

УДК 533.6.011.8

© 1993 г. В. С. ГАЛКИН

О ПРИСТЕНОЧНЫХ СКАЧКАХ ТЕМПЕРАТУРЫ, ПАРЦИАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ И ЗАСЕЛЕННОСТЕЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ НЕРАВНОВЕСНЫХ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ

С целью вывода формул для скачков макропараметров многокомпонентной неравновесной смеси газов применен метод Максвелла — Лоялки. Предполагается, что внутри пристеночного кинетического (кнудсеновского) слоя одна группа внутренних состояний молекул близка к равновесию при поступательной температуре, другая группа и гомогенные химические реакции возбуждаются достаточно медленно, так что их можно считать замороженными, пренебрегая соответствующими интегралами неупругих столкновений в кинетических уравнениях. Однако на стенке могут возбуждаться различные группы внутренних состояний молекул и происходить химические реакции. Окончательные расчетные формулы получены при ряде упрощающих предположений в соответствии с рекомендациями [1, 2].

Метод Максвелла — Лоялки вывода граничных условий для уравнений, описывающих течения слаборазреженных газов, применялся во многих работах (см. [1—5] и цитированную там литературу). В частности, он использовался с целью получения формул для скачков температуры t и парциальных давлений [3] p_i (или концентраций [4]) многокомпонентных смесей газов при наличии слабого испарения (конденсации) стенки. Упрощенные формулы для t , p_i в бинарной смеси газов получены в [2]. В [2—4] внутренние степени свободы молекул и химические реакции предполагались замороженными. Вывод граничных условий скольжения и скачков температур для однокомпонентного многоатомного газа приведен в [5], результаты использованы в [1].

Данная работа посвящена применению этого метода к более сложному случаю многокомпонентной смеси неравновесных многоатомных химически реагирующих газов. Граничные условия для течений слаборазреженных газов, включающие пристеночные скачки макропараметров, необходимы, например, для расчетов гиперзвукового обтекания тел на больших высотах полета (см., например, [6, 7], где использованы некоторые результаты более грубого метода Максвелла). На скорость скольжения неупругие процессы, как правило, влияют слабо [1], поэтому ниже она не рассматривается. Гетерогенные процессы предполагаются слабыми, так что задача о кинетическом слое может быть линеаризована [8, 9]. Как и в [1, 2], основная цель статьи — получение простых, но достаточно точных соотношений.

Следует особо подчеркнуть трудность данной проблемы, обусловленную недостаточным знанием закономерностей высокотемпературных неупругих гомогенных и особенно гетерогенных процессов. Поэтому конкретные результаты для практических приложений могут быть получены при большом числе упрощающих предположений. По мере возможности используются обозначения [2].

1. Рассмотрим постановку задачи для кинетического слоя. Линеаризуем функцию распределения f относительно абсолютного максвеллиана $f^{(0)}$

$$f_{\Omega} \approx f_{\Omega}^{(0)} (1 + \varphi_{\Omega}), \quad f_{i\Omega}^{(0)} = X_{0i\Omega} f_i^{(0)}, \quad \Omega = i\alpha\omega \quad (1.1)$$

$$f_i^{(0)} = p_{0i} \left(\frac{m_i}{2\pi} \right)^{3/2} (kT_0)^{-3/2} \exp(-c_i^2), \quad c_i^2 = \frac{m_i v_i^2}{2kT_0}, \quad p_{0i} = n_{0i} kT_0$$

$$X_{\Omega} \equiv \frac{n_{\Omega}}{n_i} = Z_{i\alpha}(T) X_{i\omega}, \quad \sum_{\alpha} Z_{i\alpha}(T) = 1, \quad \sum_{\omega} X_{i\omega} = 1$$

Если, например, α относится к вращениям, а ω — к колебаниям, то считается замедленным вращательно-колебательное взаимодействие.

Индексом ноль снизу обозначены постоянные величины, по которым рассчитывается $f^{(0)}$ (в частности, T — поступательная температура). Латинскими буквами $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ вводятся номера химических компонентов (N — их число), греческими буквами α (или β) и ω (или ψ) — номера внутренних состояний молекул. Например, $n_{i\alpha\omega}$ — плотность числа частиц i в состоянии $\alpha + \omega$. Предполагается, что распределение по α близко к больцмановскому (в первую очередь — вращения молекул), т. е. $Z_{i\alpha}$ — равновесная функция T .

Процессы возбуждения ω -состояний (например, колебаний молекул) и химических реакций предполагаем настолько медленными, что соответствующие интегралы столкновений в кинетических уравнениях могут быть опущены. Эти предположения приближенно выполняются во многих случаях на длинах порядка средней длины свободного пробега l , т. е. меньше или порядка толщины слоя.

Поэтому в кинетическом слое для определенной (1.1) функции φ имеем систему кинетических уравнений

$$f^{(0)}v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = L(\varphi) \quad (1.2)$$

$$L(\varphi_{i\alpha\omega}) = \sum_A \int f_{i\alpha\omega}^{(0)} f_{j\beta\psi}^{(0)} \delta(\varphi) g_{ij} d\sigma_m^A dv_j, \quad m = i\alpha j\beta, \quad n = i\alpha_1 j\beta_1$$

$$\delta(\varphi) = \varphi'_{i\alpha_1\omega} + \varphi'_{j\beta_1\psi} - \varphi_{i\alpha\omega} - \varphi_{j\beta\psi}, \quad A = j\beta\psi\alpha_1\beta_1$$

В (1.2) σ_m^A — сечение перехода $i\alpha\omega + j\beta\psi \rightarrow i\alpha_1\omega + j\beta_1\psi$, которое предполагается не зависящим от ω -состояний [10]; $g_{ij} = v_i - v_j$ — относительная скорость центров масс сталкивающихся молекул; y — координата вдоль внешней нормали к стенке.

Условие на стенке

$$\varphi^+ = R(\varphi^-) \quad (1.3)$$

$$\varphi^+ \equiv \varphi(v_{ix}, v_{iy} > 0; y = 0), \quad \varphi^- \equiv \varphi(v_{ix}, v_{iy} < 0; y = 0)$$

выражает φ^+ для отлетающих от стенки частиц через φ^- для прилетающих к ней; v_{ix} — скорость молекулы, касательная стенке. По определению, в (1.3) $R = 0$ для полностью диффузного распределения скоростей отлетающих частиц, т. е. в этом случае $\varphi^+ = 0$, T_0 равна температуре стенки T_w .

Оператор R описывает различные гетерогенные процессы (рассеяние молекул, химические реакции и т. д.). Однако при постановке задачи более часто задаются не видом оператора R , а феноменологическими выражениями для φ^+ , содержащими эмпирические константы.

Внешнее граничное условие дается рядами по числу Кнудсена $Kn \ll 1$ для функций распределения, переразложенными во внутренних переменных относительно абсолютного максвеллиана. В общем случае неравновесных многоатомных газов такой ряд вычисляется при помощи обобщенного метода Чепмена — Энскога [10]. Для данной задачи имеем

$$f_{i\alpha} \rightarrow f_{i\alpha}^{(0)} \left(1 + \pi_i + \varepsilon_{i\omega} + \Gamma_{i\alpha} t + \frac{m_i}{kT_0} U v_{iy} + \varphi_{i\alpha}^* + \dots \right) \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{i\alpha} = -S_{3/2}^{(1)}(c_i^2) + \frac{1}{kT_0} (E_{i\alpha} - E_i), \quad S_{3/2}^{(1)}(c_i^2) = \frac{5}{2} - c_i^2 \quad (1.5)$$

$$E_i = \sum_{\alpha} E_{i\alpha} Z_{i\alpha}(T_0), \quad \frac{1}{kT_0} (E_{i\alpha} - E_i) = \frac{\partial \ln Z_{i\alpha}(T_0)}{\partial \ln T_0}$$

$$\pi_i = \frac{1}{p_{0i}} (p_i(0) - p_{0i}), \quad t = \frac{1}{T_0} (T(0) - T_0) \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{i\omega} = \frac{1}{X_{0i\omega}} (X_{i\omega}(0) - X_{0i\omega}), \quad \sum_{\omega} \varepsilon_{i\omega} X_{0i\omega} = 0$$

Здесь U — перпендикулярная стенке (нормальная) составляющая среднemasовой скорости, $S_{\frac{1}{2}}^{(0)}(c_i^2)$ — полином Сонина [11], $E_{i\alpha}$ — энергия α -состояний молекулы i -го сорта, E_i — соответствующая средняя внутренняя энергии, π_i — скачок парциального давления, t — скачок поступательной температуры. Величины $\varepsilon_{i\omega}$ будем называть скачками заселенностей.

Как и в [2], макропараметры $T(0)$, $p_i(0)$, $X_{i\omega}(0)$ получаются экстраполяцией соответствующих газодинамических переменных до стенки и используются в качестве граничных значений для уравнений механики сплошных сред. В дальнейшем используются аналогичные [2] способы упрощения обозначений (например, опускаются нули снизу там, где это не вызывает недоразумений).

Первые члены разложения (1.4) представляют собой нулевые по y члены разложения локального максвеллиана относительно абсолютного; члены, пропорциональные y^k , $k \geq 1$, не выписываем.

Величина φ^* получается путем линеаризации возмущения первого порядка обобщенного метода Чепмена — Энского, так что (см. разд. 5 работы [10])

$$\varphi_{i\alpha\omega}^* = \psi_{i\alpha\omega} + B_{i\alpha\omega}(c_i^2), \quad \psi_{i\alpha\omega} = \psi_{i\alpha} - H_{i\alpha}(c_i^2) v_y \nabla \ln X_{i\omega}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.7)$$

В $\psi_{i\alpha\omega}$ входят векторные по v_i члены (тензорные в данной задаче отсутствуют), B — скалярные слагаемые. Последние наиболее трудно поддаются расчету, ибо они определяются интегралами неупругих столкновений для неравновесных внутренних степеней свободы молекул. Однако во многих случаях этими слагаемыми можно пренебречь. Например, для течений в пограничных слоях

$$\psi^* \sim \text{Kn} \frac{\partial}{\partial z} \sim \sqrt{\text{Kn}} \gg B \sim \text{Kn}, \quad z = \frac{y}{L}, \quad \text{Kn} = \frac{l}{L} \ll 1$$

где L — характерная длина.

Ими можно также пренебречь, если гомогенные химические реакции и ω -состояния близки к замороженным. Такие условия выполняются в данной работе, поэтому в дальнейшем слагаемыми B пренебрегаем, в общем же случае они определяют «источниковые» слагаемые формул для скачков, не связанные с градиентами макропараметров.

Входящая в (1.7) величина H удовлетворяет уравнению [10]

$$f_{i\alpha}^{(0)} v_i = \sum_{j\beta\alpha} \int_{\beta} f_{i\alpha}^{(0)} f_{j\beta}^{(0)} (H_{i\alpha} v_i - H_{j\beta} v_j) g_{ij} d\sigma_{ij}^n dv_j \quad (1.8)$$

Формулы для $\psi_{i\alpha}$ имеют тот же структурный вид, что и для смеси одноатомных газов [11], но коэффициенты формул зависят от $E_{j\beta}$ и неупругих α -сечений, а не только от c_i^2 и сечений упругих столкновений

$$\psi_{i\alpha} = -\frac{1}{n} \sum_j D_{i\alpha}^j(c_i^2) v_y d_j - \frac{1}{n} A_{i\alpha}(c_i^2) v_y \nabla \ln T \quad (1.9)$$

Здесь d_j — нормальная компонента диффузионной термодинамической силы [II]. Коэффициенты A , D в (1.9) с учетом определений (1.2), (1.5) удовлетворяют системам уравнений

$$n f_{i\alpha}^{(0)} \Gamma_{i\alpha} v_i = -L^* (A_{i\alpha} v_i), \quad L^* = \sum_{\omega} L \quad (1.10)$$

$$\frac{n^2}{n_i} f_{i\alpha}^{(0)} v_i \left(\delta_{ik} - \frac{\rho_i}{\rho} \right) = -L_* (D_{i\alpha}^k v_i), \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad \rho_i = m_i n_i \quad (1.11)$$

В (1.11) и ниже δ — единичный тензор, ρ — массовая плотность.

В дальнейшем понадобятся выражения для некоторых переносных свойств, определяемых решениями уравнений (1.8), (1.10), (1.11). По определению, нормальная компонента приведенного теплового потока

$$Q = kT \sum_{i\alpha} Z_{i\alpha}(T) \int f_{i\alpha}^{(0)} \psi_{i\alpha} v_y \Gamma_{i\alpha} dv_i = -\lambda \nabla T + nkT \sum_i k_{Ti} V_i \quad (1.12)$$

Далее, нормальные компоненты средних u_χ и диффузионных V_χ скоростей определяются соотношениями

$$u_\chi = U + V_\chi, \quad \chi = \Omega, i, \omega, i$$

$$n_\Omega V_\Omega = (v_y, \psi_\Omega), \quad n_i V_i = \sum_{\alpha\omega} n_\Omega V_\Omega \quad (1.13)$$

$$V_{i\omega} \equiv \frac{1}{n_i X_{i\omega}} \sum_\alpha n_\Omega V_\Omega = V_i - \left(\sum_\alpha H_{i\alpha}^{(0)} Z_{i\alpha}(T) \right) \frac{kT}{m_i} \nabla \ln X_{i\omega}$$

$$V_i = - \sum_j D_{ij} d_j - D_{Ti} \nabla \ln T \quad (1.14)$$

В (1.13) $H_{i\alpha}^{(0)}$ — нулевой член разложения $H_{i\alpha}(c_i^2)$ в ряд по $S_{i\alpha}^2(c_i^2)$, $r \geq 0$.

Здесь и ниже используются следующие скобочные выражения:

$$(F_{i\omega}, \varphi) = \int f_{i\omega}^{(0)} F_{i\omega} \varphi_\Omega dv_i, \quad \{F_{k\alpha}\} = \frac{1}{3n} \sum_\alpha \int f_{k\alpha}^{(0)} v_k^2 F_{k\alpha} dv_k, \quad k = i, j \quad (1.15)$$

С помощью (1.15) входящие в (1.12) — (1.14) коэффициенты записываются в виде, аналогичном [11]

$$D_{ij} = \frac{1}{n_i} \{D_{i\alpha}\}, \quad \lambda' = \sum_i k \{A_{i\alpha} \Gamma_{i\alpha}\}$$

$$D_{Ti} = \frac{1}{n_i} \{A_{i\alpha}\} - \frac{1}{n} \sum_j \{D_{j\alpha} \Gamma_{j\alpha}\} = \sum_j D_{ij} k_{Tj} \quad (1.16)$$

$$\lambda = \lambda' - nk \sum_i k_{Ti} D_{Ti}, \quad \sum_i \rho_i (D_{ij}; D_{Ti}) = 0, \quad \sum_i k_{Ti} = 0$$

Выражения (1.16) рассчитываются по ψ_α .

Вместо (1.9), (1.14) здесь удобнее [2, 3] применять формулы, согласно которым ψ_α и d_i выражаются через V_j , ∇T . Эффективная модификация метода Чепмена — Энскога для вывода ψ_α в такой форме дана в [12].

В отсутствие α -степеней свободы коэффициенты переноса рассчитываются, как в смеси одноатомных газов [11], т. е. по (1.16), (1.15) без индекса α и суммирования по α . При этом [10]

$$u_{i\omega} - u_i = H_{i\alpha}^{(0)} \frac{kT}{m_i} \nabla \ln X_{i\omega}, \quad H_{i\alpha}^{(0)} = \left[\sum_j \frac{x_j kT}{m_j D_{ij}^{(0)}} \right]^{-1} \quad (1.17)$$

Здесь $D_{ij}(1)$ — коэффициент бинарной диффузии в первом приближении по полиномам Сонина [11].

2. Метод Максвелла — Лоялки основан на использовании интегралов системы уравнений (1.2). Первая группа интегралов — следствие законов сохранения. Умножая (1.2) на $m_i v_y$, интегрируя по v_i и суммируя, после интегрирования по y найдем

$$\sum_\Omega (m_i v_y^2, \varphi) = C_1, \quad C_1 = p_0 \sum_i x_{0i} \pi_i, \quad x_i = \frac{n_i}{n} \quad (2.1)$$

Постоянная интегрирования C_1 вычислена путем подстановки в (2.1) выражения (1.4) вместо φ , скачки макропараметров определены в (1.6).

Кроме постоянства потока импульса (2.1) поперек слоя сохраняются потоки

$i\omega$ -частиц и суммарный поток поступательной и внутренней энергии α -х степеней свободы молекул. Эти интегралы, получаемые аналогично (2.1), можно записать в виде

$$\sum_{\alpha\omega} (v_{iy}, \varphi) = n_0 u_i, \quad u_i = \text{const}, \quad U = \text{const}$$

$$\sum_{\Omega} (\Gamma_{i\alpha} v_{iy}^2, \varphi) = \frac{Q}{kT_0}, \quad Q = \text{const} \quad (2.2)$$

$$\sum_{\alpha} (v_{iy}, \varphi) - X_{0i\omega} \sum_{\alpha\omega} (v_{iy}, \varphi) = n_{0i\omega} (u_{i\omega} - u_i), \quad u_{i\omega} = \text{const}$$

В (2.2) использованы формулы (1.5), (1.12), (1.13), (1.15) — (1.17).

Другая группа интегралов находится из (1.2) с привлечением уравнений обобщенного метода Чепмена — Энскога. Учитывая свойства (2.2) и уравнения (1.10), (1.11), аналогично [3] получим

$$\sum_{\Omega} \left(\left[A_{i\alpha} (c_i^2) - \sum_j k_{Tj} D'_{i\alpha} (c_i^2) \right] v_{iy}^2, \varphi \right) = n_0 \frac{\lambda}{k} t$$

$$\sum_{\Omega} \left(\left[D'_{i\alpha} (c_i^2) - \frac{n_0 k}{\lambda} D_{Tj} A_{i\alpha} (c_i^2) \right] v_{iy}^2, \varphi \right) = n_0^2 \sum_j \left(D_{ij} - \frac{n_0 k}{\lambda} D_{Tj} D_{Tj} \right) x_{0j} \tau_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

Более подробно остановимся на выводе соотношений для скачков заселенностей $\varepsilon_{i\omega}$.

Если интегралы неупругих столкновений с ω -обменами не малы, то ψ_c — «концентрационная» часть ψ_{Ω} (без слагаемого с ∇T) — будет иметь вид

$$\psi_c = -\frac{1}{n} \sum_{j\psi} D'_{\Omega}{}^{\psi} (c_i^2) v_{iy} d_{j\psi}, \quad d_{j\psi} = X_{j\psi} d_j + x_j \nabla X_{j\psi}$$

Переход к рассматриваемому здесь случаю осуществляется с помощью равенства

$$D'_{\Omega}{}^{\psi} = D'_{i\alpha} + d'_{i\alpha\omega}{}^{\psi}, \quad d'_{i\alpha\omega}{}^{\psi} = H_{i\alpha} (c_i^2) \frac{\delta_{ij}}{x_i} \left(\frac{\delta_{\omega\psi}}{X_{i\omega}} - 1 \right)$$

Умножая (2.1) на $-d_{\Omega}^{k\gamma} v_i$, интегрируя по v_i , суммируя по Ω , используя самосопряженность оператора L , учитывая определения (1.1), (1.13) и свойства (2.2), найдем

$$-\sum_{\Omega} \int d_{\Omega}^{k\gamma} v_i L(\varphi_{\Omega}) dv_i = -\sum_{\Omega} \int \varphi_{\Omega} L(d_{\Omega}^{k\gamma} v_i) dv_i =$$

$$= -\sum_{\alpha} \int \varphi_{\alpha} \left[\int f_{i\alpha\omega}^{(0)} f_{j\beta\psi}^{(0)} \delta(d^{k\gamma} v) g_{ij} d\sigma_m^n dv_j \right] dv_i =$$

$$= \sum_{\Omega} \int \varphi_{\Omega} \frac{\delta_{ik}}{x_k} \left(\frac{\delta_{\omega\gamma}}{X_{i\omega}} - 1 \right) X_{i\omega} \left[\sum_G \int f_{i\alpha}^{(0)} f_{j\beta}^{(0)} (H_{i\alpha} v_i - H_{i\alpha_1} v_i') g_{ij} d\sigma_m^n dv_j \right] dv_i =$$

$$= \sum_{\Omega} \int \varphi_{\Omega} f_{i\alpha}^{(0)} v_i \frac{\delta_{ik}}{x_k} (\delta_{\omega\gamma} - X_{i\omega}) dv_i = \frac{1}{x_k X_{k\gamma}} \sum_{\alpha} \int (\varphi f^{(0)})_{k\alpha\gamma} v_k dv_k -$$

$$-\frac{1}{x_k} \sum_{\alpha\gamma} \int (\varphi f^{(0)})_{k\alpha\gamma} v_k dv_k = n_0 (u_{k\gamma} - u_k) = \text{const}$$

$$A = \Omega j \beta \psi \alpha_1 \beta_1, \quad G = j \beta \alpha_1 \beta_1$$

В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

по u с постоянными коэффициентами. Определяя постоянные интегрирования при помощи (1.4), при $u=0$ найдем искомое соотношение

$$\sum_{\alpha} \left(H_{i\alpha}(c_i^2) \frac{\delta_{ij}}{x_j} \left(\frac{\delta_{\omega\psi}}{X_{i\omega}} - 1 \right) v_{ij}^2, \varphi \right) = \frac{p_0}{m_j} \left(\sum_{\alpha} Z_{j\alpha}(T_0) H_{j\alpha}^{(0)} \right) \varepsilon_{j\psi},$$

$$j = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

В (2.4) ψ пробегает значения всех квантовых уровней неравновесных внутренних степеней свободы молекул; $H_{j\alpha}^{(0)}$ имеет тот же смысл, что и в (1.13).

Метод Максвелла — Лоялки состоит в подстановке в левые части (2.1) — (2.4) с учетом (1.3) пробной функции

$$\varphi_{\Omega}^{-} = \beta_i + \gamma_{i\omega} + \Gamma_{i\alpha} \tau + \frac{m_i}{kT_0} U v_{ij} + \varphi_{\Omega}^* \quad (2.5)$$

отличающейся от (1.4) неизвестными коэффициентами $\beta_i, \gamma_{i\omega}, \tau$. Подставляя (2.5) в (2.2), находим

$$\beta_i = 1/2 \tau - h_i \mu_i + \frac{2h_i}{n_{oi}} \sum_{\alpha\omega} (v_{ij}, \varphi^*), \quad h_i = \sqrt{\frac{\pi m_i}{2kT_0}} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{i\omega} = h_i (u_i - u_{i\omega}) + \frac{2h_i}{n_{oi} X_{oi\omega}} \sum_{\alpha} [(v_{ij}, \varphi^*) - X_{oi\omega} \sum_{\omega} (v_{ij}, \varphi^*)] \quad (2.7)$$

$$\tau = -\frac{A_v}{\Delta_{-1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2kT_0}} \left[\frac{Q}{2kT_0} + 1/4 \sum_i n_{oi} \mu_i + \sum_{\Omega} (v_{ij}, (\Gamma_{i\alpha} - 1/2), \varphi^*) \right] \quad (2.8)$$

$$A_v^{-1} = 1 + \frac{1}{2k\Delta_{-1/2}} \sum_i n_{oi} c_{vi} m_i^{-1/2}, \quad \Delta_{-1/2} = \sum_i n_{oi} m_i^{-1/2} \quad (2.9)$$

$$c_{vi} = \frac{\partial}{\partial T_0} \sum_{\alpha} Z_{i\alpha}(T_0) E_{i\alpha} = \sum_{\alpha} E_{i\alpha} Z_{i\alpha}(T_0) \frac{E_{i\alpha} - E_i}{kT_0^2}$$

В (2.6) — (2.8) интегралы, включающие φ^+ , определены на полупространстве $v_{ij} > 0$.

3. При известных φ^+ формулы (2.6) — (2.9) дают окончательные соотношения для определения скачков при использовании метода Максвелла (тогда нужно заменить $\beta_i, \gamma_{i\omega}, \tau$ на $\pi_i, \varepsilon_{i\omega}, t$ соответственно).

В простейшем варианте метода Максвелла пренебрегается всеми операторами столкновений L кинетических уравнений (1.2). Тогда в кинетическом слое постоянны потоки всех макровеличин; можно получить, например, скачки колебательных температур. Однако такой подход может приводить к противоречиям и непоследовательностям: два варианта формул для скачка давления (см. разд. I работы [2]), учет внепорядковых членов (например, до конца не проводится линеаризация по Kp формул для скачков [6]). Вместе с тем метод во многих случаях дает приемлемую точность [1, 2, 4].

Метод Максвелла — Лоялки ликвидирует указанные «нестыковки» и значительно уточняет результаты. Для определения скачков этим методом необходимо подставить в (2.1), (2.3), (2.4) пробную функцию (2.5) с коэффициентами, определенными формулами (2.6) — (2.9). Нетрудно выписать получающиеся громоздкие выражения, однако они будут иметь формальный характер ввиду незнания φ^+ и сечений неупругих столкновений. Поэтому упростим задачу, чтобы получить приемлемые для практических расчетов выражения.

Предполагаем [2, 3], что распределение по скоростям улетающих от стенки

молекул является полностью диффузным, т. е. $\varphi^+ = 0$, $T_0 = T_w$, и что вкладом квазиравновесных (α) степеней свободы молекул можно пренебречь. Тогда выражения для π , t будут такими же, что и в задаче об испарении одноатомных газов [3, 4]. Однако в [4] результаты представлены в другой (неудобной) форме: скачки температуры и концентраций выражены через ∇T , ∇x_r .

В [3] результаты упрощены пренебрежением термодиффузии.

С другой стороны, показано [2], что коэффициенты формул для скачков температуры и парциальных давлений могут быть кардинально упрощены, по меньшей мере при относительных разностях масс молекул порядка единицы (при больших разностях масс точность метода Максвелла — Лоялки нуждается в дополнительном анализе [1, 2]). Вывод [2] о возможности упрощений справедлив и для многокомпонентной смеси. Тогда, обобщая упрощенные формулы [2], имеем

$$t = H(1 + l_1) \left(-\frac{Q}{kT} \right) - \nu_2 H(1 + l_2) \sum_{i=1}^N n_i \mu_i \quad (3.1)$$

$$\pi_i = \frac{H}{2}(1 + l_2) \left(-\frac{Q}{kT} \right) - \nu_{16} \sqrt{\frac{\pi}{2kT}} \sum_{k=1}^N \xi_{ik} \mu_k \quad (3.2)$$

$$\xi_{ii} = \left(9 + \frac{32}{\pi} \right) \sqrt{m_i}, \quad \xi_{i \neq k} = \sqrt{m} x_{ik} \quad (3.3)$$

$$H = \frac{\kappa}{4n} \sqrt{\frac{\pi M}{2kT}}, \quad \kappa = (\sqrt{\Delta_1^*} \Delta_{-12}^*)^{-1} \quad (3.4)$$

$$\Delta_n^* = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i^n, \quad M = \sum_{i=1}^N x_i m_i, \quad \mu_i = m_i \left(\sum_{j=1}^N m_j \right)^{-1} \quad (3.5)$$

$$l_1 = 104/25\pi \approx 1,32, \quad l_2 = 16/5\pi \approx 1,02$$

При небольших относительных различиях масс молекул $\kappa \approx 1$ и коэффициенты формул (3.1), (3.2) приобретают тот же вид, что и для простого газа. Приведенный тепловой поток Q дается формулой (1.12), коэффициенты переноса те же, что в смеси одноатомных газов [III].

Теперь, подставляя (2.5), (2.7) в (2.4), окончательно найдем

$$\varepsilon_{i\omega} = h_i l_3 (u_i - u_{i\omega}), \quad l_3 = (\pi + 4)/2\pi \approx 1,14 \quad (3.6)$$

Согласно методу Максвелла (2.7), $l_3 = 1$, т. е. он занижает результат всего на 14%. Величина h_i и разность скоростей определены в (2.6), (1.17) соответственно.

Как и в [2], в коэффициентах формул (3.1), (3.2), (3.6) при Q и средних скоростях, в том числе и в (3.3) — (3.5) для сокращения обозначений с погрешностью $O(Kn^2)$ положено $T(0) = T_w = T$, $n_{0i} = n_i(0) = n_i$ и т. д.

Для простейшего обобщения формул (3.1) — (3.6) на случай влияния квазиравновесных внутренних степеней свободы учтем структуру формул (2.6) — (2.8), даваемых методом Максвелла. В соответствии с этим для учета многоатомности необходимо: умножить правую часть формулы (3.1) для скачка температуры на коэффициент A_w , определенный в (2.9); выразить π_i через t , u_i , исключив в (3.2) величину Q с помощью (3.1), и пользоваться полученным выражением и для одноатомных, и для многоатомных газов. В полученных формулах нужно использовать выражения для коэффициентов переноса (входящие в (3.1), (3.2), (3.6)) для смесей газов с учетом влияния α -степеней свободы молекул.

К сожалению, имеющиеся расчетные данные позволяют проанализировать точность такого правила пересчета лишь для однокомпонентного газа, когда скачки температуры и давления можно записать в виде

$$t = a_1 Q + a_2 U, \pi = b_1 t + b_2 U$$

Предложенное правило с высокой точностью выполняется [1, 13] для коэффициента a_1 (в формуле (6.1) из [1] вместо $(1 + \lambda^2)$ должно быть $(1 + \lambda_c)^2$). Систематический расчет влияния многоатомности на коэффициенты формул для пристеночных скачков в газе при наличии слабого испарения или конденсации проведен в [13] при помощи линеаризованного кинетического уравнения типа Морзе. Согласно [13], при изменении отношения удельных теплоемкостей газа от $5/3$ до $7/5$ и единичных коэффициентах аккомодации преобразование $a \rightarrow A_c$ выполняется с погрешностью около 1 (a_1) и 8% (a_2), постоянство коэффициентов b — с погрешностью около 6 (b_1) и 1% (b_2). Такими погрешностями можно пренебрегать в практических расчетах [1, 2].

Наконец, необходимо выразить p_{oi} , X_{oiw} (см. (1.6)) через заданные величины, аналогично тому, как это делается в случае испарения [2, 3]. Для этого нужно подставить (2.5) в соотношения, описывающие процессы рассеяния, возбуждения и превращений частиц на стенке. Однако соответствующие закономерности известны недостаточно полно, и такие соотношения, как правило, имеют формальное значение. Поэтому при проведении практических расчетов естественно рассматривать простейшие предельные случаи идеально некаталитической и идеально каталитической стенок. В первом случае указанные выражения для p_{oi} , X_{oiw} просто не нужны, так как вместо граничных условий для скачков парциальных давлений и заселенностей ставятся условия $u_{iw} = 0$. Для идеально каталитической стенки p_{oi} (при заданном p) и X_{oiw} являются известными функциями T_w , что замыкает формулы (3.2), (3.6). Если все внутренние степени свободы молекул (но не химические реакции) квазиравновесны при поступательной температуре, то опускаются условия (3.6).

Важно подчеркнуть, что принята выше обычная линейная постановка задачи кинетического слоя не является справедливой для скачков парциальных давлений (и, по-видимому, заселенностей) химических компонентов смеси, «поглощаемых» идеально каталитической стенкой, если их средние скорости не малы по сравнению с соответствующими средними тепловыми скоростями [14]. Однако необходимый анализ практической значимости этого обстоятельства в настоящее время отсутствует.

Автор благодарен Н. К. Макашеву за важные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков И. В., Галкин В. С. Анализ коэффициентов скольжения и температурного скачка в бинарной смеси газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 152—159.
2. Волков И. В., Галкин В. С. Анализ коэффициентов скачков температуры и парциальных давлений бинарной смеси испаряющихся газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 6. С. 150—159.
3. Cipolla J. W., Jr., Lang H., Loyalka S. K. Temperature and partial pressure jumps during evaporation and condensation of a multicomponent gas mixture // Rarefied Gas Dynamics. V. 2. Gottingen, 1974. P. F4—1—F.4—10.
4. Яламов Ю. И., Шукин Е. Р., Алехин Е. И. К вопросу о вычислении скачков температуры и концентраций в многокомпонентной смеси газов / Теплофиз. высоких температур. 1990. Т. 28. № 2. С. 256—262.
5. Кузнецов В. М., Кузнецов М. М. О граничных условиях для течений многоатомных газов // ПМТФ. 1975. № 4. С. 93—102.
6. Scott C. D. Reacting shock layers with slip and catalytic boundary conditions // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 10. P. 1271—1278.
7. Щербак В. Г. Численное исследование структуры неравновесного течения около затупленных тел при гиперзвуковом пространственном обтекании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 143—150.

8. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 3—11.
9. Коган М. Н., Макашев Н. К. О граничных условиях для течений с химическими реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 1. С. 129—138.
10. Kogan M. N., Galkin V. S., Makashev N. K. Generalized Chapman-Enskog method: derivation of the nonequilibrium gasdynamic equations // Rarefied Gas Dynamics. V. 2. Paris, 1979. P. 693—734.
11. Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
12. Галкин В. С., Макашев Н. К. Модификация первого приближения метода Чепмена — Энского для смеси газов // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 178—185.
13. Абрамов А. А., Макашев Н. К. О влиянии возбуждения внутренних степеней свободы молекул на процесс слабого испарения или конденсации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 98—110.
14. Макашев Н. К. Слой Кнудсена на каталитической поверхности // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 1. С. 27—36.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1992