

УДК 533.6.011.34:533.69.01

© 1993 г. С. В. ЛЯПУНОВ

НЕПЛОСКИЕ КРЫЛЬЯ МИНИМАЛЬНОГО ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Для описания обтекания крыла большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости в основном используется модель несущей линии, в которой крыло заменяется присоединенным вихрем и вихревой пеленой за ним. В случае плоского крыла, когда присоединенный вихрь является прямолинейным отрезком, минимум индуктивного сопротивления реализуется при эллиптическом распределении циркуляции (нагрузки) вдоль присоединенного вихря [1]. При заданном размахе и подъемной силе индуктивное сопротивление неплоских крыльев, для которых присоединенный вихрь отличен от отрезка прямой, может быть меньше, чем сопротивление плоского крыла. Однако вопрос об оптимальной форме присоединенного вихря оставался открытым.

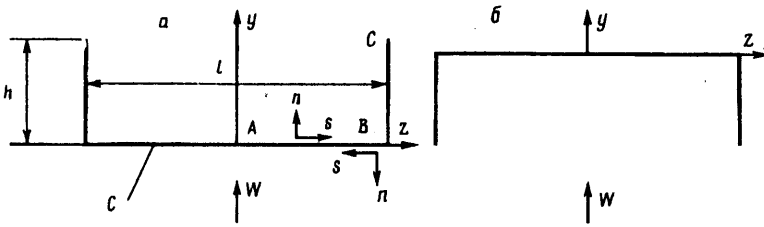
В настоящей работе путем прямого варьирования функционала индуктивного сопротивления получены условия оптимальности формы присоединенного вихря. Рассмотрены задачи минимизации индуктивного сопротивления при заданных подъемной силе и размахе крыла, а также заданных величине прогиба присоединенного вихря (габаритном ограничении по вертикали) и длине присоединенного вихря. Получены соответствующие оптимальные формы, оптимальные распределения циркуляции вдоль присоединенного вихря и рассчитаны значения индуктивного сопротивления для таких конфигураций. Наконец, показано, что при отсутствии ограничения на размах крыла и заданной длине присоединенного вихря и подъемной силе минимум индуктивного сопротивления реализуется для плоского крыла с эллиптическим распределением циркуляции.

1. Первая вариация функционала индуктивного сопротивления. Пусть прямое крыло большого удлинения обтекается потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В рамках модели несущей линии крыло заменяется присоединенным вихрем, лежащим на его поверхности, и вихревой пеленой, отходящей от присоединенного крыла и сносящейся вниз по потоку. Сворачиванием этой пелены в дальнейшем пренебрегается и считается, что она параллельна набегающему потоку. В бесконечно удаленной от крыла вниз по потоку плоскости (плоскости Треффтца) потенциал возмущенной скорости φ терпит разрыв на линии пересечения вихревой пелены с этой плоскостью (линии C , фиг. 1) и стремится к нулю при удалении от этой линии. Форма линии C повторяет форму присоединенного вихря и соответствует форме крыла. В частности, плоскому крылу соответствует линия C в виде прямолинейного отрезка. Индуктивное сопротивление X , действующее на крыло, определяется соотношением

$$X = \frac{\rho}{2} \iint (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dy dz = -\frac{\rho}{2} \oint_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (1.1)$$

где ρ — плотность, n — внешняя к C нормаль, s — длина дуги вдоль C . В соответствии с формулой Жуковского применительно к сечениям крыла его подъемная сила Y может быть записана в виде

$$Y = \rho \int_{c^*} V_x \Gamma c_2 ds$$



Фиг. 1

Здесь и далее C^* — линия присоединенного вихря, c_1 и c_2 — направляющие косинусы нормали к C^* (к C), $\Gamma(s)$ — циркуляция присоединенного вихря, V_x — составляющая скорости в направлении набегающего потока, совпадающего с осью X . В дальнейшем, если линейный интеграл не контурный, считается, что он берется по верхней стороне линии. В случае плоского крыла $V_x = V = \text{const}$, где V — скорость набегающего потока. В случае неплоского крыла $V_x \neq \text{const}$. Анализ дополнительных по сравнению со случаем плоского крыла слагаемых проведен в [2]. Поскольку эти дополнительные слагаемые дают поправки к величине подъемной силы второго порядка относительно интенсивности присоединенного вихря, то в дальнейшем этим пренебрегается и считается, что $V_x = V = \text{const}$. Тогда с учетом того, что $\Gamma(s) = \varphi_+ - \varphi_-$, выражение для подъемной силы может быть записано в виде

$$Y = \rho V \oint_c \varphi_{c_2} ds \quad (1.2)$$

Здесь и далее индексы плюс и минус означают величины на верхней и нижней сторонах линии C^* или C .

При заданной подъемной силе и форме присоединенного вихря индуктивное сопротивление зависит от распределения циркуляции Γ по размаху крыла. Путем варьирования (1.1) при условии $Y = \text{const}$ нетрудно показать, что условием минимума сопротивления будет [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\lambda c_2 \text{ на } C \quad (1.3)$$

Здесь λ — константа, пропорциональная величине подъемной силы. В случае плоского крыла $c_2 = 1$ и условие оптимальности представляет собой условие постоянства вертикального схода потока на вихревой пелене в плоскости Треффца, что достигается при эллиптическом распределении циркуляции.

Изменение знака λ приводит к изменению знака φ и знака подъемной силы Y , а величина сопротивления остается неизменной. В связи с этим формы присоединенного вихря, симметричные относительно оси Z , при оптимальном (одинаковом) распределении циркуляции и одинаковой подъемной силе дают одинаковое индуктивное сопротивление. Однако, как отмечено в [2], влияющие продольной индуктивной скорости на подъемную силу, которым, как указано выше, пренебрегается в данной работе, приводит к тому, что при одинаковом распределении циркуляции форма присоединенного вихря с отрицательной вогнутостью (поднятыми вверх концами) дает большую подъемную силу, чем форма, симметричная ей относительно оси Z , при одинаковом индуктивном сопротивлении, для оптимальных конфигураций, рассмотренных ниже.

При оптимальном распределении циркуляции, удовлетворяющем условию (1.3), индуктивное сопротивление в соответствии с (1.1) равно

$$X = \lambda Y / (2V) \quad (1.4)$$

Нетрудно видеть, что $X \sim Y^2$, или

$$X = k \frac{Y^2}{\pi l^2 \rho V^2} \quad (1.5)$$

где l — размах крыла. Величина k равна отношению сопротивления крыла и сопротивления плоского крыла с эллиптическим распределением циркуляции при заданных подъемной силе и размахе крыла. Для неплоских крыльев величина k может быть меньше единицы и, более того, она монотонно уменьшается при увеличении длины присоединенного вихря. Расчеты этой величины для различных неплоских крыльев приведены в [2—7].

Из (1.4) и (1.5) имеем $k = \rho \pi l^2 \lambda / 8X$ и задача минимизации величины k может быть сформулирована как задача максимизации сопротивления X при заданных значениях l и λ . Без ограничения общности в дальнейшем считается $\lambda = 1$.

Выражение для первой вариации сопротивления X имеет вид

$$\delta X = 2 \iint (\nabla \varphi \nabla \delta \varphi) dy dz - \oint_C (\nabla \varphi)^2 \delta n ds \quad (1.6)$$

Здесь $\delta n(s) = \varepsilon f(s)$ — смещение кривой C вдоль внешней нормали к ней (ε — бесконечно малый параметр) и эта величина представляет собой независимую вариацию. Величина $\delta \varphi$ является линейной по ε частью изменения потенциала в данной точке, зависящей от $\delta n(s)$. Преобразование (1.6) с помощью формулы Грина и с учетом того, что φ — гармоническая функция, стремящаяся к нулю в бесконечности, дает

$$\delta X = -2 \oint_C \varphi \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n} ds - \oint_C (\nabla \varphi)^2 \delta n ds \quad (1.7)$$

Потенциал φ удовлетворяет условию (1.3). Варьирование этого условия при $\lambda = 1$ позволяет записать

$$\delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{d \delta n}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \delta n = -\delta c_2 = -c_1 \frac{d \delta n}{ds} \quad (1.8)$$

Методика варьирования граничного условия Неймана и направляющих косинусов нормали подробно рассмотрена в [8] (см. также [9]). Подстановка (1.8) в (1.7) и интегрирование по частям дают

$$\delta X = \oint_C \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} c_1 - c_2^2 \right] \delta n ds \quad (1.9)$$

При этом использованы краевое условие (1.3), соотношение $dc_1/ds = \kappa c_2$ и уравнение Лапласа в системе координат (s, n)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

Здесь κ — кривизна C , которая считается положительной для выпуклой кривой.

Полученный результат становится более наглядным, если ввести функцию $\varphi^\circ = \varphi + u$. Легко видеть, что эта функция представляет собой потенциал плоского течения около кривой C со скоростью набегающего потока $W = 1$, направленной по оси Y , удовлетворяющий, в частности, условию непротекания $\partial \varphi^\circ / \partial n = 0$ на кривой C , и для получения оптимального распределения циркуляции при заданной форме кривой C необходимо решить сформулированную задачу обтекания данной кривой потенциальным потоком. Выражение (1.9) при этом принимает вид

$$\delta X = \oint_C \left[\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)^2 - 1 \right] \delta n ds = \oint_C \left[\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_+^2 - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_-^2 \right] \delta n ds \quad (1.10)$$

поскольку при варьировании площадь внутри кривой C остается нулевой и

$$\oint_C \delta n ds = 0$$

Последний интеграл в (1.10) берется по верхней стороне линии C .

2. Условия оптимальности. Оптимальные решения. Задача минимизации величины k требует наложения каких-либо геометрических ограничений, так как эта величина монотонно убывает при увеличении длины присоединенного вихря. Ниже рассмотрены оптимальные решения, минимизирующие величину k при оптимальном распределении циркуляции, для двух случаев: а) задана величина h вогнутости крыла или линии C в плоскости Треффца — ограничение габарита по вертикали (задача 1) и б) задана общая длина L присоединенного вихря (задача 2). В обоих случаях задан также размах присоединенного вихря l .

Ниже показано, что решением задачи 1 является плоское крыло с вертикальными концевыми пластинками высотой h независимо от того, направлены эти пластинки вверх или вниз, т. е. присоединенный вихрь имеет форму, показанную на фиг. 1, а, б.

Обтекание конфигураций, представленных на фиг. 1 а, б, потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, параллельным оси Y , может быть легко рассчитано, например, с помощью преобразования Кристоффеля — Шварца или метода особенностей. Проведенные расчеты показали, что значения скорости $|\partial \varphi^\circ / \partial s|$ на выпуклой стороне превышают значения скорости на вогнутой стороне кривой C . Если рассмотреть конфигурацию, приведенную на фиг. 1, а, то на участке AB вследствие габаритного ограничения по высоте допустимы только вариации с $\delta n(s) > 0$, так же как и на участке BC вследствие ограничения по размаху. Поскольку

$$\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s}\right)_+^2 - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s}\right)_-^2 \leq 0$$

то в соответствии с (1.10) такие вариации приводят к уменьшению сопротивления и к увеличению величины k , что и доказывает экстремальные свойства данной конфигурации. Форма, приведенная на фиг. 1, б, также оптимальна вследствие сформулированного в разд. 1 замечания о формах, симметричных относительно оси Z .

Далее рассмотрена задача 2 с заданной длиной присоединенного вихря. Фиксирование длины вихря представляет собой наложение изопериметрического ограничения вида

$$I = \int_C ds - L = 0, \quad \delta I = \int_C \kappa \delta n ds$$

В соответствии с общей методикой вариационного исчисления это ограничение может быть учтено путем добавления его к варьируемому функционалу с постоянным множителем Лагранжа μ и варьирования полученного нового функционала $X^\circ = X + \mu I$.

Условие стационарности этого функционала имеет вид

$$\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s}\right)_+^2 - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s}\right)_-^2 + \mu \kappa = 0 \quad (2.1)$$

В дальнейшем удобно воспользоваться представлением течения около кривой C с помощью метода вихревого слоя, вводя на линии C слой вихревых особенностей с интенсивностью $\gamma(s)$, который обеспечивает разрыв тангенциальной скорости. Потенциал φ° может быть записан в виде

$$\varphi^\circ(z, y) = y + \int_C \frac{\gamma(s)}{2\pi} \arctg \frac{y - \eta}{z - \zeta} ds,$$

$$\gamma(s) = - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_-$$

где $\zeta(s)$ и $\eta(s)$ — координаты z и y на кривой C . Величина $\gamma(s)$ находится из интегрального уравнения, представляющего собой условие непротекания

$$\int_C \frac{\gamma(s) c_2(z, y) (z - \zeta) - c_1(z, y) (y - \eta)}{R^2} ds = -c_2(z, y) \quad (2.2)$$

$$R^2 = (z - \zeta)^2 + (y - \eta)^2$$

Решение этого уравнения позволяет определить оптимальное распределение циркуляции при заданной форме кривой C . Поскольку $\gamma(s) = -d\Gamma/ds$, то сопротивление с учетом обращения в ноль величины Γ на концах C может быть записано в виде

$$X = \frac{\rho}{2} \int_C \gamma \zeta ds, \quad k = \frac{\pi l^2}{4} \left(\int_C \gamma \zeta ds \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Нетрудно получить также, что средняя величина скорости на вихревом слое равна

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_- \right] = \\ &= -c_1(z, y) - \int_C \frac{\gamma(s) c_1(z, y) (z - \zeta) + c_2(z, y) (y - \eta)}{R^2} ds = \\ &= -\frac{1}{c_2(z, y)} \int_C \frac{\gamma(s) y - \eta}{2\pi R^2} ds \end{aligned}$$

В последнем преобразовании использовано условие (2.2). Отсюда

$$\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_+^2 - \left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right)_-^2 = -2 \left\langle \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial s} \right\rangle \gamma(z, y) = 2 \frac{\gamma(z, y)}{c_2(z, y)} \int_C \frac{\gamma(s) y - \eta}{2\pi R^2} ds$$

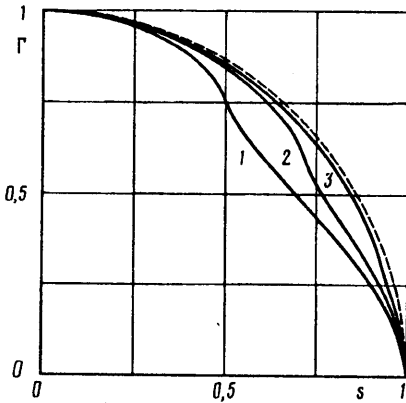
С учетом того, что $c_2 \kappa = \partial^2 y / \partial s^2$, условие стационарности (2.1) принимает вид

$$\gamma(z, y) \int_C \frac{\gamma(s) y - \eta}{2\pi R^2} ds = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \quad (2.4)$$

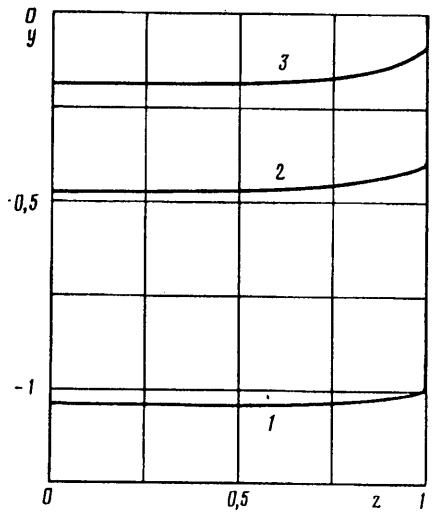
Для определения оптимальной формы кривой C в задаче 2 требуется найти нетривиальные (отличные от постоянной) решения этого нелинейного интегрального уравнения при условиях $y(\pm L/2) = 0$ и при условии, что $\gamma(s)$ является решением уравнения (2.2). Найденная форма кривой C обеспечивает стационарное значение сопротивления, и проведенные расчеты показали, что это стационарное значение является максимумом.

Задача решения уравнения (2.4) представляет собой нелинейную задачу на нахождение собственных значений μ . Она решалась численно путем дискретизации кривой C с помощью прямолинейных отрезков и вычисления интегралов по методу прямоугольников. Уравнение (2.2) записывалось для точек коллокации, совпадающих с концами отрезков, после чего определялись интенсивности вихревых особенностей. Уравнение (2.4) также записывалось для этих точек с использованием полученного решения уравнения (2.2). Знаменатель подынтегрального выражения вычислялся в соответствии с формой линии C , полученной на предыдущей итерации. При этом получалась линейная задача на определение собственных значений и собственных векторов матрицы дискретных уравнений.

Расчеты показали, что наибольшему собственному значению соответствует собственная функция, не пересекающая ось Z и обеспечивающая минимальное значение величины k . Эти собственные



Фиг. 2



Фиг. 3

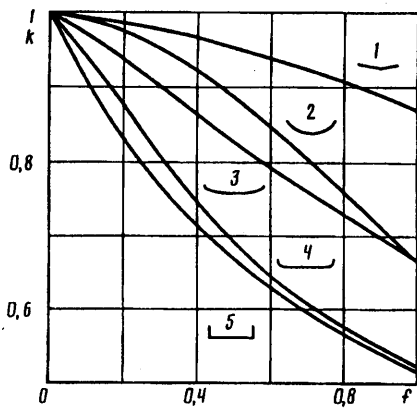
значение и собственный вектор использовались далее. Коэффициент при собственной функции выбирался из условия обеспечения заданной длины кривой C . Описанный итерационный процесс повторялся до достижения сходимости.

3. Результаты расчетов. С помощью численного метода, описанного выше, были проведены расчеты оптимальных форм присоединенного вихря в задаче 2 (с фиксированной длиной вихря L) при различных значениях L/l , получены оптимальные распределения циркуляции для рассчитанных форм и вычислены значения величины k по формуле (2.3). В расчетах линия C считалась симметричной относительно оси Y и половина этой линии разбивалась на 100 отрезков неравномерным образом по длине дуги со сгущением к концу кривой.

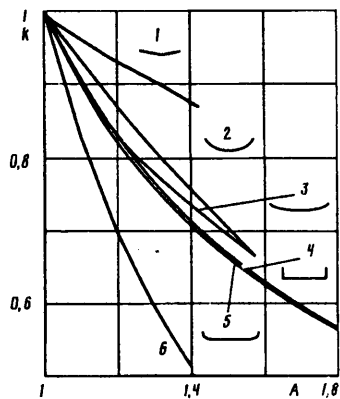
На фиг. 2 приведены результаты расчета оптимальных распределений циркуляции $\Gamma(s)$, а на фиг. 3 — формы присоединенного вихря в виде зависимостей $y(z)$ при различных значениях L/l . Кривая 1 соответствует значению $L/l = 2$, 2 — 1,4 и 3 — 1,1. Здесь и далее величины координат y и z отнесены к $l/2$, длина дуги s — к $L/2$, а циркуляция Γ — к величине циркуляции при $z = 0$. Штриховой линией отмечено эллиптическое распределение циркуляции. Видно, что полученные решения по форме близки к решениям задачи 1, т. е. имеют вертикальные концевые пластинки. Центральная часть крыла отличается от плоского тем больше, чем меньше отношение L/l .

На фиг. 4 представлены зависимости величины k от максимального прогиба присоединенного вихря h ($f = 2h/l$) для различных форм присоединенного вихря. Здесь и на фиг. 5 цифра 1 соответствует присоединенному вихрю в виде буквы V , 2 — присоединенному вихрю в виде дуги окружности, 3 — в виде половины эллипса, 4 — решению задачи 2 (оптимальному крылу при заданном значении L), 5 — крылу с концевыми пластинками. (На фиг. 5 цифры 4 и 5 следует поменять местами.) Все результаты, кроме обозначенных цифрами 4 и 5, взяты из [6]. Как и следует из теоретических соображений, крылом с минимальным значением k при заданном значении h является плоское крыло с концевыми пластинками высотой h .

На фиг. 5 приведены аналогичные зависимости величины k от длины присоединенного вихря L ($A = L/l$). Здесь также в соответствии с теоретическими результатами оптимальной является форма присоединенного вихря, представляющая решение задачи 2. Поскольку полученные при этом формы близки к решению задачи 1, выигрыш в величине k по сравнению с крыльями с концевыми пластинками невелик.



Фиг. 4



Фиг. 5

Отношение индуктивных сопротивлений двух плоских крыльев размаха L и l при заданной подъемной силе и эллиптическом распределении циркуляции равно $(l/L)^2$. Эта зависимость приведена на фиг. 5 (кривая 6). Поскольку она всюду проходит ниже кривой 4, которая соответствует оптимальным образом искривленному присоединенному вихрю при заданном отношении l/L , то можно сделать следующий вывод: при заданной длине присоединенного вихря и заданной подъемной силе минимум индуктивного сопротивления реализуется для плоского крыла при эллиптическом распределении циркуляции и любые искривления присоединенного вихря приводят к увеличению сопротивления.

Автор выражает благодарность П. Л. Крапивскому за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Munk M. M. The minimum induced drag of aerofoils//NACA Rep. 1921. № 121. 18 p.
2. Cone C. D. The theory of induced lift and minimum induced drag of nonplanar lifting systems//NASA TR. 1962. № R-139. 111 p.
3. Mangler W. The lift distribution of wings with end-plates//NACA TM. 1938. № 856 16 p.
4. Letcher J. S. V-wings and diamond ring-wings of minimum induced drag//J. Aircraft. 1972. V. 9. № 8. P. 605—607.
5. Lundry J. L., Lissaman P. B. S. A numerical solution for the minimum induced drag of nonplanar wings//J. Aircraft. 1968. V. 5. № 1. P. 17—21.
6. Lowson M. V. Minimum induced drag for wings with spanwise camber//J. Aircraft. 1990. V. 27. № 7. P. 627—631.
7. Жилин Ю. Л. Крыло минимального индуктивного сопротивления вблизи поверхности земли//Изв. АН СССР. Механика и машиностр. 1964. № 1. С. 148—150.
8. Борсук М. В. О первой вариации функционала от решения нелинейной краевой задачи для уравнений в частных производных второго порядка//Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 2. С. 69—76.
9. Брутян М. А., Ляпунов С. В. Вариационный метод решения задач со свободными линиями тока//Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 1. С. 11—18.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1991