МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1993

УДК 533.6.01

© 1993 г. Г. И. МАЙКАПАР

О ДАВЛЕНИИ НА ЛИНИИ РАСТЕКАНИЯ

Для безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости показано, что линия растекания на твердой поверхности не обязательно должна быть линией максимума давления, даже если она прямая, и, наоборот, линия максимума давления не обязательно является линией растекания.

Интерес к линиям растекания на обтекаемых газом твердых поверхностях в большой степени вызван тем, что они часто являются линиями максимума теплового потока; производные поперечной составляющей скорости внешнего течения на линиях растекания необходимы для расчета пограничного слоя. Считается, что если линия растекания совпадает с геодезической линией поверхности, то она является и линией максимума давления в поперечном направлении [1]. Проверим это в наиболее простом случае безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости.

Линия растекания — это линия тока на поверхности тела, на которой поперечная составляющая скорости w, как и на любой линии тока, обращается в нуль и, кроме того, ее производная по поперечной к линии растекания координате z положительная: $w=0$, $w_z>0$. Окрестные линии тока на поверхности тела — асимптотические по отношению к линии растекания и расходятся от нее. Примем линию растекания за координатную линию $z=0$ ортогональной сетки x, z на поверхности, в качестве третьего семейства координатных линий выберем нормальные к твердой поверхности $y=0$[1].

Систему уравнений импульсов, неразрывности и отсутствия вихрей напишем в виде

$$\frac{uu_x}{f}+vu_y+\frac{wu_z}{h}+\frac{uvf_y}{f}+\frac{uwf_z}{fh}-\frac{w^2h_x}{fh}+\frac{p_x}{\rho f}=0 \tag{1}$$

$$\frac{uv_x}{f}+vv_y+\frac{wv_z}{h}-\frac{u^2f_y}{f}-\frac{w^2h_y}{h}+\frac{p_y}{\rho}=0 \tag{2}$$

$$\frac{uw_x}{f}+vw_y+\frac{ww_z}{h}+\frac{uwh_x}{fh}-\frac{u^2f_z}{fh}+\frac{uwh_y}{h}+\frac{p_z}{\rho h}=0 \tag{3}$$

$$(uh)_x+(vfh)_y+(fw)_z=0 \tag{4}$$

$$(wh)_y-v_z=(uf)_z-(wh)_x=v_x-(uf)_y=0 \tag{5}$$

где u, v, w — составляющие скорости, соответствующие x, y, z; f, h — функции Ламе, соответствующие x, z; p, ρ — давление и плотность.

На линии растекания $(y=z=0)$

$$v=w=0$$

и уравнения (1)—(5) переходят в

$$uu_x+\frac{p_x}{\rho}=0,\quad -\frac{u^2f_y}{f}+\frac{p_y}{\rho}=0 \tag{6}$$

$$-\frac{u^2f_z}{f}+\frac{p_z}{\rho}=0 \tag{7}$$

$$(uh)_x+v_yhf+w_zf=0,\quad (uf)_z=(uf)_y=0 \tag{8}$$

Из (7) видно, что на линии растекания производная $p_z=0$ только в том случае, когда она геодезическая $(f_z=0)$, в частности, если она расположена в плоскости симметрии. Только при этом условии нормальная координатная поверхность будет поверхностью растекания и в пограничном слое [2], а поперечная составляющая напряжения трения $\tau_{yz}=0$.

[1] В такой системе линии x, z являются линиями главных кривизн.

Для того чтобы установить связь производной w_z с давлением, возьмем производные по x уравнений (1) и (4)

$$\left(\frac{uu_x}{f}\right)_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{p}{f}\right)_x = 0 \tag{9}$$

$$(uh)_{xx} + v_{xy} fh + v_y (hf)_x + w_z f_x + w_{xz} f = 0$$

производную по y уравнения (2)

$$\frac{uv_{xy}}{f} + v_y^2 - \left(\frac{u^2 f_y}{f}\right)_y + \frac{p_{yy}}{\rho} = 0 \tag{10}$$

и производную по z уравнения (3)

$$\frac{uw_{xz}}{f} + \frac{w_z^2}{h} + \frac{uw_z h_x}{fh} - \left(\frac{u^2 f_z}{fh}\right)_z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{p_z}{h}\right)_z = 0 \tag{11}$$

Из системы уравнений (9)—(11) с учетом (6)—(8) получаем квадратное уравнение для определения w_z через давление

$$\frac{w_z^2}{h} + \left[2\frac{q}{\rho}\frac{h_x}{h} - \frac{p_x}{q}\right]\frac{w_z}{f} + \frac{p_x^2}{q^2}\frac{h}{f^2} - \frac{p_x}{2\rho}\frac{(hf)_x}{f^3} +$$

$$+ \frac{q^2}{2\rho^2 f}\left[\frac{1}{f}\left(2\frac{h_x^2}{h} + \frac{h_x f_x}{f} - h_{xx}\right) + h\left(3\frac{f_y^2}{f} - f_{yy}\right) - \frac{f_{zz}}{h}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\rho}\left(\frac{h}{f^2}p_{xx} + hp_{yy} + \frac{p_{zz}}{h}\right) = 0$$

$$q^2 = 2\rho(p_0 - p)$$

где p_0 — полное давление.

Даже в случае прямоугольных координат ($f = h = 1$), когда линия растекания — прямая и уравнение существенно упрощается

$$w_z^2 - \frac{p_x}{\sqrt{2}\, q} w_z + \frac{p_x^2}{q^2} + \frac{\Delta p}{2\rho} = 0$$

$$w_z = \frac{p_x}{2q} \pm \sqrt{\frac{3}{4}\frac{p_x^2}{q^2} - \frac{\Delta p}{2\rho}}$$

$$\Delta p = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$$

условие максимума давления $p_{zz}<0$ не является необходимым и достаточным для линии растекания. Производная $w_z>0$, если оператор Лапласа от давления удовлетворяет одному из следующих неравенств:

$$\Delta p < -\frac{p_x^2}{p_0 - p}, \quad p_x < 0$$

$$-\frac{p_x^2}{p_0 - p} < \Delta p < -\frac{3p_x^2}{4(p_0 - p)}, \quad p_x > 0$$

Иная ситуация для критической точки, в которой $u = v = w = 0$ и должны удовлетворяться уравнения

$$u_x^2 + \frac{p_{xx}}{\rho} = 0, \quad w_z^2 + \frac{p_{zz}}{\rho} = 0$$

Очевидно, что в критической точке должно быть $p_{xx}<0$, $p_{zz}<0$, т. е. она есть точка максимума давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
2. *Squire L. C.* The three-dimensional boundary-layer equations and some power series solutions// ARC, R&M. 1957. № 3006. 17 p.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1991