МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1993

УДК 532.517.4 : 517.1

© 1993 г. С. Н. СЫРОМЯТНИКОВ

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРИ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Фракталы устанавливают связь между геометриями в различных масштабах и, следовательно, являются важным звеном при изучении связи наблюдаемых макроскопических явлений с микроскопическим поведением систем. Поэтому выяснение фрактальных свойств систем с рэлей-тейлоровской неустойчивостью представляет собой известный интерес. В данной работе определена фрактальная размерность контактной границы и линии изохоры при рэлей-тейлоровской неустойчивости. Для этого были использованы данные из [1, 2], где указанные границы были рассчитаны численными методами для различных моментов времени.

Фрактальная размерность определялась по методике, изложенной в [3]. Контактная граница по линии изохор аппроксимировались прямолинейными отрезками длиной ε. При уменьшении длины ε возрастает число отрезков $N(\varepsilon)$ и точность ломаной кривой $L = N(\varepsilon)\varepsilon$. Для нефрактальной кривой $N = h/\varepsilon$, где h — мера длины границы. Если граница фрактальна, $L = h\varepsilon^{1-D}$, где D — фрактальная размерность, не являющаяся целым числом.

Для меры длины $h = 1$, из соотношения $L = \varepsilon^{1-D}$ следует [3]

$$D = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{\log L}{\log \varepsilon}\right) \tag{1}$$

Из (1) видно, что фрактальная размерность определена, если известен угловой коэффициент линейной зависимости $\log L$ от $\log \varepsilon$. Указанная методика эквивалентна случаю, когда множество точек покрывается малыми квадратами [3]. Поэтому здесь можно говорить о емкостной фрактальной размерности.

Фрактальная размерность линии изохоры ($\rho = 1{,}9$) в тяжелом газе при рэлей-тейлоровской неустойчивости для зоны турбулентного перемешивания представлена ниже

D	1,39 ± 0,04	1,39 ± 0,04	1,38 ± 0,04	1,32 ± 0,03	1,33 ± 0,03	1,32 ± 0,03
t_1	20	30	20	30	40	46
Модель	C	C	H	H	H	H

Здесь использовались результаты численных экспериментов, полученные в [1]. Линия изохоры рассчитывалась разностным методом в различные моменты времени t_1 с учетом (C) и малой сжимаемости (H). Рассматриваемое пространство было ограничено с четырех сторон жесткими прямыми стенками в постоянном поле силы тяжести, где находилось два слоя идеальных газов с $\gamma = 5/3$ и $\rho_h/\rho_l = 2$(ρ_h, ρ_l — соответственно плотность тяжелого и легкого газа). В начальный момент времени задавалось возмущение поверхности раздела веществ в виде ломаной линии, координаты точек излома которой являются случайными числами. Такое возмущение содержит широкий спектр гармоник.

Ниже представлена фрактальная размерность контактной границы неустойчивости по Рэлею—Тейлору

D	1,18 ± 0,02	1,22 ± 0,02	1,19 ± 0,02	1,19 ± 0,02
Источник	[1]	[1]	[2]	[2]
A	1/3	1/3	1	1
t_1	11,94	15,15	—	—
t_2	—	—	1,5	2,3
Модель	H	H	—	—

В [1] для расчета контактной границы использован модифицированный метод, который позволяет рассчитывать в переменных Эйлера и Лагранжа двумерные газодинамические течения в широком диапазоне чисел Маха

$A = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l)$

Здесь A — число Атвуда.

Контактная граница в начальный момент не возмущалась, а задавалось поле массовых скоростей, полученное в линейном приближении.

В работе [2] рассматривалась контактная граница между двумя жидкостями, у которых $\rho_h/\rho_l \to \infty$. Для расчета использовалась модель, предложенная автором. Динамика границы рассматривалась путем моделирования конкуренции среди пузырьков методом вихря в ячейке. Каждый пузырек рассматривался как источник сингулярности, для которого записывалось уравнение движения. Результаты, представленные в выводе на основе данных из [2], получены для контактной границы без учета поверхностного натяжения. Также следует отличать время t_2 от времени t_1. Но для всех рассматриваемых случаев можно говорить о развитой вихревой структуре.

Как видно из полученных результатов, фрактальная размерность является универсальной характеристикой неустойчивости Рэлея — Тейлора. Размерность сохраняет свою величину в процессе динамики границы при наличии вихревой (турбулентной) структуры и, таким образом, является критерием наличия этих структур. Более того, как видно из приведенных выше данных, фрактальная размерность одинакова для различных моделей расчета неустойчивости Рэлея — Тейлора и, следовательно, может служить одним из критериев корректности этих моделей.

В заключение следует отметить некоторую аналогию с образованием фрактальных структур вязких пальцев в ячейке Хеле — Шоу. Здесь возникающая неустойчивость также связана с усилением неоднородности на границе раздела. Замечено, что фрактальная структура для вязких пальцев становится более выраженной по мере уменьшения поверхности натяжения, так как при этом происходит более резкое деление масштаба контактной границы [4]. При рэлей-тейлоровской неустойчивости с учетом поверхностного натяжения вихревая структура контактной границы становится менее выраженной и фрактальная размерность при таких условиях может быть не обнаружена. Так, анализ линии границы [2], взятый при $t_2 = 2{,}4$ и $B = 3{,}958 \cdot 10^{-4}$ (B — параметр, связанный с поверхностным натяжением), показал отсутствие фрактальной размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анучина Н. Н., Анучин М. Г., Волков В. И. и др.* Развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости в системах с различной сжимаемостью среды//Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 4. С. 3—16.
2. *Zufiria J. A.* Vortex-cell simulation of bubble competition in a Rayleigh-Taylor instability//Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 11. P. 3199—3212.
3. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 311 с.
4. *Смирнов Б. М.* Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 134 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
11.XI.1991