

УДК 532.54

© 1993 г. В. Н. ПОЛОЦКИЙ, И. М. СТАРОБИН

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОГО  
ТРАНСПОРТА ЖИДКОСТИ

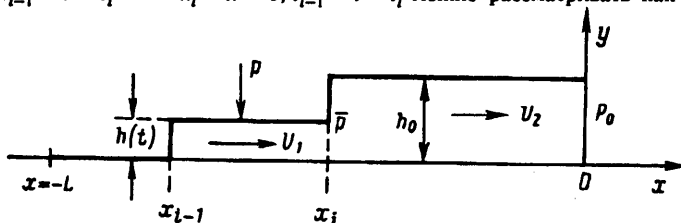
Перистальтическое течение вязкой несжимаемой жидкости в случае длинных волн, когда  $\varepsilon = h_0/l \ll 1$ , изучено в [1—7]. Здесь  $h_0$  — поперечный размер канала,  $l$  — длина перистальтической волны. В [1—4] рассматривалось перистальтическое течение в плоском канале, в [5—7] — течение в осесимметричной трубке. Более подробные данные приведены, например, в [8]. В [3] для плоского перистальтического потока вязкой жидкости исследовалась зависимость эффективности перистальтики от формы перистальтической волны. При этом эффективность рассматривалась как отношение диссипативных потерь в потоке к полезной работе.

В настоящей работе исследуется эффективность длинноволнового ( $\varepsilon \ll 1$ ) перистальтического транспорта идеальной и вязкой жидкости, но в отличие от [3] эффективность  $\eta$  рассматривается с точки зрения затрат энергии внешнего источника («генератора» перистальтической волны) и определяется отношением полезной работы по прокачиванию жидкости к полной работе, затрачиваемой генератором, вызывающим движение стенок канала.

1. Случай идеальной жидкости. Исследуем сначала течение жидкости с малой вязкостью, когда ядро потока можно рассматривать как течение идеальной жидкости, а малые диссипативные потери не учитывать. Рассмотрим течение в щели ширины  $h_0$  между подвижными верхними пластинами длины  $l$  и неподвижной нижней пластиной длины  $L$  (фигура) пластины расположены вдоль оси  $x$  и перемещаются вдоль оси  $y$ , левый конец щели ( $x = -L$ ) закрыт,  $L = nl$ ,  $n$  — число подвижных пластин. Будем считать щель узкой, а пластины длинными, т. е.  $\varepsilon_0 = h_0/L \ll 1$ , более того, потребует выполнения более сильного неравенства  $\varepsilon = h_0/l = n \varepsilon_0 \ll 1$ , что соответствует случаю не слишком большого числа пластин  $n$ , например  $n \leq \sqrt{L/h_0}$ . Предположим, что движение верхних пластин вдоль оси  $y$  вызывается приложением извне поочередно к каждой  $i$ -й пластине давления  $P$  и образует в жидкости перистальтическую волну с полным пережатием просвета щели (последовательно каждой  $i$ -й верхней пластиной),  $i = 1, \dots, n$ . Такая геометрия течения может служить моделью процессов в некоторых биологических системах [7].

Обозначим через  $P_1(x)$  и  $U_1(x)$  давление и продольную составляющую скорости жидкости на внутренней поверхности подвижной пластины  $x_{i-1} < x < x_i$  (здесь  $x_i = (-n + i)l$ ) на этапе ее движения  $t_{i-1} < t < t_i$  (здесь  $t_i$  — момент окончания  $i$ -го такта) через  $P_2(x)$  и  $U_2(x)$  обозначим соответственно давление и скорость на внутренней поверхности неподвижной группы пластин  $x_i < x < x_n = 0$ .

Течение жидкости в щели, за исключением зоны резкого расширения, с точностью до членов  $\alpha(\varepsilon)$  можно считать одномерным [9]. Зона резкого расширения  $x \approx x_n$ , в которой возникает существенно неоднородное течение, имеет длину порядка  $h_0$  и при  $\varepsilon \ll 1$  ее можно не рассматривать, вводя при  $x = x_i$  местное сопротивление и соотношения для потерь напора [10]. Тогда течения в зонах I:  $x_{i-1} < x < x_i$ ,  $t_{i-1} < t < t_i$  и II:  $x_i < x < 0$ ,  $t_{i-1} < t < t_i$  можно рассматривать как потенциальные с



граничными условиями при  $x = x_i$  для I:  $P(x_i) = P_-$ , для II:  $P(x_i) = P_+$ , определяемыми гидравлическим сопротивлением «внезапного расширения» [10]

$$\frac{P_-}{\rho} + \frac{U_1^2(x_i)}{2} = \frac{P_+}{\rho} + \frac{U_2^2(x_i)}{2} + \frac{(U_1(x_i) - U_2(x_i))^2}{2} \quad (1.1)$$

Под подвижной пластиной течение описывается уравнением неразрывности (1.2) и интегралом Коши — Лагранжа (1.3)

$$h U_1(x) = -\dot{h}(x - x_{i-1}) \quad (1.2)$$

$$\left( \frac{d}{dt} \left( -\frac{\dot{h}}{h} \right) + \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)^2 \right) \left( \frac{x - x_{i-1}}{2} - \frac{\dot{h}}{2} \right) + \frac{P(x) - P_-}{\rho} = 0 \quad (1.3)$$

Для неподвижных пластин, суммарная длина которых  $(n - i)l$ , из уравнения неразрывности следует, что скорость  $U_2$  не зависит от  $x$ . Тогда интеграл Коши — Лагранжа дает

$$\frac{P_+}{\rho} = \frac{P_0}{\rho} + \dot{U}_2(n - i)l \quad (1.4)$$

Уравнение неразрывности в окрестности  $x = x_i$  (для средней скорости потока после расширения [10]) дает  $U_2 h_0 = U_1(x_i)h$ , откуда в силу (1.2) при  $x = x_i$  получаем

$$U_2 = -\frac{\dot{h}}{h_0}l \quad (1.5)$$

Подставляя  $U_1(x_i)$  из (1.2) и  $P_+$  из (1.4) в (1.1), имеем

$$\frac{P_-}{\rho} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} \left( U_2^2 - \left( \frac{\dot{h}}{h} \right)^2 \dot{h}^2 + \left( \frac{\dot{h}}{h}l + U_2 \right)^2 \right) + \dot{U}_2(n - i)l \quad (1.6)$$

Подставляя  $P_-$  из (1.6) в (1.3) и усредняя полученные соотношения по длине подвижной пластины (от  $x_{i-1}$  до  $x_i$ ), получим

$$\frac{1}{3} \frac{2\dot{h}^2 - \dot{h}h}{h^2} + \frac{U_2^2}{\dot{h}^2} + \frac{\dot{h}U_2}{hl} + \frac{\dot{U}_2(n - i)}{l} = \frac{\Delta P}{\rho \dot{h}^2}$$

$$\Delta P = \frac{1}{l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(z) dz - P_0$$

После несложных преобразований имеем с учетом (1.5)

$$-\dot{h} \left( h + \frac{3(n - i)h^2}{h_0} \right) + \dot{h}^2 \left( 2 + \frac{3h(h_0 - h)}{h_0^2} \right) = 3 \frac{\Delta P}{\rho \dot{h}^2} h^2 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) может быть сведено к линейному заменой переменных  $y = \dot{h}^2$ ,  $z = h/h_0$

$$-\frac{1}{2} \frac{dy}{dz} (z + 3(n - i)z^2) + y(2 - 3z(1 - z)) = 3 \frac{\Delta P}{\rho \dot{h}^2} h_0^2 z^2 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) допускает приближенное интегрирование [11]

$$y = \frac{2g^2}{4(n - i) - 1} (z^{3/(1 + 2(n - i))} - z^2), \quad g = \sqrt{\frac{3\Delta P}{\rho} \frac{h_0}{l}} \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) можно использовать для определения времени истечения  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ . Из (1.9) легко вычислить среднее значение  $\langle \dot{h}^2 \rangle$  за такт сжатия

$$\langle y \rangle = \langle \dot{h}^2 \rangle = \frac{g^2}{3(2 + n - i)} \quad (1.10)$$

Численный анализ зависимостей  $y(z)$  вида (1.9) показывает, что можно приближенно (с точностью 5%) заменить  $\langle \dot{h} \rangle \approx \sqrt{\langle y \rangle}$ , тогда для среднего времени истечения получаем

$$\tau_i \approx \frac{h_0}{\langle \dot{h} \rangle} = l \sqrt{\frac{\rho}{\Delta P} (2 + n - i)} \quad (1.11)$$

Оценим эффективность  $\eta$  прокачивания жидкости в рассматриваемых условиях. Естественно предположить, что мощность источника, вызывающего движение пластин, убывает с уменьшением развиваемой силы или, что то же самое, с уменьшением длины  $l$ ; убывание опишем функцией  $F(l/L) = F(1/n)$  с нормировкой  $F(1) = 1$ . (Например, для ряда технических систем силу, развиваемую электродвигателем, можно считать пропорциональной току, а потери пропорциональными квадрату тока, что дает  $F(1/n) \sim 1/n^2$ ; для биологических систем характерно еще более быстрое убывание функции  $F$ .)

В общем случае  $\eta = A_u / (A_k + A_s + A_w)$ , где  $A_u = P_0 h_0 l$  — полезная работа,  $A_k$  — работа, затраченная на ускорение пластин,  $A_s$  — работа за счет потерь источника,  $A_k$  и  $A_s$  определяются соотношениями

$$A_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \langle v \rangle^2, \quad A_s = \sum_{i=1}^n W F \left( \frac{l}{L} \right) \tau_i \quad (1.12)$$

Здесь  $m$  — масса подвижной пластины,  $W$  — размерный коэффициент. Используя соотношения (1.10)–(1.12), получаем для  $\eta$  выражение

$$\eta = \left( \varepsilon^2 \frac{M \Delta P}{P_0 \rho h_0 L} S_1 + \frac{W F(l/L)}{P_0 h_0} \sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}} S_2 + 1 \right)^{-1} \quad (1.13)$$

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i}, \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1+i}$$

Оценим поведение различных слагаемых в (1.13) при фиксированных геометрических параметрах  $h_0$ ,  $L$  и возрастании  $n$  (соответственно уменьшении  $l = L/n$  и возрастании  $\varepsilon = n \varepsilon_0$ ). Первый член в (1.13) хотя и возрастает с возрастанием  $n$ , но он пропорционален  $\varepsilon^2$  и, следовательно, при сделанных выше предположениях  $n \leq \sqrt{L/h_0}$ ,  $\varepsilon \ll 1$  его вклад в (1.13) мал. Второй член убывает с уменьшением  $l$ , определяя в основном эффективность перистальтического транспорта. При небольших  $n$  убывание практически определяется функцией  $F(1/n)$  (при  $n = 5$ ,  $S_2 \approx 1,9$ ), при больших  $n$  характер убывания  $S_2 \approx \sqrt{n} F(1/n)$ .

Таким образом, оказывается, что при уменьшении длины волны и соблюдении условия  $h_0 \ll l$ , эффективность перистальтического транспорта может быть предельно увеличена за счет уменьшения доли потерь генератора перистальтической волны до уровня, определяемого первым малым слагаемым в (1.13).

2. Случай вязкой жидкости. Рассмотрим течение вязкой ньютоновской жидкости с коэффициентом вязкости  $\mu$ . Так же как и в предыдущем разделе, будем считать, что течение вызывается движением  $n$  верхних пластин за счет поочередного ( $i = 1, \dots, n$ ) приложения к ним извне давления  $P$ .

Кроме исходного ограничения  $\varepsilon \ll 1$  будем считать выполненным ограничение  $Re = \rho U h_0 / \mu \sim 1$ . При выполнении исходного неравенства  $h_0 \ll l$  зона неоднородности потока после внезапного расширения имеет длину  $\sim 0,05 h_0 Re$  [12]. Тогда, учитывая, что  $l \gg h_0$ , можно пренебречь изменением параметров потока вблизи расширения при  $x = x_i$  и считать  $P_+ = P_- = P$ . Следовательно, в каждой из зон I и II можно рассматривать течение Пуазейля, описываемое [4, 5] уравнениями

$$\frac{\partial U^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad U(0) = U(h) = 0 \quad (2.1)$$

На такие движения  $i$ -й пластины  $t_{i-1} < t < t_i$  граничные условия таковы:  $P(x_{i-1}) = P$ ,  $P(x_i) = P_+ = P_- = P$ ,  $P = P(0)$ .

Интегрируя первое из уравнений (2.1) 3 раза по  $y$  и обозначая через  $Q(x)$  расход жидкости через сечение  $x$ , получим

$$Q(x) = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.2)$$

В зоне II ( $x > x_i$ ) имеем  $\frac{\partial P}{\partial x} = \text{const}$  и, интегрируя (2.2) от  $x_i$  до 0, получаем

$$Q(x) = -\frac{h_0^3 (\bar{P} - P_0)}{12\mu (n-i) l} \quad (2.3)$$

В зоне I ( $x_{i-1} < x < x_i$ ) в соответствии с (1.2)  $Q(x) = -h(x - x_{i-1})$ . Тогда при  $x = x_i$  имеем  $Q(x_i) = -hl$ . Интегрируя (2.2) от  $x_{i-1}$  до  $x_i$ , получаем

$$Q(x) = -\frac{h_0^3 (P - \bar{P})}{12\mu l} \quad (2.4)$$

Приравнявая расходы жидкости через сечение  $x = x_i$ , исключая  $P$  при помощи (2.3)–(2.4) и обозначая, как и выше,  $\Delta P = P - P_0$ , получаем

$$h \left( h^{-3} + \frac{2(n-i)}{h_0^3} \right) = \frac{\Delta P}{6\mu l} \quad (2.5)$$

Интегрируя (2.5) с начальными условиями  $h(t_{i-1}) = h_0$ , получаем соотношение

$$t - t_{i-1} = \frac{6\mu l^2}{\Delta P h_0^2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h_0^2}{h^2} - 1 \right) + 2(n-i) \left( 1 - \frac{h}{h_0} \right) \right) \quad (2.6)$$

Определим характерное время истечения из условия  $h(t_{i-1} + \tau_i)/h_0 = e^{-3}$

$$\tau_i = \frac{6\mu l^2}{\Delta P h_0^2} \left( \frac{e^6 - 1}{2} + 2(n-i)(1 - e^{-3}) \right) \quad (2.7)$$

Эффективность перистальтического транспорта выражается в этом случае соотношением

$$\eta = \left( 2 \frac{\Delta P}{P_0} + \varepsilon^2 \frac{M \Delta P}{6P_0 \rho h_0 L} S_1 + \frac{F(l/L)}{P_0 h_0^2} \frac{12\mu l}{h_0 \Delta P} S_3 + 1 \right)^{-1} \quad (2.8)$$

$$S_3 = \frac{e^6 - 1 + 2(n-1)(1 - e^{-3})}{2n} \approx 1 + \frac{e^6 - 3}{2n}$$

Первый член в (2.9), обусловленный потерями на вязкое трение, не зависит от  $l$ . Вклад второго хотя и растет аналогично (1.13), но является малой ( $\sim \varepsilon^2$ ) величиной. Третий член, дающий основной вклад в потери, убывает при уменьшении  $l$  быстрее, чем для идеальной жидкости ( $S_3(n)$  — ограничена).

Таким образом, как и в случае идеальной жидкости, для перистальтического транспорта вязкой ньютоновской жидкости при  $h_0 \ll l$ ,  $Re \sim 1$  эффективность транспорта увеличивается за счет уменьшения доли потерь генератора перистальтической волны. Однако по сравнению со случаем идеальной жидкости этот эффект выражен при больших  $n$  сильнее, поскольку уменьшение доли потерь генератора пропорционально не  $F(l/L)\sqrt{l/l}$ , а  $F(l/L)$ .

Отметим некоторые свойства зависимости (2.5)  $\eta(\Delta P)$ . При стремлении  $\Delta P$  к нулю  $\eta$  стремится к нулю, что соответствует случаю покоящейся жидкости. При стремлении  $\Delta P$  к бесконечности  $\eta$  стремится к нулю, что соответствует росту потерь в случае очень быстрого вытекания вязкой жидкости из щели. Максимум  $\eta$  достигается при  $\Delta P = \Delta P_*$ , определяемом соотношением

$$\Delta P_* = \left[ 12WF\mu LS_3 \left( h_0^3 \left( 2 + \frac{M}{6\rho L h_0} \frac{h_0^2}{l^2} S_1 \right) \right)^{-1} \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

Определяя средний расход ( $Q$ ) как отношение объема всей вытекающей из щели жидкости к полному времени истечения  $\sum_{i=1}^n \tau_i$ , имеем

$$\Delta P_*(Q) = \left( W \frac{F}{2} + \frac{M}{6 \rho L h_0} \frac{h_0^2}{l^2} S_1 \right) \quad (2.10)$$

В случае, когда второе слагаемое в (2.7) мало, оказывается, что максимум величины  $\eta$  достигается при  $\Delta P_*(Q)$ , приблизительно равном половине мощности потерь генератора перистальтической волны. Авторы выражают благодарность А. А. Бармину, чьи замечания позволили существенно доработать статью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burns J. C., Parkes T. Peristaltic motion // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. № 4. P. 731—743.
2. Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1969. V. 37. № 4. P. 799—825.
3. Liron N. On peristaltic flow and its efficiency // Bull. Math. Biol. 1976. V. 38. № 6. P. 573—596.
4. Рогупер С. А. О движении вязкой жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 4. С. 202—204.
5. Старобин И. М. Течение вязкой жидкости в изогнутой деформирующейся трубке конечной длины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 177—179.
6. Yin F., Fung Y. C. Peristaltic waves in circular cylindrical tubes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 3. P. 579—587.
7. Lykoudis P. S., Roos R. The fluid mechanics of the ureter from a lubrication theory point of view // J. Fluid Mech. 1970. V. 43. № 4. P. 661—674.
8. Srivastava L. M., Srivastava V. P., Sinha S. N. Peristaltic transport of a physiological fluid. Pt 1. Flow in nonuniform geometry // Biorheology. 1983. V. 20. № 1. P. 153—166.
9. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
10. Агроскин Н. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И. Гидравлика. Л., Госэнергоиздат, 1954, 484 с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1975, 576 с.
12. Pollard A. A contribution on the effects of inlet conditions when modelling stenoses using sudden expansions // J. Biomechanics. 1981. V. 14. № 3. P. 349—355.

Москва

Поступила в редакцию  
1.X.1992