

УДК 533.95:537.64

© 1993 г. З. Ю. ЗАХАРОВ

## О ВЛИЯНИИ ИОННЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

В [1] изучалась система МГД-уравнений для описания бесстолкновительной анизотропной плазмы, у которой ионная функция распределения отличается от бимаксвелловской. Рассматривались малые возмущения однородного состояния. На основе численного анализа полученного дисперсионного уравнения отмечен факт влияния ионных тепловых потоков на устойчивость однородного состояния плазмы. В настоящей работе, используя предложенный в [2] аналитический метод, в пространстве невозмущенных параметров плазмы найдены области устойчивости однородного состояния относительно малых возмущений.

Рассмотрим распространение линейных волн в безграничном объеме бесстолкновительной анизотропной плазмы, находящейся в сильном магнитном поле. Предполагается, что ионная функция распределения в нулевом приближении по параметру  $\epsilon = R_L L^{-1}$  ( $R_L$  — ионный ларморовский радиус,  $L$  — характерный размер) описывается 8-моментным приближением [3], учитывающим отклонение функции распределения от бимаксвелловской. Система МГД-уравнений для величин нулевого порядка по  $\epsilon$  имеет вид [1—3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{div}[(p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{h}\mathbf{h}] + \nabla p_{\perp} &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) + \frac{B}{\rho} (\mathbf{h}\nabla) \left( \frac{q_{\perp}}{B^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rho^3 \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) + 2B^2 ((\mathbf{h}\nabla) q_{\parallel}) + (q_{\perp} - q_{\parallel}) (\mathbf{h}\nabla) \ln B = 0$$

$$2\rho^4 \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{\parallel} B^3}{\rho^4} \right) + 3B^3 p_{\parallel} (\mathbf{h}\nabla) \left( \frac{p_{\parallel}}{\rho} \right) = 0$$

$$\rho^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{\perp}}{\rho^2} \right) + p_{\parallel} (\mathbf{h}\nabla) \left( \frac{p_{\perp}}{\rho} \right) - \frac{p_{\perp}}{\rho} (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{h}\nabla) \ln B = 0$$

Здесь  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$ ,  $q_{\parallel}$ ,  $q_{\perp}$  — ионные плотность, вектор макроскопической скорости, продольное и поперечное давления, потоки вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$  продольной и поперечной частей энергии хаотического движения;  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ .

В [1, 2] в рамках системы (1) рассматривались малые возмущения однородного состояния плазмы. Представим полученное в [1, 2] дисперсионное уравнение в виде

$$(V^2 - C_A^2) (f(V) - \operatorname{tg}^2 \alpha g(V)) = 0 \quad (2)$$

$$f(V) = \beta_{\parallel}^2 f_1(V) (V^2 - C_A^2) (V^2 - C_1^2), \quad C_A^2 = \frac{1}{\beta_{\parallel}} \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right), \quad C_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$g(V) = \frac{1}{4} \beta_{\perp}^2 \left[ \left( V^2 + 2 \gamma_{\perp} V - \frac{1}{2} \right) \left( V^2 + 2 \gamma_{\parallel} V - \frac{3}{2} \right) + f_1(V) (1 + 4 \theta (V^2 - C_1^2)) \right]$$

$$f_1(V) = V^4 - 3V^2 - 2 \gamma_{\parallel} V + \frac{3}{4}, \quad \theta = \frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}}, \quad \beta_{\perp} = \frac{\beta_{\perp}^{\dagger}}{2(\beta_{\perp} + 1)}$$

$$\beta_{\parallel, \perp} = \frac{8\pi p_{\parallel, \perp 0}}{B_0^2}, \quad \gamma_{\parallel} = (2\rho_0)^{1/2} q_{\parallel 0} p_{\parallel 0}^{-3/2}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{q_{\perp 0} \rho_0^{1/2}}{\sqrt{2} p_{\perp 0}^2 p_{\parallel 0}}, \quad V = \frac{\omega B_0}{B_0 k} \left( \frac{\rho_0}{p_{\parallel 0}} \right)^{1/2}$$

Здесь  $V$  — безразмерная фазовая скорость линейной волны, значение  $C_A$  соответствует безразмерной скорости альфвеновской волны,  $\alpha$  — угол между невозмущенным магнитным полем и волновым вектором  $k$ ,  $\omega$  — частота волны;  $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}, \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  — безразмерные ионные давления  $p_{\parallel}, p_{\perp}$  и потоки  $q_{\parallel}, q_{\perp}$  соответственно, индекс ноль отмечает параметры невозмущенного состояния.

Первый множитель (2) определяет скорость  $V = \pm C_A$  альфвеновской волны, аналогичной по характеру изменения параметров альфвеновской волне анизотропной модели Чу-Голдбергера-Лоу (ЧГЛ) [4]. Решения уравнения

$$f(V) - \operatorname{tg}^2 \alpha g(V) = 0 \quad (3)$$

определяют остальные восемь корней, соответствующих четырем типам линейных волн, названных в зависимости от величины скорости волнами типа  $S$  (медленная),  $Ia, Ib$  (промежуточные типа  $a$  и  $b$ ),  $F$  (быстрая) [1]. В этих типах волн испытывают возмущения все параметры плазмы, кроме компонент векторов  $v$  и  $B$ , ортогональных плоскости, образованной векторами  $k$  и  $B_0$ .

В [1] в результате численного анализа (3) при фиксированных значениях невозмущенных параметров плазмы был отмечен факт влияния потоков  $\gamma_{\parallel}$  и  $\gamma_{\perp}$  на устойчивость однородного состояния. В [2] был предложен аналитический метод, позволяющий получить условия на невозмущенные параметры плазмы, при которых дисперсионное уравнение вида (3) не имеет комплексных корней ни при каких значениях угла  $\alpha$ . Там же предложенный метод был применен к уравнению (3) в частном случае  $\gamma_{\parallel, \perp} > 0$ . В [5] этот метод был с успехом применен при анализе полученного в [6] дисперсионного уравнения пятой степени относительно  $V$ .

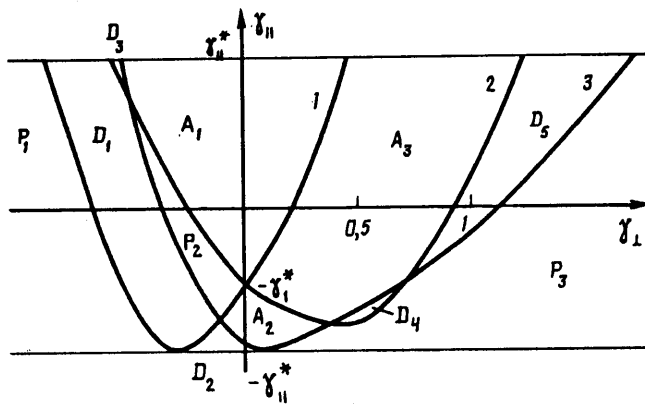
Используя метод из [2], проведем анализ уравнения (3) при произвольных значениях  $\gamma_{\parallel}$  и  $\gamma_{\perp}$ . В пространстве  $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}, \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  найдем области устойчивости, т. е. области значений, при которых уравнение (3) не имеет комплексных корней ни при каких значениях  $\alpha$ . Приведенные в [1] численные результаты не противоречат полученным ниже общим условиям, разделяющим области устойчивости и неустойчивости невозмущенного состояния плазмы. Это косвенно подтверждает правильность численных расчетов [1].

При  $\gamma_{\parallel} = \gamma_{\perp} = 0$  дисперсионное уравнение (3) имеет восемь действительных корней для любого  $\alpha$  при [7]

$$\beta_{\perp} < \beta_{\parallel} < \beta_M \equiv 2 + \beta_{\perp} \quad (4)$$

откуда следует, что в (2) величина  $\theta > 0$  и  $g(0) < 0$ .

Анализ устойчивости однородного состояния при ненулевых значениях  $\gamma_{\parallel}$  и  $\gamma_{\perp}$  будем проводить в предположении, что  $\beta_{\parallel}$  находится в интервале (4). Несмотря на то, что при ненулевых значениях  $\gamma_{\parallel}$  и  $\gamma_{\perp}$  абсолютные величины скоростей волн  $S, Ia, Ib, F$  вдоль направления  $B_0$  и в обратном направлении различны, можно ограничиться изучением только положительных корней (3). Из вида функций  $f(V)$  и  $g(V)$  следует, что случай  $V < 0$  сводится к случаю  $V > \theta$  заменой



Фиг. 1

$\gamma_{\parallel, \perp}$  на  $-\gamma_{\parallel, \perp}$ . Далее, так как при  $\alpha = 0, \pi$  корни (3) совпадают с корнями  $f(V)$ , на плоскости  $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  можно ограничиться изучением полосы  $|\gamma_{\parallel}| \leq \gamma_{\parallel}^* = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ . При  $|\gamma_{\parallel}| > \gamma_{\parallel}^*$  функция  $f(V)$  имеет пару комплексных корней и, следовательно, однородное состояние будет неустойчивым при значениях угла  $\alpha$ , близких к 0 и  $\pi$ .

Для уравнений вида (3) наличие у функции  $g(V)$  комплексных корней является достаточным условием неустойчивости однородного состояния [2]. В [8] был предложен другой метод для изучения дисперсионных уравнений вида (3), однако отсутствие требования о наличии у функции  $g(V)$  только действительных корней может привести к неправильному выводу относительно устойчивости однородного состояния. Для получения необходимых и достаточных условий устойчивости невозмущенного состояния нужно знать взаимное расположение корней функций  $f(V)$  и  $g(V)$  и знаки одной из них в корнях другой.

Обозначим  $C_2 < C_3$  положительные корни функции  $f_1(V)$ . Построим на плоскости  $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  три кривые

$$\gamma_{\parallel} = \sqrt{2} \gamma_{\perp}^2 - \gamma_{\perp} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\gamma_{\parallel} = \frac{V_1^4 - 3V_1^2 + 0,75}{2V_1}, \quad V_1 = -\gamma_{\perp} + \sqrt{\gamma_{\perp}^2 + 0,5} \quad (6)$$

$$\gamma_{\parallel} = \frac{V_2^4 - 3V_2^2 + 0,75}{2V_2}, \quad V_2 = -\gamma_{\perp} + \sqrt{\gamma_{\perp}^2 + 1,5} \quad (7)$$

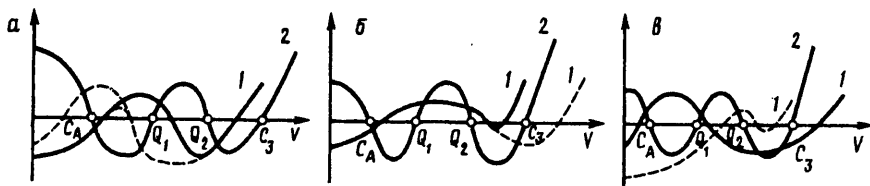
Если значения  $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  таковы, что точка  $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$  лежит на одной из кривых (5)–(7), то функции  $f(V)$  и  $g(V)$  имеют по одному общему корню  $V$ : на (5)  $V = C_1$ , на (6)  $V = V_1$ , на (7)  $V = V_2$ . На фиг. 1 зависимости (5)–(7) соответствуют линии 1, 2, 3. Эти кривые не зависят от  $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}$  и разбивают область  $|\gamma_{\parallel}| \leq \gamma_{\parallel}^*$  на несколько областей, в каждой из которых функция  $g(V)$  имеет постоянный знак в корнях  $C_1, C_2, C_3$  функции  $f(V)$ . Обозначим

$$Q_1 = \min \{C_1, C_2\}, \quad Q_2 = \max \{C_1, C_2\} \quad (Q_1 = C_1, \quad Q_2 = C_2)$$

$$(-\gamma_{\parallel}^* < \gamma_{\parallel} < \gamma_{\parallel}^* \approx -0,35), \quad Q_1 = C_2, \quad Q_2 = C_1 \quad (-\gamma_{\parallel}^* < \gamma_{\parallel} < \gamma_{\parallel}^*)$$

Тогда в областях  $A_{1-3}, P_{1-3}, D_{1-5}$  имеем следующие неравенства:

$$A_{1,2}: \quad g(Q_1) > 0, \quad g(Q_2) < 0, \quad g(C_3) > 0$$



Фиг. 2

$$A_3: g(Q_1) < 0, g(Q_2) < 0, g(C_3) > 0$$

$$P_{1-3}: g(C_1) > 0, g(C_2) > 0, g(C_3) > 0$$

(8)

$$D_1: g(C_1) > 0, g(C_2) > 0, g(C_3) < 0$$

$$D_{2,3}: g(Q_1) > 0, g(Q_2) < 0, g(C_3) < 0$$

$$D_{4,5}: g(Q_1) < 0, g(Q_2) > 0, g(C_3) > 0$$

Используя неравенства (8), можно схематично построить графики функций  $f(V)$  и  $g(V)$  для каждой из указанных областей и определить на плоскости  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  области, в которых уравнение (3) будет иметь четыре действительных положительных корня при любом  $\alpha$ .

Вид областей устойчивости зависит от взаимного расположения корней  $C_A$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  функции  $f(V)$ . В пространстве  $\beta_{||}$ ,  $\beta_{\perp}$ ,  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  можно выделить четыре области

$$I: \frac{1}{2}\beta_M < \beta_{||} < \beta_M, f_1(C_A) > 0$$

$$II: \frac{1}{2}\beta_M < \beta_{||} < \beta_M, f_1(C_A) < 0; \beta_* < \beta_{\perp} < \frac{1}{2}\beta_M, f_1(C_A) > 0$$

$$III: \beta_* < \beta_{\perp} < \frac{1}{2}\beta_M, f_1(C_A) < 0; IV: \beta_* < \beta_{\perp} < \beta_*, f_1(C_A) > 0$$

Здесь значение  $\beta_*$  определяется из условия  $C_A = C_* \approx 1,1$ , где  $C_*$  — двойной положительный корень  $f_1(V)$  при  $\gamma_{||} = -\gamma_{\perp}^*$ .

В этих областях имеем следующие неравенства:

$$I: C_A < Q_1 < Q_2 < C_3, II: Q_1 < C_A < Q_2 < C_3$$

$$III: Q_1 < Q_2 < C_A < C_3, IV: Q_1 < Q_2 < C_3 < C_A$$

На фиг. 2 с учетом неравенств (8) построены графики функций  $f(V)$  и  $\text{tg}^2 \alpha g(V)$  (кривые 2 и 1 соответственно) для области I. На фиг. 2, а представлен график  $\text{tg}^2 \alpha g(V)$  для областей  $A_1$ ,  $A_2$  (сплошная линия) и  $A_3$  (штриховая) в предположении, что функция  $g(V)$  не имеет комплексных корней.

Учитывая, что степень  $f$  выше степени  $g$ , из фиг. 2, а следует, что уравнение (3) имеет четыре положительных корня в областях  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  при  $g(C_A) > 0$ , а также в части  $A_3$ , в которой  $g(C_A) < 0$  и функция  $g(V)$  имеет два действительных корня на отрезке  $[C_A, Q_1]$ . Если же  $g(V)$  не имеет корней на указанном промежутке, то два меньших положительных корня при достаточно больших значениях  $\text{tg}^2 \alpha$  станут комплексными, что приведет к неустойчивости, возникающей в соответствующих этим корням линейных волнах  $S_+$  и  $Ia_+$ . При малых  $\text{tg}^2 \alpha$  график  $\text{tg}^2 \alpha g(V)$  будет прижиматься к оси  $V$  и уравнение (3) будет иметь четыре действительных положительных корня.

Графики  $f(V)$  и  $\text{tg}^2 \alpha g(V)$  для областей  $P_{1-3}$ ,  $D_1$  и  $D_{2-5}$  представлены на фиг. 2, б и в соответственно. Сплошная линия графика  $\text{tg}^2 \alpha g(V)$  соответствует областям  $P_{1-3}$  и  $D_2$ ,  $D_3$ , штриховая — областям  $D_1$  и  $D_4$ ,  $D_5$ . Из фиг. 2 следует, что во

всех этих областях дисперсионное уравнение (3) не будет иметь пары действительных положительных корней при достаточно больших значениях  $\text{tg}^2 \alpha$ . Это приведет к неустойчивости линейных волн типа  $Ia_+$  и  $Ib_+$  (в  $P_{1-3}$ ),  $Ia_+$  и  $F_+$  (в  $D_1$ ),  $Ib_+$  и  $F_+$  (в  $D_{2,3}$ ),  $S_+$  и  $Ia_+$  (в  $D_{4,5}$ ).

Таким образом, при значениях  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  из  $P_{1-3}$ ,  $D_{1,5}$  и значениях давлений  $\beta_{||}$ ,  $\beta_{\perp}$  из I однородное состояние плазмы будет неустойчивым относительно малых возмущений.

Аналогичный анализ построенных с учетом неравенств (8) графиков функций  $f(V)$  и  $g(V)$  для областей II—IV позволяет получить следующие результаты. Для области II область устойчивости та же, что и для I. Область устойчивости для III содержит  $A_1$ ,  $A_2$ , часть  $A_3$ , в которой  $g(V)$  имеет два действительных корня на отрезке  $[Q_1, Q_2]$ ; часть  $P_{1-3}$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ , в которой  $g(C_A) < 0$ , а также та их часть, в которой  $g(C_A) > 0$  и  $g(V)$  имеет два действительных положительных корня на  $[Q_2, C_A]$ . Область устойчивости для IV включает в себя  $A_1$ ,  $A_2$ , часть  $A_3$ , в которой  $g(V)$  имеет два действительных корня на отрезке  $[Q_1, Q_2]$ ; часть областей  $D_{1-3}$ , в которой  $g(C_A) > 0$ , а также та часть  $P_{1-3}$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ , в которой  $g(V)$  имеет два действительных корня на  $[Q_2, C_3]$ .

Таким образом, зная невозмущенные параметры плазмы  $\beta_{||}$ ,  $\beta_{\perp}$ ,  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$ , можно определить, будет ли однородное состояние устойчивым относительно малых возмущений. При небольших значениях  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  (точки  $(\gamma_{||}, \gamma_{\perp})$  и  $(-\gamma_{||}, -\gamma_{\perp})$ ) попадают в область  $A_1$  или  $A_2$  однородное состояние будет устойчивым при всех значениях  $\beta_{||}$  из интервала (4). При значениях  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  из других областей возможна неустойчивость при достаточно больших значениях  $\text{tg}^2 \alpha$  двух или более типов волн. В случае неустойчивости легко определить типы линейных волн, раскачивающих малое возмущение параметров однородного состояния. Физический характер возникающей при ненулевых значениях  $\gamma_{||}$ ,  $\gamma_{\perp}$  неустойчивости волн  $S$ ,  $Ia$ ,  $Ib$ ,  $F$  еще не исследован, но он, несомненно, отличается от шланговой и зеркальной неустойчивости модели ЧГЛ. Данная неустойчивость связана не с одним типом волн (как в модели ЧГЛ), а с парой типов волн, распространяющихся в одном направлении. Наличие ненулевых потоков  $\gamma_{||}$  и  $\gamma_{\perp}$  приводит к возможности увеличения амплитуды малых возмущений в волне типа  $F$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Namikawa T., Hamabata H.* Propagation of hydromagnetic waves through a collisionless heat-conduction plasma//J. Plasma Phys. 1981. V. 26. Pt 1. P. 95—121.
2. *Захаров В. Ю.* Волны малой амплитуды в замагниченной плазме без столкновений//Вопросы магнитной гидродинамики плазмы без столкновений в сильном магнитном поле. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 48—70.
3. *Ораевский В. Н., Коников Ю. В., Хазанов Г. В.* Процессы переноса в анизотропной околоземной плазме. М.: Наука, 1985. 173 с.
4. *Баранов В. Б., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.
5. *Захаров В. Ю.* Об устойчивости бесстолкновительной плазмы, содержащей анизотропные ионы, при наличии электронного теплового потока//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 188—190.
6. *Duhau S.* Hydromagnetic waves for a collisionless plasma in strong magnetic fields//J. Plasma Phys. 1985. V. 34. Pt 1. P. 67—76.
7. *Бархударов М. Р., Захаров В. Ю.* Исследование малых магнитогидродинамических возмущений для плазмы без столкновений//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1987. № 4. С. 82—86.
8. *De La Torre A., Duhau S.* Absolute stability in a collisionless electron-heat-conduction plasma in strong magnetic fields//J. Plasma Phys. 1989. V. 41. Pt 1. P. 107—118.