

УДК 532.522.2 : 532.594

© 1993 г. В. Е. ЕПИХИН, В. Я. ШКАДОВ

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО РАСПАДА КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ

В настоящее время процесс нелинейной эволюции свободной поверхности капиллярных струй при гармонических начальных возмущениях подробно исследован. Показано [1—3], что имеется интервал волновых чисел, соответствующих неустойчивым возмущениям, нарастание амплитуды которых вызывает прерывание струи с последующим формированием капель. В этом интервале имеется волновое число, соответствующее наиболее растущему возмущению, вызывающему распад струи за кратчайшее время. В процессе развития волновых движений важную роль играет генерация и последующее взаимодействие кратных мод. В [2] показано, что при  $0,707 < \alpha < 1$  распад однородный, а при  $0 < \alpha < 0,707$  — неоднородный, так как разрушение струи сопровождается формированием капель сателлитов малого размера. В [4] показано, что образование сателлитов может контролироваться воздействием на струю подходящей гармоники, добавленной к основной. Теоретически процесс нелинейной эволюции струи при начальных возмущениях с несколькими несоизмеримыми волновыми числами практически не изучен, лишь в [1] рассмотрено влияние на развитие струи второго возмущения бесконечно малой амплитуды.

Здесь численно решается задача об эволюции поверхности струи до стадии распада на капли при двух начальных волновых возмущениях, причем волновое число одного из них совпадает с волновым числом наиболее растущего по линейной теории возмущения, а значения волнового числа другого варьируются. Исследовано влияние волновых чисел и соотношения амплитуд начальных возмущений на время распада и на проявления неоднородности распада.

Будем следовать схеме расчета, предложенной в [2] на основании выведенной там системы уравнений для локально осредненной по сечению струи скорости  $u(x, t)$  и радиуса свободной поверхности  $r = h(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{We} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Здесь  $r, x$  — цилиндрические координаты, связанные с осью струи,  $t$  — время. В качестве начальных условий принимаем следующие

$$u(x, 0) = 1, \quad h(x, 0) = 1 + \eta_{10} \sin(\alpha_1 x) + \eta_{20} \sin(\alpha_2 x) \quad (3)$$

Таким образом, в начальный момент вносятся регулярные волновые возмущения свободной поверхности струи. Параметрами задачи (1)—(3) являются: число Вебера  $We = \rho u_0^2 R_0 / \sigma$ , волновые числа  $\alpha_1, \alpha_2$ , амплитуды начальных волн  $\eta_{10}, \eta_{20}$ . В выражении числа Вебера  $\rho$  и  $\sigma$  обозначают плотность и поверхностное натяжение жидкости;  $u_0$  — среднemasсовая скорость;  $R_0$  — радиус невозмущенного течения. Ставится задача Коши — решить систему уравнений (1), (2) с начальными условиями (3).

Если число  $We \gg 1$ , то, как установлено в [2], возмущение распространяется со средней скоростью течения, а коэффициент нарастания амплитуды возмущений по  $x$  совпадает в первом приближении с коэффициентом нарастания по времени. Считаем, что между последовательными минимумами свободной поверхности с течением времени может сформироваться капля и что разрыв струи происходит в тот момент  $t_p$ , когда  $h$  обращается в нуль (в расчетах  $h_{\min} \leq 0,1$ ). Сравнение локальных максимумов свободной поверхности позволяет судить о неоднородности распада струи.

Сделаем замену переменных

$$\tau = \alpha_1 We^{-1/2} t, \quad v = We^{1/2} u, \quad \xi = \alpha_1 x, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

С помощью обозначения  $f(\xi, \tau) = h^{-1}(\xi, \tau)$  преобразуем нелинейности к произведениям искомых величин. Задача (1)–(3) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( f - \alpha_1^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + v \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + f^2 \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0 \quad (6)$$

$$v(\xi, 0) = We^{1/2}, \quad h(\xi, 0) = 1 + \eta_{10} \sin \xi + \eta_{20} \sin(\alpha_0 \xi), \quad f(\xi, 0) = 1 \quad (7)$$

Уравнение (6) используется для вычисления функции  $f(\xi, \tau)$ . Для определения волновых решений системы уравнений (4)–(5) используется разложение в обобщенный ряд Фурье. Численное решение ищется в виде отрезка ряда по комбинациям волн, описывающих начальные возмущения свободной поверхности

$$2q(\xi, \tau) = \sum_{|k| \leq N, |l| \leq N} q_{k,l}'(\tau) \exp[(k + \alpha_0 l) i \xi], \quad i = \sqrt{-1} \quad (8)$$

Здесь  $q(\xi, \tau)$  обозначает одну из искомых функций  $v(\xi, \tau)$ ,  $h(\xi, \tau)$ ;  $N$  — количество пространственных гармоник, учитываемых в разложении;  $q_{k,l}'(\tau)$  — комплексные коэффициенты разложения, являющиеся функциями времени, причем  $q_{-k,-l}'(\tau) = q_{k,l}'^*(\tau)$  — комплексно-сопряженные величины. Разложение (8) удобно представить в виде отрезка ряда

$$2q(\xi, \tau) = 2q_M(\tau) + \sum_{m=1, m \neq M}^L q_m(\tau) Z_{N,m}(\xi) \quad (9)$$

Функции  $Z_{N,n}(\xi)$  с учетом разложения (8)

$$Z_{N,n}(\xi) = \exp[i\xi \omega_{N,n}(\alpha_0)]$$

$$\omega_{N,n}(\alpha_0) = \pi_N(n) - N - \alpha_0 [N + (2N + 1) \pi_N(n) - (n - 1)] \quad (10)$$

$$\pi_N(n) = \left\{ \frac{n-1}{2N+1} \right\}, \quad L = (2N+1)^2, \quad M = 2^{-1}(L+1)$$

Здесь фигурные скобки обозначают целую часть числа. Из формулы (10) вытекают следующие:

$$Z_{N,m}(\xi) Z_{N,m}^*(\xi) = 1, \quad Z_{N,L+1-m}(\xi) = Z_{N,m}(\xi) \quad (11)$$

$$q_{L+1-m}^*(\tau) = q_m(\tau)$$

Для дальнейшего удобно представить разложение (9) в виде суммы

$$2q(\xi, \tau) = 2q_M(\tau) + Q(\xi, \tau) + Q^*(\xi, \tau) \quad (12)$$

$$Q(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^{M-1} q_m(\tau) Z_{N,m}(\xi), \quad Q^*(\xi, \tau) = \sum_{m=M+1}^L q_m(\tau) Z_{N,m}(\xi)$$

Нелинейные члены системы (4)—(6) с учетом формулы (12) представим в виде произведения

$$2q \cdot 2r = 4q_M r_M + 2q_M (R + R^*) + 2r_M (Q + Q^*) + (Q + Q^*) R + (Q^* + Q) R^* \quad (13)$$

Четвертое и пятое слагаемые в формуле (13) — комплексно-сопряженные величины. Произведение

$$(Q + Q^*) R = \sum_{n=1, n \neq M}^L q_n(\tau) Z_{N,n}(\xi) \sum_{m=1}^{M-1} r_m(\tau) Z_{N,m}(\xi)$$

так что равенство (13) можно представить в виде

$$2q2r = 4q_M r_M + \sum_{m=1}^{M-1} (q_m^* r_m + q_m r_m^*) + 2q_M \sum_{n=1, n \neq M}^L r_n Z_{N,n}(\xi) + 2r_M \sum_{n=1, n \neq M}^L q_n Z_{N,n}(\xi) + \sum_{n=1, n \neq M}^L [s_n Z_{N,n}(\xi) + s_n^* Z_{N,n}(\xi)] \quad (14)$$

Коэффициенты  $s_n(\tau)$  вычисляются с учетом разложения (9) с помощью целочисленной матрицы  $\Pi_N = \|\Pi_{kl}\|$ , на пересечении  $k$ -й строки и  $l$ -го столбца которой находится номер  $n$  функции из набора  $\{Z_{N,n}(\xi)\}_{n=\overline{1, L}}$ , соответствующего произведению  $Z_{N,k}(\xi) Z_{N,l}(\xi)$  ( $k = \overline{1, M}$ ;  $l = \overline{1, L}$ ). Если какое-нибудь из этих произведений не соответствует ни одной функции  $Z_{N,n}(\xi)$ , то элемент  $\Pi_{kl} = 0$  по определению. Формула для вычисления коэффициентов  $s_n(\tau)$  в разложении (14) имеет вид

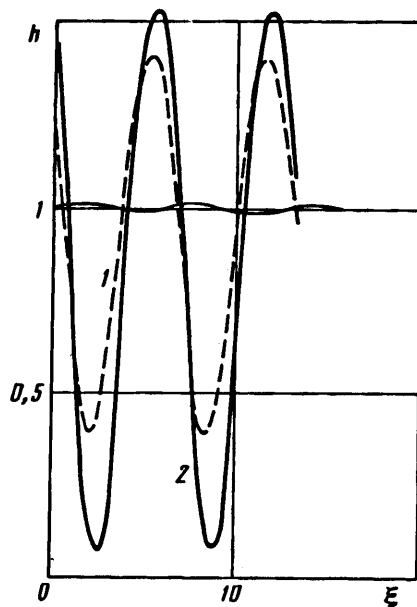
$$s_n(\tau) = \sum_{\{k=\overline{1, M-1}; l=\overline{1, L}(l \neq M)\}: \Pi_{kl}=n} r_k q_l, \quad n = \overline{1, L}, \quad n \neq M \quad (15)$$

Согласно формуле (15), коэффициент  $s_n(\tau)$  равен сумме попарных произведений тех коэффициентов  $r_k$  и  $q_l$ , номера  $k$  и  $l$  которых в разложении (9) соответствуют элементу таблицы  $\Pi_{kl} = n$ .

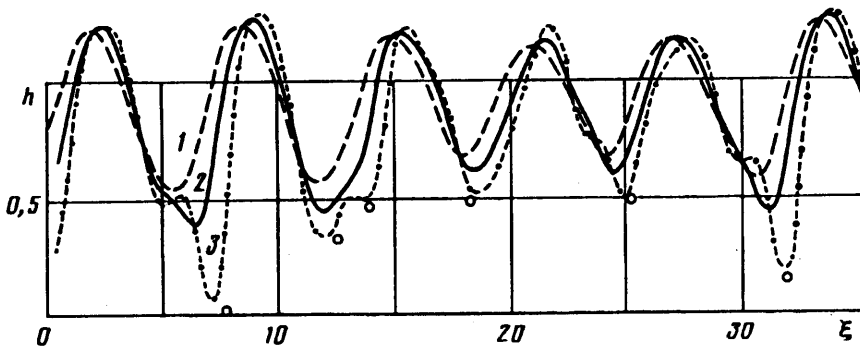
После объединения коэффициентов разложения линейных и нелинейных членов в системе уравнений (4)—(6), соответствующих одной и той же функции  $Z_{N,m}(\xi)$ , получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления комплексных амплитуд  $q_m(\tau)$ , которая интегрируется численно с учетом начальных условий (7). Значения искомых функций  $v(\xi, \tau)$ ,  $h(\xi, \tau)$  восстанавливаются с помощью формулы (9), преобразованной к виду

$$q(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} [q_m(\tau) Z_{N,m}(\xi)]$$

Численное решение задачи (4)—(7) для некоторых частных случаев проводилось при  $N = 2$ . С целью проверки алгоритма результаты решения сравнивались с данными [2]. На фиг. 1 показана форма свободной поверхности струи в различные моменты в случае одного возмущения  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,707$ . Кривые 1, 2 соответствуют значениям  $\eta_{10} = \eta_{20} = 0,005$  (четыре кратные гармоники в разло-



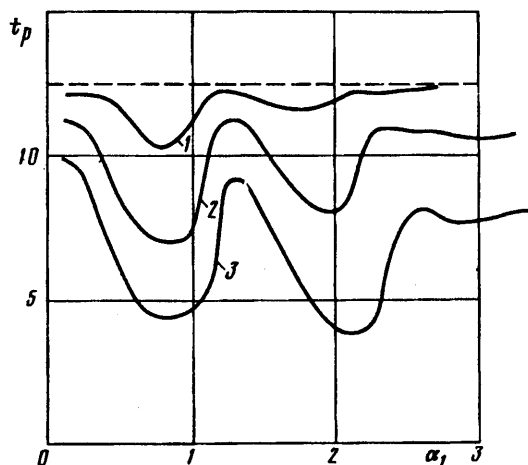
Фиг. 1



Фиг. 2

жении (8)); кривой 1 соответствует  $\tau = 9$ ; 2 —  $\tau = \tau_p = 9,413$ . Форма свободной поверхности при  $\eta_{10} = 0, \eta_{20} = 0,01$  (две кратные гармоники в разложении (8)) в соответствующие моменты времени близка к предыдущим. Периодическая форма свободной поверхности струи в момент  $\tau_p$  свидетельствует об однородном распаде, что согласуется с выводами [2]. На фиг. 2 показаны формы свободной поверхности струи в последовательные моменты времени для типичного варианта с двумя возмущающими модами:  $\alpha_1 = 0,9, \eta_{10} = 0,05; \alpha_2 = 0,707, \eta_{20} = 0,01$ . Кривым 1—3 соответствуют  $\tau = 5,8; 6,2; 6,5$ . Кружки показывают положение минимумов свободной поверхности в момент распада  $\tau = \tau_p = 6,54$ .

Внесение дополнительного возмущения вызывает образование нерегулярностей на свободной поверхности, что может привести к формированию капель различного диаметра. На фиг. 3 показана зависимость времени распада  $t_p$ , соответствующего моменту прерывания решения, при фиксированных значениях волнового числа и амплитуды для одной возбуждающей моды ( $\alpha_2 = 0,707, \eta_{20} = 0,01$ ) и при различных значениях этих параметров для другой. Кривым 1—3 соответствуют  $\eta_{10} = 0,01; 0,05; 0,1$ ; штриховая линия — 0. Видно, что время распада и вид



Фиг. 3

свободной поверхности в момент прерывания решения зависят от волновых чисел и амплитуд возмущающих мод. Внесение возмущений конечной амплитуды всегда уменьшает время распада, т. е. дополнительно дестабилизирует течение. Кроме того, возмущения с волновыми числами, не кратными наиболее растущему по линейной теории, не оказывают существенного влияния на распад, если их амплитуда  $\eta_{10} \leq 0,01$ , а при  $\eta_{10} \geq 0,05$  внесенное возмущение существенно сокращает время распада. В том случае, когда начальные амплитуды длинноволновых возмущений малы, например  $\eta_{10} = \eta_{20} = 10^{-3}$ , быстрее всего нарастают комбинационные моды, близкие к оптимальной по линейной теории.

Для организации распада капиллярных струй двумя возмущениями с одной преимущественной модой в эксперименте, необходимо уменьшать амплитуды комбинационных мод. В таблице представлены некоторые результаты расчетов спектрального состава функции  $h(\xi, \tau)$  в зависимости от волновых чисел и амплитуд начальных возмущений: четыре главные комбинационные моды свободной поверхности струи в момент прерывания решения  $t_p$ , расположенные в порядке убывания модулей соответствующих комплексных амплитуд, удовлетворяющих условию  $|h_m(t_p)| \geq 0,05$ . Анализ таблицы показывает, что однородный распад капиллярных струй реализуется при внесении дополнительного длинноволнового возмущения (вариант 1), или неустойчивого возмущения с амплитудой, превышающей амплитуду наиболее неустойчивого по линейной теории возмущения не менее чем в 10 раз (вариант 2), или возмущения с кратным волновым числом (вариант 3).

Численные эксперименты показывают, что для повышения интенсивности

Номер варианта	Волновые числа возмущений		Амплитуды начальных возмущений		Главные комбинационные моды, модули комплексных амплитуд			
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\eta_{10}$	$\eta_{20}$	1	2	3	4
1	0,2	0,707	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$\alpha_2$ 0,61	$2\alpha_1$ 0,07	$\alpha_1$ 0,06	$2\alpha_2$ 0,05
2	0,5	0,707	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$\alpha_1$ 0,33	$\alpha_2$ 0,07	—	—
3	1,4	0,707	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$\alpha_2$ 0,61	$\alpha_1$ 0,04	—	—

Примечание. Прочерк обозначает комбинационные моды, у которых  $|h_m(t_p)| < 0,05$ ;  $We = 1$ .

распада могут быть использованы две возбуждающие моды, при этом распад струи может быть как однородным, так и неоднородным в зависимости от соотношения их частот и амплитуд.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкадов В. Я. Некоторые вопросы теории гидродинамической устойчивости//Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 5—32.
2. Маркова М. П., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 30—37.
3. Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе//Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах: Матер. 20-го Сиб. теплотехн. семинара, 1976. Новосибирск, 1977. С. 172—180.
4. Chaudhary K. C., Redekopp L. G. The nonlinear capillary instability of liquid jet. Pt 1. Theory// J. Fluid Mech. 1980. V. 96. № 2. P. 257—274.

Москва

Поступила в редакцию  
21.II.1992