

УДК 532.5.013.4+536.25

© 1993 г. Р. В. БИРИХ, Р. Н. РУДАКОВ

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ

Влияние сопротивления проницаемой перегородки на устойчивость равновесия подогреваемого снизу слоя жидкости рассмотрено ранее в [1—3]. В них предполагалось отсутствие тепловой инерции у перегородки, что справедливо для тонких перегородок с малой теплопроводностью. Для перегородок с высокой относительно жидкости теплопроводностью необходимо учитывать перенос тепла вдоль перегородки. Как показано ниже, этот эффект оказывает существенное влияние на порог конвекции.

1. Рассмотрим горизонтальный слой $|z| \leq h$ вязкой жидкости, расположенный между твердыми массивами одинаковой теплопроводности, в которых вдали от слоя поддерживается направленный вниз (против оси z) градиент температуры. В середине слоя ($z = 0$) расположена тонкая проницаемая перегородка с конечной продольной теплопроводностью. При механическом равновесии жидкости на границах слоя возникает разность температур 2θ .

Для бесконечных массивов, ограничивающих слой, задача о поведении нормальных возмущений в системе жидкость — массивы может быть сформулирована относительно амплитуды вертикальной компоненты скорости $v(z)$ и амплитуды возмущения температуры $\theta(z)$ в слое жидкости. В отсутствие перегородки краевая задача для нейтральных возмущений, согласно [4], имеет вид

$$v'' - 2k^2 v' + k^4 v = k^2 R \theta, \quad \theta' - k^2 \theta = -v \quad (1.1)$$

$$z = \pm 1: v = v' = 0, \quad \theta' = \mp k^2 \chi_m \theta \quad (1.2)$$

$$R = g\beta\theta h^3 / \nu \chi$$

Здесь R — число Рэлея, k — волновое число, χ_m — отношение теплопроводности граничных массивов к теплопроводности жидкости, g — ускорение свободного падения, β , ν и χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, штрих означает дифференцирование по z . В качестве единиц измерения расстояния, скорости и температуры приняты h , χ/h и θ соответственно.

Влияние тонкой проницаемой перегородки на поведение возмущений скорости и температуры опишем постановкой граничных условий при $z = 0$. Предполагая, что размеры элементов проницаемой перегородки малы по сравнению с размерами конвективных движений, для описания свойств перегородки введем ее осредненные характеристики: продольную теплопроводность χ , нормальное сопротивление α_n и касательное сопротивление α_t .

Для определения температурных условий на перегородке будем считать, что она имеет малую, но конечную толщину $2d$. Распределение возмущений температуры θ_p в перегородке опишем краевой задачей

$$\theta_p'' - k^2 \theta_p = 0, \quad z = \pm d: \theta_p = \theta_{\pm}, \quad \chi_p \theta_p' = \chi_j \theta_{\pm}'$$

где χ_p и χ_j — теплопроводности материала перегородки и жидкости. Решение этой краевой задачи в приближении тонкого слоя позволяет сформулировать граничные условия для температуры жидкости на перегородке

$$z = 0: \theta_+ = \theta_-, \quad \theta_+' - \theta_-' = 2k^2 \chi \theta_+, \quad \chi = \chi_p d / \chi_j \quad (1.3)$$

Здесь и далее знаками плюс и минус отмечены значения функций соответственно сверху и снизу от перегородки.

Граничные условия (1.3) показывают, что при отличной от нуля продольной теплопроводности перегородки κ на ней возникает скачок теплового потока. Даже для тонких перегородок κ может иметь достаточно большие значения при хорошей теплопроводности материала перегородки. Например, для перегородок из меди с относительной полутолщиной $d = 0,01$ продольная теплопроводность $\kappa = 6,61$ для слоя воды и $\kappa = 174$ для слоя воздуха.

При постановке на проницаемой перегородке граничных условий для скорости предположим, что на ней нормальная и касательная компоненты скорости непрерывны, а их величины пропорциональны сумме соответствующих компонент тензора напряжений с разных сторон перегородки. Для амплитуды вертикальной компоненты скорости эти условия имеют вид [2]

$$z = 0: v_+ = v_-, \quad v_+' = v_-'$$

$$v_+''' - v_-''' = -\alpha_n k^2 v_+, \quad v_+'' - v_-'' = \alpha_t v_+ \quad (1.4)$$

За единицу измерения нормального α_n и касательного α_t сопротивлений принято отношение динамической вязкости жидкости к полутолщине слоя.

Решение краевой задачи (1.1) — (1.4) можно разделить на два класса: четные решения $v(-z) = v(z)$ и нечетные $v(-z) = -v(z)$, которые удовлетворяют разным условиям на перегородке. Как показали расчеты, более опасной в исследуемой области параметров задачи является нижняя мода четных возмущений, поэтому только для них и сформулируем граничные условия. Из (1.3), (1.4) запишем величину полускачка нечетных функций на перегородке

$$z = 0: v' = 0, \quad v'' = -0,5\alpha_n k^2 v, \quad \theta' = \kappa k^2 \theta \quad (1.5)$$

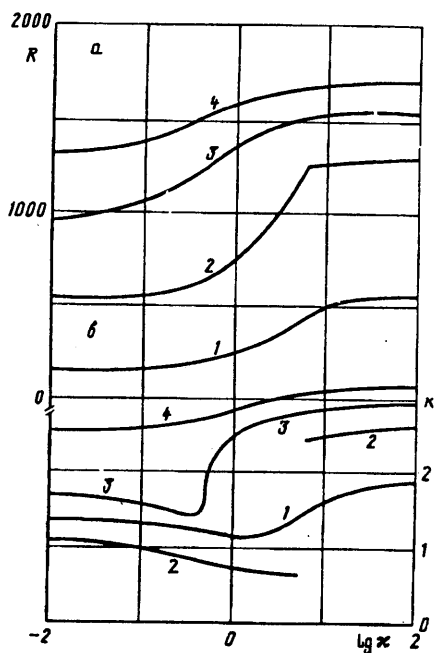
Краевая задача (1.1), (1.2), (1.5) определяет критические числа Рэлея и форму нейтральных возмущений.

Система уравнений (1.1) интегрировалась численно методом Рунге — Кутты. Строились три линейно-независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям при $z = 1$. Линейная комбинация этих решений при $z = 0$ должна удовлетворять граничным условиям (1.5). Из условия разрешимости системы для весовых коэффициентов находились критические числа Рэлея.

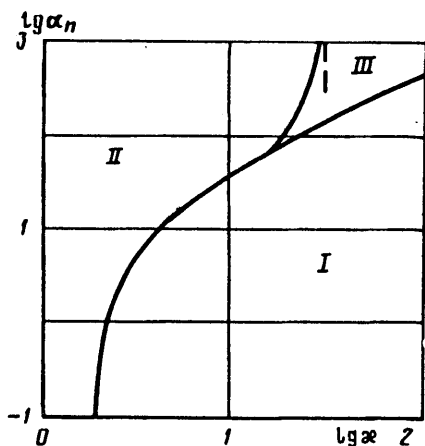
Случай нетеплопроводной перегородки ($\kappa = 0$) для массивов с различными значениями κ_n подробно рассмотрен в [3]. Показано, что при малых сопротивлениях перегородки конвективный вихрь охватывает весь слой, причем, как и в отсутствие перегородки, с увеличением κ_n горизонтальный размер вихря плавно увеличивается. Для перегородки с большим сопротивлением в некотором диапазоне значений κ_n на нейтральной кривой наблюдается два минимума, соответствующие двум разным формам возмущений. Длинноволновая неустойчивость, наблюдаемая при малых κ_n , вызывается циркуляционным движением, охватывающим по высоте весь слой, а коротковолновая — движением с двухэтажной структурой. Характерно, что с ростом κ_n переход к коротковолновой неустойчивости происходит скачком. Существование двух разных форм возмущений сохраняется и при конечной теплопроводности перегородки, влияние которой на устойчивость равновесия будет исследовано для предельных случаев идеально теплопроводных и нетеплопроводных ограничивающих слой массивов.

2. Рассмотрим случай хорошо теплопроводных массивов ($\kappa_n \rightarrow \infty$). На фиг. 1 представлены зависимости минимального критического числа Рэлея и волнового числа наиболее опасных возмущений от продольной теплопроводности перегородки для различных значений ее сопротивления. Кривые 1—4 соответствуют нормальным сопротивлениям $\alpha_n = 10, 100, 300, \infty$. При малых сопротивлениях перегородки (кривая 1) критическое волновое число с ростом теплопроводности перегородки κ от нуля вначале убывает, а затем при $\kappa = 1$ начинает расти. Такой характер изменения волнового числа связан с постепенной перестройкой критического возмущения от одновихревого по высоте слоя при малых κ к двухвихревому при больших κ . Аналогичное изменение формы критических возмущений ранее наблюдалось в [1] при увеличении нормального сопротивления нетеплопроводной перегородки.

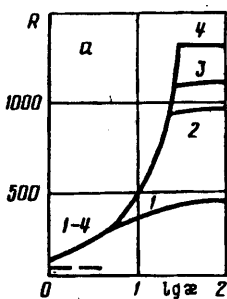
В области средних сопротивлений перегородки ($\alpha_n = 100$) на нейтральной кривой $R(k)$ образуются два минимума. При малых теплопроводностях перегородки более опасной является длинноволновая мода с одновихревой формой движения. С ростом κ соответствующее этой моде критическое число Рэлея быстро увеличивается и при некотором значении $\kappa = \kappa_*$ более опасными становятся коротковолновые возмущения с двухвихревой структурой. Для $\alpha_n = 100$ (кривая 2) смена формы неустойчивости происходит при $\kappa_* = 5,6$. В случае больших сопротивлений перегородки возмущения локализованы в половинках слоя, а волновое число возмущений с ростом κ монотонно увеличивается



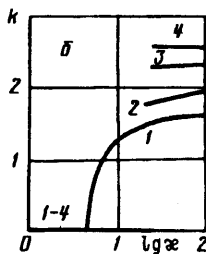
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



(кривая 4). Кривая 3 ($\alpha_n = 300$) иллюстрирует переходную ситуацию, в которой длинноволновая неустойчивость плавно сменяется коротковолновой.

3. Перейдем к случаю нетеплопроводных ограничивающих слоев массов ($\chi_m \rightarrow 0$). При отсутствии перегородки кризис равновесия связан с длинноволновыми возмущениями, волновое число которых равно нулю. Это свойство сохраняется и при малой теплопроводности перегородки χ . Область существования минимума на нейтральной кривой можно определить методом теории возмущений, разлагая амплитуды нормальных возмущений и число Рэлея в ряды по k^2 [5]. Нулевой член в разложении числа Рэлея получается во втором порядке и имеет вид $R_0 = 45(1 + \chi)$.

Коэффициент R_2 при k^2 находится в следующем порядке теории возмущений и равен:

$$R_2 = \frac{225}{128} \alpha_n (1 + \chi) - \frac{5325}{616} \chi (1 + \chi) + \frac{15}{77} (34 + 111\chi)$$

Наибольший интерес представляет знак R_2 . При $R_2 > 0$ нейтральная кривая в точке $k = 0$ имеет минимум со значением числа Рэлея R_0 . При малых χ этот минимум на нейтральной кривой

единственный. При $R_2 < 0$ точка $k = 0$ соответствует максимуму на нейтральной кривой и кризис равновесия связан с возмущениями, у которых $k \neq 0$. На фиг. 2 область параметров α_n и κ , при которых $R_2 < 0$, обозначена I. Однако для выяснения, являются ли вне этой области возмущения с $k = 0$ наиболее опасными, требуется расчет нейтральных кривых на базе полной краевой задачи (1.1), (1.2), (1.5).

Результаты такого исследования представлены на фиг. 3, где показана зависимость критического числа Рэлея и критического волнового числа от продольной теплопроводности перегородки для различных значений ее нормального сопротивления (кривые 1—4: $\alpha_n = 10, 100, 300, \infty$). Для всех α_n с ростом теплопроводности перегородки происходит переход от длинноволновой неустойчивости ($k = 0$) к неустойчивости относительно возмущений с конечным волновым числом. Для $\alpha_n > 54$ этот переход происходит скачком.

Значения параметров α_n и κ , при которых критическое волновое число изменяется скачком, представлены на фиг. 2 кривой, разделяющей области II и III. В области III на нейтральной кривой имеются два минимума, однако более опасным является возмущение с $k \neq 0$. В области II ответственными за неустойчивость являются длинноволновые возмущения и критическое число Рэлея равно R_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Влияние проницаемой перегородки на конвективную неустойчивость горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 157—159.
2. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкости с тонкой проницаемой произвольно расположенной перегородкой // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1981. С. 12—17.
3. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкости с проницаемой перегородкой при произвольной теплопроводности границ // Инж.-физ. журн. 1991. Т. 60. № 3. С. 410—414.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Длинноволновая конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкости с проницаемой теплопроводящей перегородкой // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1991.

Пермь

Поступила в редакцию
5.XII.1991