

УДК 532.516:537.84

© 1993 г. А. А. ПЕТРУНИН, В. Н. ШТЕРН

БИФУРКАЦИЯ ПОЛОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ В ТЕЧЕНИИ, ВЫЗВАННОМ РАДИАЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

В автомодельном классе МГД-задач с полями скорости и индукции, обратно пропорциональными расстоянию от начала координат, обнаружено явление осесимметричного МГД-динамо и связанного с ним спонтанного возникновения вращения.

Течение проводящей жидкости, вызываемое электрическим током, растекающимся от точечного электрода, расположенного на поверхности, имеет вид струи, распространяющейся от электрода вдоль оси симметрии [1]. Это течение относится к классу конически-симметричных струй вязкой жидкости, которые описываются точными автомодельными решениями и обнаруживают ряд парадоксальных свойств [2]. Главным среди них можно назвать кумуляцию импульса и завихренности вблизи оси симметрии. Впервые это было показано в [3] для задачи о взаимодействии вихря с плоскостью, регулярные решения которой существуют лишь для малых чисел Рейнольдса и не существуют для больших из-за появления бесконечно сильной струи.

Задачи данного автомодельного класса в магнитной гидродинамике рассматривались в [4—7] и обобщены в монографии [8]. В [7] обнаружен эффект, аналогичный найденному в [3]. При конечной величине электрического тока решение перестает существовать. В докритической ситуации скорость приосевой струи начинает резко возрастать и при критическом значении тока обращается в бесконечность. Учет влияния индуцированных токов приводит лишь к возрастанию критической величины тока, но не разрешает парадокса [9]. При попытках численного расчета течения в ограниченной области при точечном подводе тока и между электродами конечных размеров возникали трудности из-за резкого возрастания осевой скорости с ростом тока [10, 11].

В настоящей работе показано, что при достаточно большой проводимости возникновению сингулярности предшествует бифуркация нового решения с ненулевой полоидальной компонентой магнитного поля. Тем самым парадокс снимается и задача становится разрешимой для сколько угодно большой величины тока. Обнаруженное явление самовозбуждения поля аналогично гидромагнитному динамо, описанному в [12]. Другой способ разрешения парадокса (при малой проводимости) связан с учетом возможной турбулизации приосевой струи в околоскритической ситуации [13].

1. Постановка задачи. Рассматривается однородная вязкая несжимаемая проводящая жидкость, занимающая полупространство $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ в сферической системе координат (r, θ, φ) и ограниченная при $\theta = 90^\circ$ твердой поверхностью. Электрический ток I , радиально расходящийся (штриховые линии) из точечного электрода, расположенного на твердой поверхности в начале координат O , индуцирует меридиональное течение, сходящееся вблизи плоскости к электроду и образующее струю вдоль оси симметрии (фиг. 1).

Решение для поля скорости и индукции разыскивается в автомодельном классе, имеющем представление [8]

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{v}{r} y'(x), & v_\theta &= -\frac{v}{r} \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}}, & v_\varphi &= \frac{v}{r} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ B_r &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Phi'(x), & B_\theta &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{\Phi(x)}{\sqrt{1-x^2}}, & B_\varphi &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{L(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

АНДРЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ КУЛИКОВСКИЙ

(к 60-летию со дня рождения)

18 марта 1993 г. исполнилось 60 лет одному из крупнейших русских ученых-механиков, члену-корреспонденту Российской академии наук Андрею Геннадьевичу Куликовскому.

А. Г. Куликовскому принадлежат яркие результаты в теории устойчивости (формулировка критериев устойчивости для течений, характерный геометрический размер которых достаточно велик; анализ устойчивости течений, содержащих точку перехода через звуковую скорость, и др.); магнитной гидродинамике (построение картины обтекания намагниченных тел хорошо проводящим потоком, когда вблизи тела образуется «каверна», занятая магнитным полем; теория медленных магнитогидродинамических течений в каналах при сильных поперечных магнитных полях и др.); общей теории поверхностей разрыва (полное разрешение вопроса о дополнительных к законам сохранения граничных условиях на разрывах; исследование магнитогидродинамических разрывов, на поверхности которых электропроводность среды изменяется от нуля до большой величины, и др.); теории нелинейных волн в произвольной упругой среде и т. д.

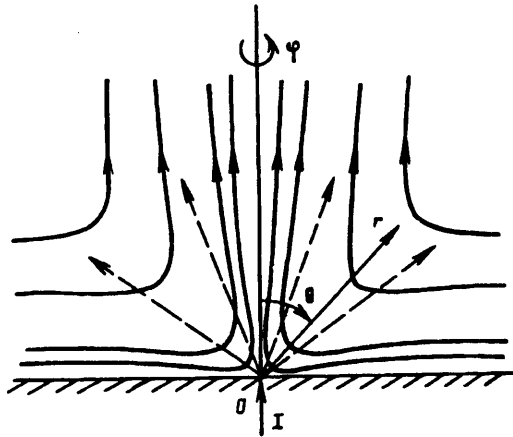
Работы А. Г. Куликовского отличаются четкостью постановки задач, оригинальность решений, глубокая физическая трактовка полученных результатов.

Всех, знающих Андрея Геннадьевича, покоряют его скромность, отзывчивость, безоглядное стремление помочь, принципиальность в научных дискуссиях, желание понять позицию оппонента и четко формулировать свои аргументы.

Мы, члены Редколлегии журнала «Известия Академии наук. Механика жидкости и газа», высоко ценим роль А. Г. Куликовского в поддержании высокого научного уровня журнала и надеемся на долгое сотрудничество в будущем.

От всей души поздравляем Андрея Геннадьевича с юбилеем, желаем ему долгих лет здоровья, счастья и плодотворного служения Науке.

Редколлегия



Фиг. 1

где $x = \cos(\theta)$, ν — кинематическая вязкость, μ_0 — магнитная проницаемость.

Подстановка (1.1) в уравнения магнитной гидродинамики и несложные преобразования приводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1 - x^2) y' + 2xy - \frac{1}{2} y^2 = F(x) - \frac{1}{2} S \Phi^2 \quad (1.2)$$

$$(1 - x^2) \Phi'' = \text{Bt} (y \Phi' - y' \Phi) \quad (1.3)$$

$$(1 - x^2) L'' = \text{Bt} \left\{ yL' - \Phi\Gamma' + 2(y'L - \Phi'\Gamma) + \frac{2x}{1 - x^2} (yL - \Phi\Gamma) \right\} \quad (1.4)$$

$$(1 - x^2) \Gamma'' = y\Gamma' - S\Phi L', \quad (1 - x^2) F''' = 2\Gamma\Gamma' - 2SLL' \quad (1.5)$$

$$S = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho \nu^2}, \quad \text{Bt} = \frac{\nu}{\nu_m}$$

Функция $F(x)$ вводится в процессе преобразований. Безразмерный критерий Bt (число Бэтчелора) характеризует физические свойства среды и является отношением кинематической вязкости ν к магнитной ν_m ; S — параметр электро-вихревого течения.

На плоскости $x = 0$ ставятся условия непротекания и прилипания, а для азимутального поля L выполняется нормировочное условие

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad \Gamma(0) = 0, \quad L(0) = 1 \quad (1.6)$$

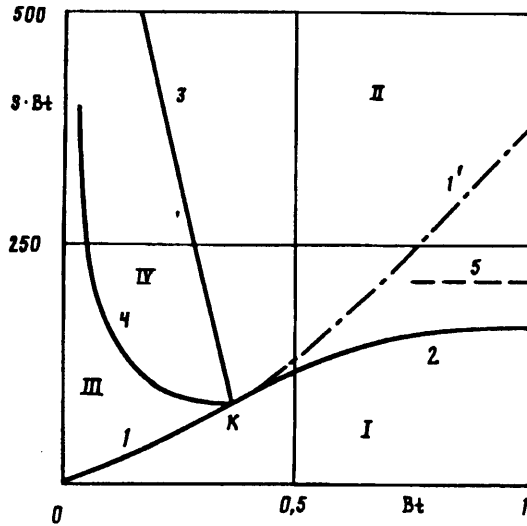
Среда в нижней полуплоскости считается непроводящей. Тогда из (1.3) следует $\Phi''(x) = 0$ при $x \leq 0$ и с учетом регулярности $\Phi'(0) = \Phi(0)$. Из регулярности скорости и индукции на оси $x = 1$ следует, что

$$y(1) = \Gamma(1) = L(1) = \Phi(1) = 0, \quad |y'(1)| < \infty \quad (1.7)$$

Тогда из (1.2) и (1.7) следует, что $F(1) = 0$. Продифференцировав (1.2) и принимая во внимание, что $(1 - x^2)y'' = 0$ при $x = 1$, получим $F'(1) = 0$. Объединяя эти условия, получим

$$\Phi'(0) = \Phi(0), \quad F(1) = F'(1) = 0 \quad (1.8)$$

Уравнения (1.2)—(1.5) и граничные условия (1.6)—(1.8) допускают решения с $\Phi(x) = \Gamma(x) \equiv 0$. Здесь разыскиваются нетривиальные решения для $\Phi(x)$ и $\Gamma(x)$.



Фиг. 2

2. Бифуркация полоидального поля в ламинарном режиме. Решение с $\Phi = \Gamma \equiv 0$ для системы уравнений (1.2), (1.4) и второго уравнения (1.5) не существует для $S > S_*$. Для произвольных чисел Bt в [9] было получено, что критическое значение S_* увеличивается с ростом Bt (кривые 1, 1', фиг. 2).

Покажем, что перед потерей существования происходит бифуркация нового решения с ненулевым полоидальным полем. Необходимым условием генерации полоидального магнитного поля является нетривиальная разрешимость уравнения (1.3) при выполнении первого условия (1.8). В силу линейности этого уравнения решение определяется с точностью до константы, поэтому выберем нормировочное условие $\Phi'(1) = -1$. Тогда при $Bt=0$ решение записывается в виде $\Phi(x) = 1 - x$. Соответственно $\Phi(0) = 1$, а функционал $\Phi'(0) - \Phi(0) = -2$. При $Bt \rightarrow \infty$ выполняется условие вмороженности и

$$\Phi(x) = -\frac{y(x)}{y'(1)}, \quad \Phi'(0) = -\frac{y'(0)}{y'(1)}$$

Функция $y(x)$ положительна и имеет максимум, достигаемый внутри интервала $[0, 1]$. Следовательно, $y'(0) > 0$, в то время как $y'(1) < 0$. Поэтому $\Phi'(0) - \Phi(0) > 0$ при $Bt \gg 1$ и должно существовать такое значение Bt , при котором $\Phi'(0) - \Phi(0) = 0$, т. е. выполняется условие (1.8). В линейном по Φ приближении можно пренебречь влиянием возбуждаемого магнитного поля на исходное течение и считать, что вращение отсутствует. Поэтому задача определения бифуркационной зависимости $Bt(S)$ или $S(Bt)$ сводится к отысканию нетривиальных решений уравнения (1.3) для известной функции $y(x)$, которая находится из решения автономной системы

$$(1 - x^2) y' + 2xy - \frac{1}{2} y^2 = F$$

$$(1 - x^2) L'' = Bt \left(yL' + 2y'L + \frac{2x}{1 - x^2} yL \right) \quad (2.1)$$

$$(1 - x^2) F''' = -2SLL'$$

Расчет показал, что для значений параметра $Bt \geq 0,35$, прежде чем решение теряет существование, происходит потеря его устойчивости и бифуркация вто-

ричного ламинарного режима (кривая 2, фиг. 2) с ненулевым полоидальным полем Φ . Область существования этого режима в пространстве параметров Vt , SBt обозначена цифрой II на фиг. 2, в то время как в области I регулярное решение рассматриваемой задачи является единственным и $\Phi = \Gamma \equiv 0$. Бифуркационное значение SBt меняется от значения $SBt = 85$ при $Vt = 0,35$ в точке K до $SBt = 215$ при $Vt \rightarrow \infty$ (штриховая линия 5, фиг. 2). Эту константу и предельное решение для функций $y(x)$, $L(x)$ легко получить, если в уравнениях (2.1) и (1.3) перейти к новым функциям

$$y_1 = y Vt, \quad F_1 = \frac{F}{S}$$

и перейти к пределу $Vt \rightarrow \infty$

$$(1 - x^2) y_1' + 2xy_1 = F_1 S Vt, \quad (1 - x^2) \Phi'' = y_1 \Phi' - y_1' \Phi \quad (2.2)$$

$$(1 - x^2) L'' = y_1 L' + 2y_1' L + \frac{2x}{1 - x^2} y_1 L, \quad (1 - x^2) F_1''' = -2LL'$$

Из условия ограниченности функции y_1 следует, что $SBt = \text{const}$. Получающаяся система (2.2) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0, \quad L(0) = 1, \quad \Phi'(0) = \Phi(0)$$

$$y_1(1) = L(1) = F_1(1) = F_1'(1) = \Phi(1) = 0$$

при вполне определенных значениях $y_1(1) = -11,7$, $F_1''(1) = 0,47$, $L'(1) = -2,6$ и $SBt = 215,3$. Плотность радиального тока j_r , пропорциональная $L'(x)$, имеет максимумы на плоскости ($L'(0) = -2,1$) и на оси ($L'(1) = -2,6$).

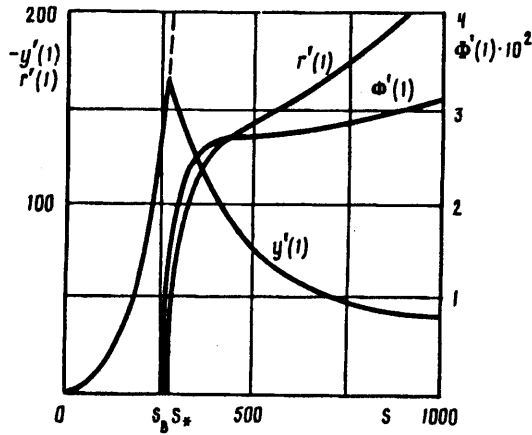
Когда Φ и Γ не малы, необходимо интегрировать систему уравнений (1.2) — (1.5).

Численное интегрирование проводилось от $x=1$ до $x=0$. При $x=1$ задавались значения $y(1) = \Phi(1) = L(1) = F(1) = F'(1) = 0$ и некоторые пробные значения $\Gamma'(1)$, $\Phi'(1)$, $L'(1)$, $F''(1)$ и $y'(1)$, которое не может быть найдено из уравнения (1.2) из-за того, что точка $x=1$ особая. Эти величины находились методом многомерных секущих из условий (1.6) — (1.8). Параметры S и Vt остаются свободными. Вблизи кривой 2 на фиг. 2 удобнее $\Phi'(1)$ задавать, а S — находить.

На фиг. 3 приведены результаты расчета для $Vt = 0,5$. При малых значениях S поле Φ и вращение Γ равны нулю. Радиальная скорость на оси симметрии $y'(1)$ с ростом S вначале растет линейно, а затем значительно быстрее и при $S_* = 285,4$ в отсутствие поля становится неограниченной. Но при $S_B = 254,3$ происходит прямая вилочная бифуркация решения с $\Phi \neq 0$ и $\Gamma \neq 0$. Согласно общей теории, если исходный режим был устойчивым, то в рассматриваемой ситуации он теряет устойчивость, которую наследует новый режим. Мягкий характер бифуркации сохраняется для всех значений Vt . С ростом S доля электрической энергии, преобразуемой в энергию вращения и магнитного поля, увеличивается. Новый режим в отличие от исходного существует уже для сколько угодно больших величин S .

При $Vt < 0,35$ область существования вторичного ламинарного режима ограничена слева кривой 3, на которой, как и на кривой 1, происходит потеря существования решения. Но если при приближении к кривой 1 из области I (фиг. 2) бесконечно усиливается приосевая струя, а магнитное поле и плотность тока остаются конечными, то при приближении к кривой 3 из области II, во-первых, приосевая струя, усиливаясь, остается закрученной, а, во-вторых, у оси формируются сильная магнитная струя и токовый слой.

Таким образом, хотя при больших значениях Vt парадокс потери существования решения (на кривой 1', фиг. 2) разрешается за счет бифуркации нового решения



Фиг. 3

(на кривой 2, фиг. 2), при малых Bt существует диапазон значений S (между кривыми 1 и 3 на фиг. 2), когда регулярного решения рассматриваемой задачи не существует.

3. Турбулентный режим. Приближение узкой струи. Случай малых Bt весьма интересен, поскольку для реальных проводящих сред, таких, как, например, жидкие металлы, характерные числа составляют величины порядка $10^{-6} - 10^{-7}$. При $Bt < 0,35$ бифуркации полоидального поля предшествует потеря существования решения, означающая, что модель ламинарной струи становится неприменимой. Можно ожидать, что еще до того, как скорость на оси обратится в бесконечность, ламинарная струя потеряет устойчивость и станет турбулентной, поскольку струйные течения теряют устойчивость уже при небольших числах Рейнольдса [14].

Для расчета в области параметров, расположенной между кривыми 1 и 3 на фиг. 2, необходимо подходящим образом учесть турбулизацию струи. Так как турбулентная струя обычно достаточно узкая, то в первом приближении можно использовать идеализацию, при которой угол раствора турбулентного конуса принимается равным нулю. Тогда по отношению к внешнему ламинарному течению турбулентная струя ведет себя как линейный массовый сток, расположенный на оси с эжекцией на единицу длины $2\pi\nu q$ [15].

Таким образом, рассматривается ламинарный режим, соответствующий главному члену внешнего асимптотического разложения, а наличие турбулентной струи моделируется специальными особенностями, помещаемыми на оси.

В процессе предельного перехода из областей I, II к кривым 1, 3 (фиг. 2) величина $q = y(1)$ вырабатывается равной 4. Это следует из уравнения (1.2), если предположить, что для внешнего решения величина $y'(1)$ остается ограниченной, а правая часть при $x = 1$ равна нулю. Ниже будет показано, что эти условия выполняются. Подробный вывод для общего случая содержится в [2].

Так как эжекция турбулентной струи больше, чем ламинарной, то считается, что $y(1) = q \geq 4$. Величина q для турбулентной струи находится так, чтобы удовлетворить условиям задачи. В случае, если q становится меньше 4, необходимо вернуться к ламинарной постановке задачи.

Полный осевой поток импульса через единичную площадку боковой поверхности может быть представлен в виде

$$\Pi_{\theta} = \Pi_{\infty} x - \Pi_{\infty} \sin \theta = \frac{\rho v^2}{r^2 \sin \theta} \left\{ F - xF' - \frac{1-x^2}{2} F'' + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{S\Phi^2}{2} - \frac{SL^2}{2} \right\} = 0$$

Для ограниченности $\Pi_{\text{в}}$ необходимо потребовать, чтобы при $x = 1$ числитель обращался в нуль. Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{2F - 2xF' - (1 - x^2)F'' + \Gamma^2 + S\Phi^2 - SL^2\} = 0 \quad (3.1)$$

Из уравнений (1.2)–(1.6) при $y(1) = q \neq 0$ аналитическое представление для функций y, Φ, L, Γ, F в окрестности $x = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} y &= q - y_1(1 - x) + y_2(1 - x)^{2-2\gamma} + o(1 - x) \\ \Phi &= \Phi_1(1 - x)^{1-\gamma} + o(1 - x) \\ L &= L_2(1 - x)^{1-\gamma} - L_1(1 - x) + o(1 - x) \\ \Gamma &= \Gamma_0 + \Gamma_1(1 - x)^{2-2\gamma} + o(1 - x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$F = F_0 - F_1(1 - x) + \frac{1}{2}F_2(1 - x)^2 + F_3(1 - x)^{3-2\gamma} + o(1 - x)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}q \text{Bt}, \quad y_2 = \frac{S\Phi_1^2}{4(1 - 2\gamma + 1/2q)}, \quad L_2 = -\frac{\Phi_1\Gamma_0}{q}(1 - 2\gamma),$$

$$\Gamma_1 = \frac{S\Phi_1 L_2}{4(1 - 2\gamma + 1/2q)}, \quad F_3 = \frac{2\Gamma_0\Gamma_1 - 2L_2^2}{2(1 - 2\gamma)(3 - 2\gamma)}$$

В случае $\gamma < 1$ (расчеты подтверждают, что это условие выполняется) из (3.2) следует, что при $x = 1$

$$\Gamma(1) = \Gamma_0, \quad \Phi(1) = 0, \quad L(1) = 0, \quad \lim \{ (1 - x^2)F'' \} = 0$$

Тогда F_0 находится из уравнения (1.2) $F_0 = 2q - 1/2q^2$. А из (3.1) получается еще одно условие, дающее связь между F_0 и F_1

$$F_1 = F_0 + 1/2\Gamma_0^2$$

Дифференцируя (12), находим, что $y_1 = (2q - F_1)/q$.

Численное интегрирование проводилось от малой окрестности оси, где использовалось представление (3.2), до плоскости $x = 0$. При этом в общем случае величины $q, \Gamma_0, F_2, L_1, \Phi_1$ подбирались так, чтобы выполнить условия (1.6)–(1.8). Очевидно, что и в этой постановке существует решение с $\Phi = \Gamma \equiv 0$. Именно такое решение возникает на кривой I и является единственным в области III (фиг. 2). С ростом S (при $\text{Bt} = \text{const}$) величина q увеличивается, т. е. усиливается турбулентная струя.

Определим границу самовозбуждения полоидального поля Φ . Для этого необходимо решить систему (2.1) и подобрать параметр S так, чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (1.3), т. е. при заданной произвольно величине Φ_1 выполнялось первое условие (1.8). Результатам расчета соответствует кривая 4 на фиг. 2.

При $\text{Bt} \rightarrow 0$ величины S и q , при которых происходит бифуркация, возрастают. Асимптотическую зависимость $S(\text{Bt}), q(\text{Bt})$ можно установить при помощи специального асимптотического анализа. При больших S функции y, F становятся большими по абсолютной величине. Будем искать их в виде регулярных разложений по S , ограничиваясь первыми членами

$$y(x) = \sqrt{S}y_*(x) + \dots, \quad F(x) = SF_*(x) + \dots \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в уравнения (1.2)–(1.5) с $\Gamma \equiv 0$, получим систему уравнений со следующими граничными условиями:

$$-1/2y_*^2 = F_*$$

$$(1 - x^2)\Phi'' = Bt\sqrt{S} (\Phi'y_* - y_*'\Phi)$$

$$(1 - x^2)L'' = Bt\sqrt{S} \left(L'y_* + 2y_*'L + \frac{2x}{1 - x^2}y_*L \right) \quad (3.4)$$

$$(1 - x^2)F_*''' = -2LL'$$

$$F_*(0) = F_*'(0) = 0, \quad \Phi'(0) = \Phi(0), \quad L(0) = 1$$

Без потери общности можно положить $\Phi(0) = 1$. Величина $Bt\sqrt{S}$ остается конечной при $S \rightarrow \infty$. Уравнения (3.4) интегрируются от плоскости до оси. При $x = 0$ задаются пробные значения $L'(0)$, $F_*''(0)$, которые вместе с $Bt\sqrt{S}$ подбираются таким образом, чтобы выполнить граничные условия на оси. Для кривой 4 (фиг. 2) получены следующие асимптотические зависимости: $S = 6,15Bt^2$, $q = 1,46Bt^{-1}$. Величина $\gamma = \frac{1}{2}qBt$ вдоль кривой 4 возрастает от 0,71 в точке K до 0,73 при $Bt \rightarrow \infty$.

Бифуркация полоидального поля вызывает появление азимутальной силы, приводящей жидкость во вращение. С ростом S усиливается полоидальное поле, а величина q начинает уменьшаться.

Можно представить себе следующую картину смены режимов при $Bt < 0,35$. При малых S течение ламинарное, Φ и Γ отсутствуют (область I, фиг. 2). Увеличение S приводит к быстрому росту осевой скорости и при некотором значении S происходит турбулизация струи (кривая 1). Дальнейшее увеличение S усиливает турбулентную струю и соответственно q возрастает (область III). На кривой 4 происходит бифуркация полоидального поля и вращения, но течение при этом остается турбулентным, т. е. $q \geq 4$ (область IV). Рост Φ и Γ стабилизирует течение и при еще больших величинах S турбулентность в приосевой струе подавляется (на кривой 3) и режим течения становится ламинарным (область II), но вращение и полоидальное поле сохраняются.

Таким образом, при любых значениях Bt достаточно сильный ток приводит к спонтанной закрутке потока и возникновению полоидальной компоненты магнитного поля. Это в свою очередь стабилизирует течение и делает возможным устойчивый ламинарный режим.

Обнаруженное явление МГД-динамо легко объяснить качественно. Усиление поля и его поддержание на некотором уровне, величина которого определяется диссипативными процессами, обусловлено наличием обратной положительной связи. Сходящееся к оси симметрии течение проводящей среды создает полоидальное магнитное поле того же знака, что и начальное возмущение. При малой проводимости диссипативные процессы, включающие джоулеву диссипацию и магнитную диффузию, подавляют усиление индукции и возникает уже описанный и хорошо известный эффект кумуляции импульса, когда скорость на оси обращается в бесконечность при конечной величине подводимого тока. Генерация осесимметричного поля в осесимметричной ситуации не противоречит известной теореме «антидинамо» Каулинга, поскольку не выполняются условия ограниченности области течения и замкнутости силовых линий магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жигулев В. Н. О явлении эжекции электрическим разрядом // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 2. С. 280—283.
2. Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
3. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье — Стокса // ПММ. 1960. Т. 24. № 4. С. 610—621.
4. Щербинин Э. В. Об одном классе точных решений в магнитной гидродинамике // Магнитная гидродинамика. 1969. № 4. С. 46—58.

5. *Lundquist S.* On the hydromagnetic viscous flow generated by a diverging electric current // *Ark. Fys.* 1969. В. 40. № 5. P. 89—95.
6. *Shercliff J. A.* Fluid motions due to an electric current source // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. Pt 2. P. 241—250.
7. *Sozou C.* On fluid motions induced by an electric current source // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46. Pt 1. P. 25—32.
8. Электровихревые течения / Под ред. Э. В. Щербинина. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
9. *Sozou C., English H.* Fluid motions induced by an electric current discharge // *Proc. Roy. Soc. London.* 1972. V. A329. № 1576. P. 71—81.
10. *Sozou C., Pickering W. M.* Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 73. Pt 4. P. 641—650.
11. *Бояревич В. В., Миллере Р. П.* Усиление азимутального вращения в меридиональном электровихревом течении в полусфере // *Магнитная гидродинамика.* 1982. № 4. С. 51—56.
12. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Автомодельное гидромагнитное динамо // *ЖЭТФ.* 1989. Т. 96. Вып. 5(11). С. 1728—1743.
13. *Goldshik M. A., Shtern V. N.* Conical flows of fluid with variable viscosity // *Proc. Roy. Soc. London.* 1988. V. A419. № 1856. P. 91—106.
14. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
15. *Schnider W.* Flow induced by jets and plumes // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 55—65.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.V.1990