 v (F_{0l}^+ - F_{0l}^-)] d_l$$

$$f_1 + DD^+ (k^+)^3 + (Dv k^2 + q_{xx}) k^+ D^+ + kq_{xy} D^+ = \quad (5.4)$$

$$= \sum_{l=0}^3 [DF_{3l}^+ - (Dv k^2 + q_{xx}) F_{ll}^+ - ikq_{xy} F_{0l}^+ - i\gamma K_f (F_{0l}^+ - F_{0l}^-)] d_l$$

$$m_1 + i(k^+)^2 D^+ + iDD^+ k^2 v = \sum_{l=0}^3 [-DF_{2l}^+ + Dk^2 v F_{0l}^+ - K_m (F_{ll}^+ - F_{ll}^-)] d_l$$

Угол  $\theta$  между волновыми векторами  $k^+$  и  $k^-$  падающей и отраженной волн при  $\gamma > \gamma^\circ$  находится из уравнений

$$\theta = \alpha^+ + \alpha^-, \quad \text{tg}(\alpha^\pm) = k^\pm / k,$$

где  $\alpha^+$  и  $\alpha^-$  углы падения и отражения. Очевидно, что при  $q_{xy} = 0$  выполняется  $k^+ = -k^-$  и  $\alpha^+ = \alpha^-$ , т. е. угол падения равен углу отражения. При фиксированных  $\gamma$ ,  $k_y$  углы  $\alpha^\pm$  являются функцией  $q_{xy}$ , неявно определяемой дисперсионным

соотношением (1.3). Например, при  $\gamma = \gamma^1(k_y)$  выполняется  $\alpha^- = 0$  (см. фиг. 1), и фаза отраженной волны распространяется вдоль трещины.

Если определитель системы (5.3), (5.4) не равен нулю, то  $d_l = 0$  при  $D^+ = M_{1,2} = F_{1,2} = 0$ . Полагая  $D^+ = 0$  и  $R_{1,2} = 0$  и определяя  $d_l$  из (4.6), (5.4) приходим к решению экспоненциально затухающему при  $|x| \rightarrow \infty$ . Формулы (5.3) определяют в этом случае сосредоточенные силы и моменты на берегах трещины, при которых волны переносят энергию вдоль трещины, и при  $|x| \rightarrow \infty$  затухают.

Если при некоторых значениях  $q_{xx}^*$ ,  $q_{xy}^*$  определитель системы (5.3), (5.4) обращается в нуль, то кроме решения тождественно равного нулю существует ненулевое решение (5.3), (5.4) при  $f_{1,2} = 0$ ,  $m_{1,2} = 0$  и конечных  $K_+$ ,  $K_-$ . Напряжения  $q_{xx}^*$ ,  $q_{xy}^*$  определяют предел устойчивости двух полубесконечных льдин при сжатии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037—1043.
2. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 240—250.
3. Слепян Л. И., Фадеев В. М. Отражение, преломление и излучение волн в кусочно-однородной упругой системе, взаимодействующей с жидкостью // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 325—329.
4. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В. Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 924—930.
5. Марченко А. В., Прохоров И. В. О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 242—249.
6. Марченко А. В., Штрипа В. И. К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 125—133.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988, 712 с.
8. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
9. Петрашень Г. И., Молотков Л. А., Крауклис П. В. Волны в слоисто-однородных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Т. 1. Л.: Наука, 1982. 289 с.

Москва

Поступила в редакцию  
21.IV.1992