

УДК 532.527:536.22

© 1993 г. А. Л. МАКАРОВ

ТЕМПЕРАТУРНО-НЕОДНОРОДНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

Получение решений для конвективных структур сопряжено со значительными трудностями, связанными с нелинейностью описывающих такие структуры уравнений. Одним из способов является разложение искомого решения в ряд по функциям, что может значительно упростить исходные уравнения при удачном выборе полной системы функций. В качестве основы для получения такого набора функций можно выбрать двупараметрическое вихревое течение, описываемое уравнением Громеки — Бельтрами [1—2]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \Phi(\psi) \Phi'(\psi) + r^2 F'(\psi) = 0$$

При изучении аналогичных течений в магнитной гидродинамике, где через ψ выражаются компоненты магнитного поля, это уравнение носит название Грэда — Шафранова [3—5]. Это уравнение исследуется в частных случаях в книгах [6—7].

В данной работе исследуются некоторые особенности класса точных решений уравнения Громеки — Бельтрами, полученных в работе [8]. Показано, что существует предельный минимальный размер вихря, зависящий от его энергии, что связано с неотрицательностью давления в области решения. Получено также выражение для размера вихря от отношения интегралов движения энергии к спиральности.

На основе полной ортонормированной системы функций, являющихся точными решениями уравнений Громеки — Бельтрами, с помощью метода Галеркина строится решение для вихревых структур с учетом влияния температуры. В качестве исходных берутся уравнения стационарной конвекции в приближении Буссинеска. В результате разложения искомого решения в ряд по решениям указанного класса получена относительно простая система уравнений, решение которой получено как численно, так и аналитически с помощью метода теории возмущений в некотором приближении. Нетривиальной особенностью полученного решения является смещение центра теплого вихря вниз, а холодного — вверх относительно центра вихря без учета влияния температуры.

1. Пусть невязкая несжимаемая жидкость заключена между двумя бесконечными плоскостями, расстояние между которыми L . Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) так, чтобы ограничивающие плоскости совпали с плоскостями $z = 0$ и $z = L$. Предположим, что существует стационарное решение задачи конвекции для выбранной системы в виде единичного осесимметричного вихря (U, V, W) , ось которого совпадает с $r = 0$. Уравнения стационарной конвекции в приближении Буссинеска при этом имеют вид

$$(\nabla \nabla) \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla P - g \beta T \quad (1.1)$$

$$\nabla \nabla T = 0, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

где $\mathbf{V} = (U, V, W)$, P — давление за вычетом гидростатической составляющей, причем $P = P_0$ при $r = \infty$, а T — отклонение температуры от некоторого постоянного

значения T_0 . В уравнениях (1.1) существенно условие осесимметричности $\partial/\partial\varphi = 0$. Запишем граничные условия для поставленной задачи

$$r = 0, \infty: U = 0, V = 0$$

$$r = \infty: W = 0, P = P_0$$

$$z = 0, L: W = 0, T = 0 \quad (1.2)$$

Приведем систему уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) к безразмерному виду. Для этого введем масштаб скорости $Q = (P_0/\rho)^{1/2}$. Безразмерные независимые и зависимые переменные представим в виде

$$r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \varphi' = \varphi, \quad T' = \frac{T}{T_0} \quad (1.3)$$

$$U' = \frac{U}{Q}, \quad V' = \frac{V}{Q}, \quad W' = \frac{W}{Q}, \quad P' = \frac{P}{P_0}$$

Поскольку будут использоваться только безразмерные величины, то штрихи далее опускаются.

Перепишем систему уравнений (1.1) в безразмерном виде

$$U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r}, \quad U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} = 0$$

$$U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \beta g T \quad (1.4)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rU)}{\partial r} = 0$$

Граничные условия останутся в том же виде, кроме $P(\infty) = 1$.

Вводя функцию тока ψ , из (1.4) получим

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$rV = \Phi(\psi), \quad T = \theta(\psi) \quad (1.6)$$

где $\Phi(\psi)$, $\theta(\psi)$ — произвольные функции ψ . Далее из (1.4) с учетом (1.5) и (1.6) можно получить [8]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \Phi(\psi) \Phi'(\psi) + r^2 F'(\psi) - \beta g z r^2 \theta'(\psi) = 0 \quad (1.7)$$

где $F(\psi)$ — произвольная функция ψ .

Перепишем граничные условия (1.2) с учетом (1.3) и (1.5) для уравнения (1.7)

$$r = 0: \quad r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad r^{-1} \Phi(\psi) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$r = \infty: \quad r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r^{-1} \Phi(\psi) = 0, \quad P = 1 \quad (1.8)$$

$$z = 0, 1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \theta(\psi) = 0$$

Последнее условие (1.8) при $r = 0$ получается из очевидного неравенства $W = r^{-1} \partial \psi / \partial r \neq \infty$. Чтобы получить линейное по ψ уравнение, в (1.7) представим $\Phi(\psi)$ и $F(\psi)$ в виде

$$\Phi(\psi) = \alpha\psi, \quad F(\psi) = F_0 + \frac{\gamma\psi^2}{2}, \quad \theta(\psi) = \frac{\delta\psi^2}{2g} \quad (1.9)$$

где α, γ, δ — пока свободные константы, определяемые в дальнейшем условиями существования решения. Подставив (1.9) в (1.7), получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \alpha^2\psi + r^2\gamma\psi - \delta z r^2\psi = 0 \quad (1.10)$$

Решаем уравнение (1.10) методом Галеркина, разлагая (1.10) в ряд по собственным функциям уравнения Громеки — Бельтрами, которое получается из (1.7) в предположении $g = 0$ либо $\beta = 0$. Кроме того, учитываем разложения (1.9).

2. Проведем анализ уравнения Громеки — Бельтрами. Можно показать [2], что

$$-F(\psi) = P + E \quad (2.1)$$

Здесь $E = |V|^2/2$ — кинетическая энергия единицы массы жидкости. Следует особо отметить, что давление

$$P(r, z) \geq 0 \quad (2.2)$$

при всех значениях r и z .

Перепишем уравнение Громеки — Бельтрами с учетом (1.9)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \alpha^2\psi + r^2\gamma\psi = 0 \quad (2.3)$$

При $\gamma \geq 0$ решение (2.3) не удовлетворяет граничным условиям [8]. Пусть в разложении (1.9) $\gamma < 0$. В уравнении (1.10) проведем замену переменной, после чего (1.10) переписывается в удобном для решения виде

$$\rho = \rho_0 r^2, \quad \rho_0 = \frac{\sqrt{|\gamma|}}{2} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 4\rho_0\rho \frac{\partial^2\psi}{\partial \rho^2} + \alpha^2\psi - 4\rho_0\rho\psi = 0 \quad (2.5)$$

Ищем решение методом разделения переменных

$$\psi(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(\rho) Y_k(z)$$

Уравнение (2.5) разбивается на систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 Y_k}{dz^2} + \lambda_k Y_k = 0, \quad \frac{d^2 X_k}{d\rho^2} - \left(1 + \frac{2\eta_k}{\rho}\right) X_k = 0 \quad (2.6)$$

где λ_k — константа разделения, а

$$\eta_k = \frac{\lambda_k - \alpha^2}{8\rho_0} \quad (2.7)$$

Граничные условия (1.8) перепишем с учетом (1.9) и (2.4)

$$\rho = 0: X_k(\rho) \rho^{-1/2} = 0, \quad \rho = \infty: X_k(\rho) = 0, \quad P = 1 \\ z = 0; 1: Y_k(z) = 0 \quad (2.8)$$

Первое уравнение (2.6) для граничных условий (2.8) имеет решение вида

$$Y_k(z) = \sin(k\pi z), \quad \lambda_k = k^2\pi^2 \quad (2.9)$$

Второе уравнение (2.6) имеет следующее решение, удовлетворяющее граничным условиям только при $\eta_k = -n$, $n = n(k, \alpha^2, \rho_0)$ — целые:

$$X_n(\rho) = 2\rho \exp(-\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

где $L_n^{(1)}(2\rho)$ — обобщенные многочлены Лагерра [9].

Параметры α^2 и ρ_0 до этого момента были свободными, однако важно подчеркнуть, что это — константы, что имеет существенное значение при построении решения в виде суперпозиции частных решений. Поскольку из (2.7) с учетом (2.9)

$$\eta_k = \frac{k^2 \pi^2 - \alpha^2}{8\rho_0} = -n$$

то можно провести замену параметра α^2 (с условием существования решения (2.10))

$$\alpha^2 = k^2 \pi^2 + 8\rho_0 n = \text{const} \quad (2.11)$$

Частное решение и общее как суперпозиция частных в итоге имеют вид

$$\Psi_{n,k} = C2\rho \exp(-\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho) \sin(k\pi z) \quad (2.12)$$

$$\Psi = \sum_{n,k} C_{n,k} 2\rho \exp(-\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho) \sin(k\pi z) \quad (2.13)$$

при существенном условии суммирования (2.11). Ясно, что условие (2.11) не накладывает никаких ограничений на n и k , если сумма в (2.13) состоит из одного составляющего (2.12), а лишь однозначно определяет значение α^2 . Требование существования решения (2.13) в виде суперпозиции (2.12) с условием (2.11), во-первых, напрямую связывает значения n и k , а во-вторых, накладывает жесткое условие на значения ρ_0 и α (например, $8\rho_0 = \pi^2$, $\alpha^2 = \pi^2 N$). Далее ограничимся исследованием решения (2.12), помня, что существует точное решение (2.13) с условием (2.11).

Приведем развернутый вид решения (2.12) для физических переменных U , V , W , согласно (1.5), (1.6), (1.9), (2.4). (2.11) и (2.12)

$$U = 2Ck\pi (\rho_0\rho)^{1/2} \exp(-\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho) \cos(k\pi z)$$

$$V = \pm 2C (k^2\pi^2 + 8\rho_0 n)^{1/2} (\rho_0\rho)^{1/2} \exp(-\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho) \sin(k\pi z) \quad (2.14)$$

$$W = -4C\rho_0 \exp(-\rho) ((\rho - n) L_{n-1}^{(1)}(2\rho) + L_n^{(1)}(2\rho)) \sin(k\pi z)$$

Из (2.1), (1.9) и (2.14) с учетом граничного условия (1.8) по давлению

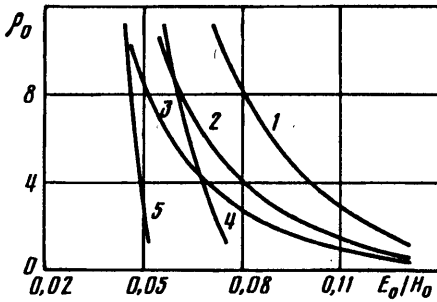
$$P = 1 - 2C^2\rho_0 \exp(-2\rho) \{k^2\pi^2\rho [L_{n-1}^{(1)}(2\rho)]^2 + 4\rho_0 \sin^2(k\pi z) [n^2 (L_n^{(1)}(2\rho) - L_{n-1}^{(1)}(2\rho))^2 + 2\rho n L_n^{(1)}(2\rho) L_{n-1}^{(1)}(2\rho)]\} \quad (2.15)$$

Поскольку $P \geq 0$ во всем объеме, то необходимо исследовать решение на соответствие этому условию. Можно показать (при $g=0$), что P принимает минимальное значение при $\sin^2(k\pi z) = 1$, что соответствует середине слоя при $k=1$. Удалось также выяснить, что при $\rho_0 \geq \pi^2/(8n)$ минимальное давление будет при $\rho=0$

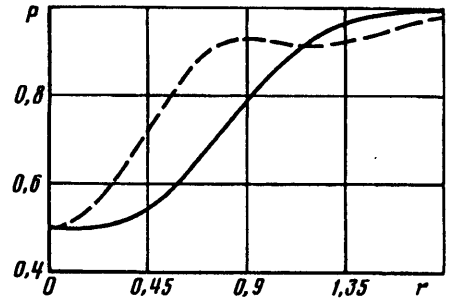
$$P_{\min} = 1 - 8C^2\rho_0^2 n^2$$

при этом из (2.2) получим ограничение для амплитуды

$$C^2 \leq C_{\max}^2 = (8\rho_0^2 n^2)^{-1} \quad (2.16)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Вычислим также интегралы движения: энергию $E_0 = 0,5 \int_V |\mathbf{v}|^2 dX$ и спиральность

$$H_0 = \int_V \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} dX$$

$$E_0 = \frac{1}{2} C^2 \pi n (k^2 \pi^2 + 6 \rho_0 n) \quad (2.17)$$

$$H_0 = \pm C^2 \pi n (k^2 \pi^2 + 8 \rho_0 n)^{1/2} (k^2 \pi^2 + 4 \rho_0 n) \quad (2.18)$$

Учитывая (2.16), получим ограничение для кинетической энергии вихря при конечном параметре ρ_0

$$E_0 \leq \frac{\pi (k^2 \pi^2 + 6 \rho_0 n)}{16 \rho_0^2 n} \quad (2.19)$$

Из (2.4) и (2.14) следует, что характерный размер вихря $l \sim \rho_0^{-1/2}$, и поскольку из (2.19) получается, что $\rho_0 \leq \rho_0^*(E_0)$, то $l(E_0) \geq l_{\min}(E_0)$. Из интегралов движения (2.17) и (2.18) можно получить величину E_0/H_0 , которая также будет интегралом движения

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{1}{2} (k^2 \pi^2 + 6 \rho_0 n) (k^2 \pi^2 + 8 \rho_0 n)^{-1/2} (k^2 \pi^2 + 4 \rho_0 n)^{-1} \quad (2.20)$$

На фиг. 1 приведена зависимость $\rho_0 = \rho_0(E_0/H_0)$ при $(n, k) = (1,1), (2,1), (3,1), (1,2)$ и $(1,3)$, которая представлена линиями 1—5 соответственно. Видно, что каждому значению E_0/H_0 соответствует только одно значение ρ_0 .

Из всего сказанного следует, что интегралы движения E_0 и H_0 однозначно определяют значения параметров ρ_0 и C^2 , т. е. размер и интенсивность конкретной вихревой структуры, определяемой n и k .

На фиг. 2 решение (2.15) представлено при $\rho_0 = \pi^2/8$, $C^2 = 0,5 C_{\max}^2$ и при $n=1$ (сплошная линия) и 2 (штриховая линия). Решение (2.12), (2.14) является частным случаем решения уравнения (1.10) при $\delta=0$ и проиллюстрировано на фиг. 3, б, 4, б и 5, б при различных n и k .

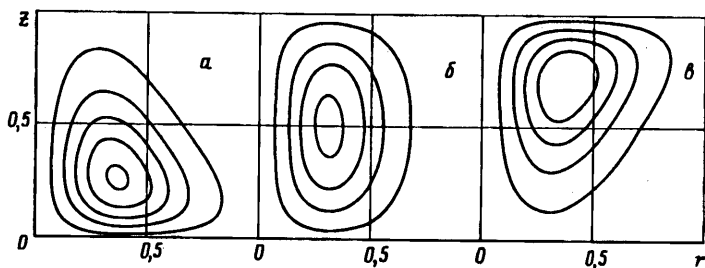
3. Воспользуемся результатами, полученными в разд. 2, для решения исходной задачи, сформулированной и упрощенной в части разд. 1. Разложим решение уравнения (1.10) в ряд по решениям (2.10)

$$\psi(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(z) \psi_k(\rho) \quad (3.1)$$

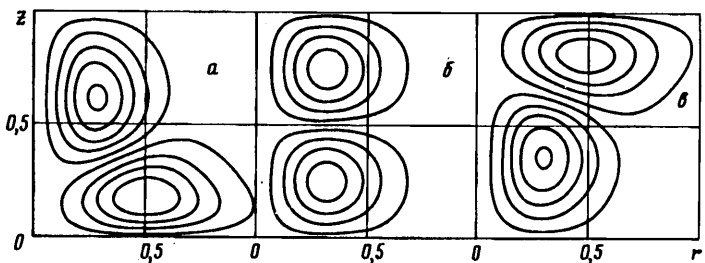
$$\psi_k(\rho) = 2 \rho \exp(-\rho) L_{k-1}^{(1)}(2\rho)$$

Подставим (3.1) в (1.10), умножим на ψ_n и проинтегрируем по ρ от 0 до ∞ . Вычислив соответствующие интегралы, получим

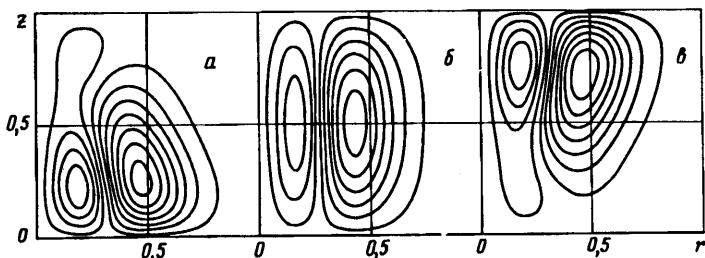
$$\frac{d^2 A_k}{dz^2} + (\alpha^2 - 8k \rho_0) A_k - \frac{\delta z}{\rho_0} \left(k A_k - \frac{k-1}{2} A_{k-1} - \frac{K+1}{2} A_{k+1} \right) = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Следует отметить, что уравнения конвекции существенно упростились благодаря разложению решения именно по ортогональным многочленам Лагерра. Чтобы получить численное решение, проведем разложение в ряд Фурье

$$A_k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{k,j} \sin(j\pi z) \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2), умножив на $\sin(n\pi z)$ и проинтегрировав по z от 0 до 1, получим

$$(\alpha^2 - n^2\pi^2 - 8k\rho_0) B_{k,n} - \frac{\delta}{\rho_0} \sum_1^{\infty} (2kB_{k,j} - (k-1)B_{k-1,j} - (k+1)B_{k+1,j}) C_{j,n} = 0 \quad (3.4)$$

$$C_{n,n} = 1/4$$

$$C_{j,n} = \begin{cases} 0, & |j-n| = 2m \\ -\frac{4nj}{(n^2-j^2)^2}, & |j-n| = 2m+1 \end{cases}$$

Решая (3.4) численно, получим общее решение в виде

$$\psi(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\rho \exp(-\rho) L_{k-1}^{(1)}(2\rho) \sum_{j=1}^{\infty} B_{k,j} \sin(j\pi z) \quad (3.5)$$

причем решение является быстросходящимся.

На фиг. 3, 4, 5 представлены линии $\psi = \text{const}$ для решения (3.5) при $\delta = 100, 0, -75$ ($a - \vartheta$) и $n = 1, k = 1, \rho_0 = 10$ (фиг. 3), $n = 1, k = 2, \rho_0 = 10$ (фиг. 4), $n = 2, k = 1, \rho_0 = 14$ (фиг. 5), при этом α получается из условия существования решения как собственное число.

Уравнение (3.2) можно исследовать с помощью теории возмущений

$$A_k = A_k^0 + \delta A_k^1 + \delta^2 A_k^2 + \dots, \quad A_k' |_{z=0} = A_k' |_{z=1} = 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \delta \alpha_1 + \delta^2 \alpha_2 + \dots$$

Для простейшей структуры, согласно (2.11), имеем

$$k = 1, \quad n = 1, \quad \alpha_0^2 = \pi^2 + 8 \rho_0 \quad (3.7)$$

Решая (3.2) и (3.6) при условии (3.7) для нулевого и первого приближения, получим в зависимости от ρ_0 три различных вида решения для A_2^1

$$A_1^0 = C_0 \sin(\pi z), \quad A_1^1 = \frac{C_0}{4\pi\rho_0} \left[\frac{z}{\pi} \sin(\pi z) - (z^2 - z) \cos(\pi z) \right] \quad (3.8)$$

$$A_2^1 = \frac{C_0 z}{16 \rho_0^2} \sin(\pi z) + \frac{C_0 \pi}{64 \rho_0^3} \left[\cos(\pi z) + \frac{e^{\lambda z}}{e^\lambda - 1} - \frac{e^{\lambda - \lambda z}}{e^\lambda - 1} \right] \quad (3.9)$$

$$\rho_0 > \frac{\pi^2}{8}, \quad \lambda^2 = 8 \rho_0 - \pi^2$$

$$A_2^1 = \frac{C_0 z}{2\pi^2 \rho_0} \sin(\pi z) + \frac{C_0}{\pi^3 \rho_0} [\cos(\pi z) + 2z - 1], \quad \rho_0 = \frac{\pi^2}{8} \quad (3.10)$$

$$A_2^1 = \frac{C_0 z}{16 \rho_0^2} \sin(\pi z) + \frac{C_0 \pi}{64 \rho_0^3} \left[\cos(\pi z) + \frac{\cos \lambda + 1}{\sin \lambda} \sin(\lambda z) - \cos(\lambda z) \right] \quad (3.11)$$

$$\rho_0 < \frac{\pi^2}{8}, \quad \lambda^2 = \pi^2 - 8 \rho_0$$

Считая, что при малых δ центр вихря смещается от положения нулевого приближения незначительно, представим его координаты как $z_* = 1/2 + \delta z', \rho_* = 1 + \delta \rho'$. Здесь под центром вихря понимаются координаты z_* и ρ_* , в которых $\partial\psi/\partial z = \partial\psi/\partial \rho = 0$. Исследуя решение (3.1) при (3.8) для всех трех случаев (3.9)—(3.11), получим

$$z_* = 0,5 - \delta \frac{\pi^2 - 4}{16 \pi^4 \rho_0}, \quad \rho_* = 1 - \delta \frac{1}{16 \rho_0} \quad (3.12)$$

Поскольку, согласно (1.9), $T = T_0 + \delta\psi^2/(2g)$, то при $\delta > 0$ вихрь теплее невозмущенной жидкости, а при $\delta < 0$ — холоднее. Результат (3.12) означает, что центр теплого вихря смещается вниз (фиг. 3, а), а холодного — вверх (фиг. 3, в) относительно безтемпературного вихря ($\delta = 0$, фиг. 3, б). Кроме того, размер холодного вихря больше размера теплого вихря, если под размером вихря понимать ρ_* . Аналогичные результаты получаются при других n и k (фиг. 4, 5).

В заключение можно сделать вывод, что использование метода Галеркина в сочетании с точными решениями уравнения Громеки — Бельтрами (2.12) дает хорошие результаты в исследовании конвективных структур. При этом итоговые уравнения достаточно просты для численного счета и даже позволяют получить аналитическое решение. Можно также надеяться на применимость изложенного метода для исследования конвективных структур в несколько иной постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громека И. С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1881 (Опубл. также в книге: *Громека И. С.* Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952.)
2. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
3. *Шафранов В. Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М.: Атомиздат, 1963. С. 92—131.
4. *Грэд, Рубин.* Магнитогидродинамическое равновесие и бессилловые поля // Тр. 2-й Междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958. Т. 1. М.: Атомиздат, 1959. С. 131—145.
5. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А., Чудин Н. В.* Уединенные тороидальные вихри // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. Вып. 6. С. 1823—1839.
6. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
7. *Милн-Томпсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
8. *Гледзер Е. Б., Макаров А. Л.* Об одном классе стационарных осесимметричных течений несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 28—34.
9. Справочник по специальным функциям // Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979, 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.XI.1991