

УДК 532.529

© 1993 г. Е. С. АСМОЛОВ

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ
В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ
НА МАСШТАБЕ РЕЛАКСАЦИИ
ПОПЕРЕЧНОЙ СКОРОСТИ

При движении частицы в ламинарном пограничном слое на нее действует помимо совпадающей по направлению со скоростью обтекания силы Стокса поперечная сила (сила Сэфмана), которая возникает вследствие поперечной неоднородности набегающего потока. Влияние силы Сэфмана на распределение скорости и плотности дисперсной фазы в пограничном слое на линейном масштабе релаксации продольной скорости частиц с использованием предельного значения коэффициента поперечной силы [1] исследовалось в [2—4]. Масштаб, на котором происходит изменение поперечной скорости частиц под действием силы Сэфмана, асимптотически велик по сравнению с масштабом релаксации продольной скорости [5]. Поперечная скорость частицы при этом определяется из условия баланса действующих на нее поперечных сил, а продольная в главном приближении равна продольной скорости газа. Уравнение, описывающее такое квазиравновесное движение, было получено с учетом зависимости коэффициента поперечной силы от соотношения чисел Рейнольдса, определяемых по скорости обтекания частицы и поперечному градиенту скорости невозмущенного частицей потока [6].

В настоящей работе изучаются свойства полученного в [5] уравнения квазиравновесного движения частицы в пограничном слое на плоской пластине. В частности, показано, что в общем случае оно имеет не единственное решение, и в зависимости от своей начальной скорости частица может приближаться к поверхности пластины или двигаться в противоположном направлении.

1. Рассмотрим движение сферических частиц радиуса a в ламинарном пограничном слое на плоской пластине. Помимо силы Стокса, совпадающей по направлению с вектором скорости набегающего потока, на них действует также поперечная сила (сила Сэфмана), возникающая вследствие учета инерционных членов в уравнениях движения газа около частицы. Ее величина для отдельной частицы определяется выражением [1, 6]

$$F_{sy} = c(\alpha) R_k^{1/2} \mu a (u - u_s), \quad \alpha = \mp R_v R_k^{-1/2}$$

$$R_v = \frac{\rho a |u - u_s|}{\mu} \ll 1, \quad R_k = \frac{\rho a^2}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \ll 1$$

Здесь и далее числа Рейнольдса, характеризующие обтекание частиц, обозначаются R , а характеризующие продольные масштабы течения газа в пограничном слое — Re . Знак параметра α считается совпадающим со знаком относительной скорости движения частицы $(u - u_s)$, где u , u_s — скорости газа и частицы.

Зависимость коэффициента поперечной силы $c(\alpha)$, полученная численно в [6], с относительной точностью $\beta = 2\%$ может быть описана эмпирическим соотношением

$$c(\alpha) = 6,46 (1 + 0,581\alpha^2 - 0,439 |\alpha|^3 + 0,203\alpha^4)^{-1}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 3 \quad (1.1)$$

Поскольку коэффициент c положителен для всех значений α , знак силы Сэфмана определяется только знаком скорости относительного движения частиц,

в частности для $u - u_s < 0$ сила F_{Sy} отрицательна, т. е. направлена к поверхности пластины.

Масштабы релаксации продольной и поперечной скоростей частиц в ламинарном пограничном слое различны. Скорость продольного движения, динамика которого определяется только действием силы Стокса, изменяется на характерном масштабе $L_0 = 2/9 \rho_s a^2 U_\infty \mu^{-1}$ [2, 7], где ρ_s — физическая плотность вещества частиц, U_∞ — скорость набегающего потока. Изменение поперечной скорости частиц вследствие действия силы Сэфмана происходит на другом характерном масштабе: $L_1 = D (U_\infty/\mu)^3 a^4 \rho^{8/3} \rho_s^{4/3}$, $D = 3,56 \cdot 10^{-3}$ [5]. Соответствующие масштабам L_0 и L_1 числа Рейнольдса имеют порядок

$$Re_0 = \frac{\rho U_\infty L_0}{\mu} \sim \frac{R_0^2}{\tau}, \quad Re_1 = \frac{\rho U_\infty L_1}{\mu} \sim \frac{R_0^4}{\tau^{4/3}}, \quad R_0 = \frac{\rho U_\infty a}{\mu}, \quad \tau = \frac{\rho}{\rho_s}$$

Необходимым условием того, что числа Re_0 и Re_1 будут асимптотически велики, и, следовательно, условием использования приближения пограничного слоя является, как видно из их оценок, асимптотическая малость по крайней мере одного из двух параметров: $\tau \ll 1$ или $R_0^{-1} \ll 1$. Отметим, что при выполнении любого из указанных неравенств масштаб L_0 асимптотически мал по сравнению с масштабом L_1 , $L_0/L_1 \sim R_0^{-2} \tau^{1/3} \ll 1$.

2. Запишем уравнения движения частицы в пограничном слое на масштабе L_1 , обезразмеривая пространственные координаты x и y на L_1 и $L_1 Re_1^{-1/2}$, время t — на L_1/U_∞ , продольную u_s и поперечную v_s скорости частицы — соответственно на U_∞ , $U_\infty Re_1^{-1/2}$

$$\frac{dx_s}{dt} = u_s, \quad \frac{dy_s}{dt} = v_s, \quad \varepsilon \frac{du_s}{dt} = u - u_s \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \frac{dv_s}{dt} = v - v_s + \frac{c(\alpha)(u - u_s)h}{\varepsilon 6\pi} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dt} = u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = \frac{h(u - u_s)}{\varepsilon R_0} \quad (2.2)$$

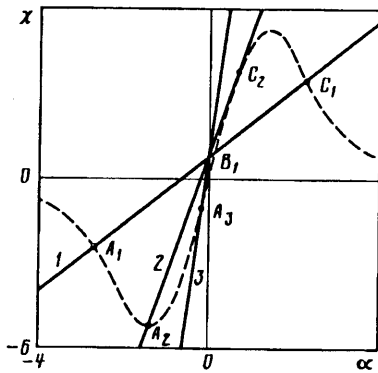
$$\varepsilon = \frac{L_0}{L_1} = \frac{2}{9D} \frac{R_0^2}{\tau^{1/3}} \ll 1, \quad h(x, y) = \frac{2}{9} D^{-3/4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1/2} \quad (2.3)$$

$$t = 0: \quad x_s = x_{s0}, \quad y_s = y_{s0}, \quad u_s = u_{s0}, \quad v_s = v_{s0}$$

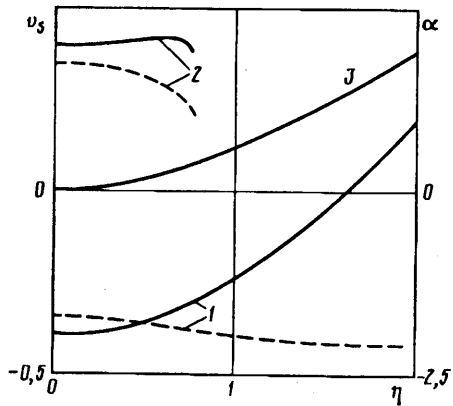
Здесь входящая в (2.1) скорость газа (u, v) определяется в точке с координатами (x_s, y_s) . Движению частиц в набегающем на пластину дисперсном потоке соответствуют начальные значения $x_{s0} = 0$, $u_{s0} = 1$, $v_{s0} = 0$. Другие начальные условия (2.3) могут иметь место, например, в случае, если частицы попадают в пограничный слой в результате вдува на его дне дисперсного потока.

Будем искать решение системы (2.1) в виде ряда по степеням ε . Можно видеть, что безразмерные ускорения в третьем и четвертом уравнениях (2.1) асимптотически малы, т. е., за исключением начальной стадии движения с характерным масштабом времени $t_0 \sim \varepsilon$, скорость частицы в главном приближении по ε определяется из условия равенства нулю действующих на нее сил. Это, в частности, означает, что продольные скорости частицы и газа равны, $u_s^{(0)} = u$. Тем не менее знание u_s только в главном приближении недостаточно для получения замкнутого решения (2.1). Действительно, для определения поперечной скорости $v_s^{(0)}$ нужно учитывать различие продольных скоростей в следующем приближении по ε , поскольку член в четвертом уравнении (2.1), соответствующий силе Сэфмана, имеет порядок $\varepsilon^{-1}(u - u_s^{(0)}) \sim 1$.

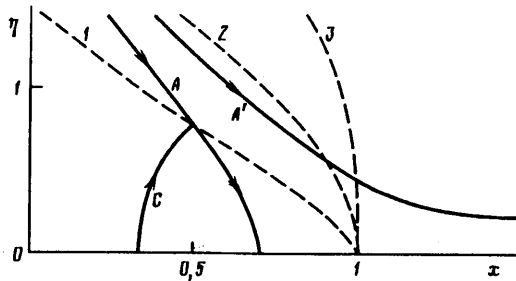
С учетом (2.2) и оценки скорости обтекания $u - u_s$ можно получить следующую



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

оценку для параметра $\alpha \sim \varepsilon^{-1} R_0^{-1} (u - u_s) \sim R_0^{-1}$. Ниже рассматривается наиболее общий случай $R_0 \sim 1$, $\tau \ll 1$, в котором $\alpha \sim 1$ и, следовательно, необходимо учитывать изменение коэффициента поперечной силы c при движении частицы.

Чтобы получить уравнения, описывающие распределения $\alpha^{(0)}$ и $u_s^{(0)}$, заменим входящую в субстанциональную производную по времени (2.2) скорость $u_s^{(0)}$ на u , выразим скорость обтекания $u - u_s^{(0)}$ в третьем и четвертом уравнениях (2.1) через $\alpha^{(0)}$, а скорости газа u и v — через известную функцию Блазиуса $f(\eta)$, $\eta = ux^{-1/2}$ и ее производную $u = f'$, $v = x^{-1/2}(\eta f' - f)/2$ [8] и в полученной системе уравнений исключим $u_s^{(0)}$ (подробный вывод уравнения для $\alpha^{(0)}$ содержится в [5]). В результате будем иметь

$$\chi(\alpha^{(0)}) = \alpha^{(0)} q(x, \eta) + s(\eta) R_0^{-1} \quad (2.4)$$

$$u_s^{(0)} = x^{-1/2} \left[\frac{\eta f' - f}{2} + \frac{c(\alpha) \alpha R_0 f''}{6\pi} \right] \quad (2.5)$$

$$\chi = c(\alpha) \alpha, \quad q = c(0) x^{3/4} \left[\frac{f''(\eta)}{f''(0)} \right]^{-3/2}, \quad s = \frac{3\pi f}{f''}$$

Таким образом, задача нахождения квазиравновесного (т. е. такого, при котором действующая на частицу суммарная поперечная сила равна нулю) распределения скоростей $u_s^{(0)}$, $u_s^{(0)}$ свелась к нелинейному алгебраическому уравнению (2.4). Его решение для случая $\alpha^{(0)} < 0$, что соответствует движению дисперсной смеси в пограничном слое, исследовано в [5]. Решение (2.4), полученное в [5], вообще говоря, не является единственным. Этот вывод проиллюстрирован на фиг. 1, где штриховой линией изображен график левой части уравнения (2.4) $\chi(\alpha)$. Правая часть этого уравнения представляет собой линейную функцию от α

с коэффициентами, зависящими от координат x , η и числа R_0 . На фиг. 1 нанесены прямые 1, 2, 3, соответствующие значениям $x = 0, 1; 0,56; 2, \eta = 0,7, R_0 = 3$. В зависимости от значений x , η уравнение (2.4) имеет один (точка A_3 для $\eta = 0,7, x > 0,56$), два (точки A_2, C_2 для $x = 0,56$) или три (точки A_1, B_1, C_1 для $x < 0,56$) корня. Отрицательный корень α_A существует для всех значений пространственных переменных x, η , а положительные корни α_B, α_C — лишь для $x \leq r(\eta)$. При $x = r(\eta)$ прямая на фиг. 1 касается кривой $c(\alpha)$. Графики кривых $x = r(\eta)$, ограничивающих области существования положительных корней, представлены на фиг. 2 для чисел $R_0 = 3; 30; \infty$ (соответственно штриховые кривые 1, 2, 3). Максимальные значения $r_{\max} = 1$ для всех чисел R_0 достигаются при $\eta = 0$.

Корни α_A и α_C (корень α_B , как показано в разд. 3, является неустойчивым) уравнения (2.4) с зависимостью $c(\alpha)$ в виде (1.1) определялись численно методом Ньютона. На фиг. 3 представлены графики распределений $\alpha_A(\eta)$ и $\alpha_C(\eta)$ (штриховые кривые 1 и 2) для $x = 0,5, R_0 = 3$ и соответствующие этим корням зависимости поперечной скорости частиц $v_{sA}(\eta)$ и $v_{sC}(\eta)$, которые находились из соотношений (2.5) (сплошные кривые). Для сравнения нанесена также зависимость поперечной скорости газа $u(\eta)$ (кривая 3). Можно видеть, что при движении частицы в пограничном слое с $\alpha^{(0)} = \alpha_A < 0$ поперечная скорость $v_s^{(0)}$ меньше поперечной скорости газа v , а с $\alpha^{(0)} = \alpha_C > 0$ — больше нее.

Интегрируя с учетом найденного для $v_s^{(0)}$ решения (2.5) и равенства $u_s^{(0)} = u$ первые два уравнения системы (2.1), можно определить траектории частиц для различных ветвей решения (2.4). Для отрицательной ветви, $\alpha^{(0)} = \alpha_A$, т. е. для частиц, приближающихся к поверхности пластины, траектории качественным образом различаются для $x < 1$ и $x > 1$ (траектории A, A' на фиг. 2), что связано с особенностями решения для $\alpha^{(0)}$ и $v_s^{(0)}$ при $\eta \rightarrow 0$. Так, при $x < 1, \eta \rightarrow 0$ решение (2.4), (2.5) дает значения $\alpha_A \neq 0, v_{sA} \neq 0$ (траектория A), а при $x > 1$ имеем $\alpha_A \sim \eta^2, v_{sA} \sim \eta^2$ (траектория A').

Частицы, движение которых начинается у поверхности пластины на положительной ветви решения $\alpha^{(0)} = \alpha_C, v_s^{(0)} = v_{sC} > 0$, должны перейти, достигнув кривой $x = r(\eta)$, на отрицательную ветвь $\alpha^{(0)} = \alpha_A$ (траектория C), поскольку для $x > r(\eta)$ не существует положительных корней (2.4). Структура решения в переходной области, располагающейся в малой окрестности точки пересечения траекторий C и A , рассмотрена в разд. 4.

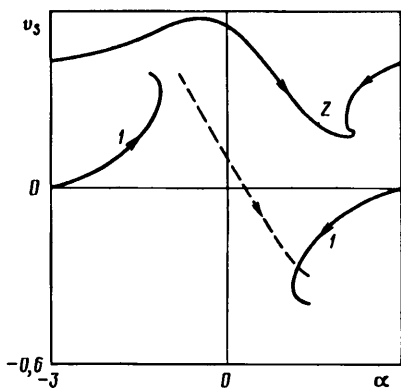
3. В связи с неединственностью решения уравнений квазиравновесного движения частиц под действием сил Стокса и Сэфмана возникает необходимость рассмотрения задачи о начальной стадии движения частиц. Ее решение позволит определить, какие из полученных выше зависимостей: $v_{sA}(\eta), v_{sB}(\eta)$ или $v_{sC}(\eta)$, реально имеют место для различных начальных условий.

Переписав уравнения движения частицы (2.1) на масштабе времени $t_0 = t/\varepsilon$, из первых двух уравнений получим, что в главном приближении по ε можно пренебречь изменением местоположения частицы ($x_s = x_{s0}, y_s = y_{s0}$) и, следовательно, изменением скорости газа при ее движении

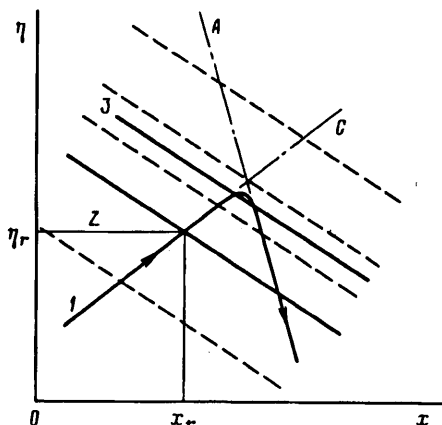
$$u = u_0 = u(x_{s0}, y_{s0}), \quad v = v_0 = v(x_{s0}, y_{s0}) \quad (3.1)$$

Если в начальный момент времени продольная скорость частицы u_{s0} отличается на свою величину от скорости газа u_0 , то α имеет порядок ε^{-1} . По этой причине член, соответствующий силе Сэфмана, асимптотически мал по сравнению с остальными членами, т. е. на начальной стадии движения происходит торможение продольного и поперечного относительного движения частицы под действием только силы Стокса. В результате третье и четвертое уравнение (2.1) могут быть проинтегрированы

$$u_s = u_{s0} + (u_0 - u_{s0}) \exp(-t_0), \quad v_s = v_{s0} + (v_0 - v_{s0}) \exp(-t_0) \quad (3.2)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Полученные экспоненциальные зависимости u_s, v_s верны до тех пор, пока $|u_s - u_0| \gg \varepsilon, \alpha \gg 1$, т. е. на временах $t_0 \ll t_0^* \sim \ln \varepsilon$. Для времен $t_0 > t_0^*$, когда сила Сэфмана становится сравнимой с поперечной силой Стокса, уравнения движения частицы могут быть преобразованы в обыкновенное дифференциальное уравнение для параметра α аналогично тому, как было получено (2.4). Отбрасывая заведомо внепорядковые члены, будем иметь

$$\frac{d^2\alpha}{dt_0^2} + 2 \frac{d\alpha}{dt_0} + \alpha - \frac{\chi(\alpha)}{q} = -\frac{s}{R_0 q} \quad (3.3)$$

$$v_s = R_0 x^{1/2} \frac{h}{f'r} \left(\frac{d\alpha}{dt_0} + \alpha \right) + \eta \frac{f'}{2x^{1/2}}$$

Здесь функции пространственных переменных $s(\eta), q(x, \eta)$ можно считать постоянными и равными соответственно $s(\eta_0), q(x_0, \eta_0)$, поскольку, как отмечалось выше, при рассмотрении движения частицы на масштабе времени t_0 в главном приближении можно не учитывать ее перемещения. С учетом (3.2) в качестве начальных значений примем

$$t_0 - t_0^* \rightarrow -\infty: \alpha \rightarrow \pm \infty, v_s \rightarrow v_0 \quad (3.4)$$

Таким образом, начальные условия к уравнению (3.3), а следовательно, и его предельные решения при $t_0 \rightarrow +\infty$ зависят только от знака в начальный момент параметра α , совпадающего со знаком разности продольных скоростей газа и частицы $u_0 - u_{s0}$, и не зависят от абсолютных величин скоростей u_{s0}, v_{s0} .

Результаты численного решения (3.3) в точках $x = 0,5, \eta = 0; 2$ (кривые 1, 2) для $R_0 = 3$ и обоих знаков α в начальном условии (3.4) представлены на фиг. 4 в виде фазовых траекторий в пространстве переменных α, v_s . При этом в области $x > r(\eta)$, где существует только один отрицательный корень α_A уравнения квазиравновесного движения (2.4) (см. фиг. 1), решение (3.1) выходит на α_A при любом знаке α в начальном условии (3.4). В области $x < r(\eta)$ в зависимости от знака начального значения α уравнение (3.1) может иметь как отрицательное α_A , так и положительное α_C предельное решение.

Корень α_B не может быть достигнут ни при каких начальных условиях (3.3). Это обстоятельство связано с тем, что ветвь α_B является неустойчивой, в то время как ветви α_A, α_C — устойчивы. Чтобы убедиться в этом, необходимо проанализировать различные ветви квазиравновесного решения на устойчивость

к линейным возмущениям параметра α относительно $\alpha^{(0)}$, где $\alpha^{(0)}$ — одно из квазиравновесных решений $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$. Перепишем уравнение (3.1) для малого возмущения $\alpha_1 = \alpha - \alpha^{(0)}$, $|\alpha_1| \ll |\alpha^{(0)}|$, разлагая входящую в (3.1) нелинейную функцию $\chi(\alpha)$ в ряд Тейлора вблизи значения $\alpha^{(0)}$

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt_0^2} + 2 \frac{d\alpha_1}{dt_0} + \alpha_1 \left[1 - \frac{\chi'(\alpha^{(0)})}{q} \right] = 0 \quad (3.5)$$

Решением линейного дифференциального уравнения (3.5) с постоянными коэффициентами является

$$\alpha_1 = c_1 \exp(\lambda_1 t_0) + c_2 \exp(\lambda_2 t_0), \quad \lambda_{1,2} = -1 \mp \sqrt{\chi'(\alpha^{(0)})/q}$$

Условия $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, эквивалентные условию устойчивости квазиравновесного решения $\alpha^{(0)}$, выполняются, если $\chi'(\alpha^{(0)}) < q$. Последнее неравенство не выполняется для ветви α_B , поскольку для нее кривая $\chi(\alpha)$ в точке пересечения с прямой на фиг. 1 имеет большой наклон, т. е. $\chi'(\alpha^{(0)}) > q$.

4. Из проведенного анализа устойчивости различных ветвей квазиравновесного решения $\alpha^{(0)}$ следует, что если в начальный момент времени скорость частицы соответствует ветви α_A или α_C , то и в последующие моменты времени ее движение в пограничном слое будет описываться той же ветвью $\alpha^{(0)}$, иными словами, невозможен переход с одной устойчивой ветви решения на другую. Исключением является окрестность кривой $x = r(\eta)$, ограничивающей область существования решения α_C . Частица при своем движении с положительной скоростью v_{SC} достигает линии $x = r(\eta)$ (см. фиг. 1) и в малой окрестности этой линии должен произойти переход с ветви α_C на ветвь α_A .

Структура областей, расположенных вблизи кривой $x = r(\eta)$, и траектория частицы в них качественно изображены на фиг. 5. Можно выделить три области с различными характерными масштабами времени изменения скорости частиц. Во внешней области (область 1) распределения скоростей частицы u_s, v_s и параметра α в главном приближении описываются квазиравновесными распределениями $u_s = u + O(\epsilon), v_s = v_{SC} + O(\epsilon), \alpha = \alpha_C + O(\epsilon)$. Характерный масштаб времени изменения этих величин — $O(1)$. Траектория частицы, которая соответствует квазиравновесному распределению скорости (штрихпунктирная линия C), пересекает границу существования данного решения $x = r(\eta)$ в точке (x_r, η_r) .

В переходной области (область 2) $|x - r(\eta)| \sim \epsilon^\mu, 0 < \mu \leq 1$, с характерным масштабом времени $t_2 = \epsilon^\mu(t - t_r)$ решение будем искать в виде

$$\alpha = \alpha_{Cr} + \epsilon^\nu A(t_2), \quad \alpha_{Cr} = \alpha_C(x_r, \eta_r). \quad (4.1)$$

Значения показателей степеней ν и μ можно найти, переписав уравнение (3.3) на масштабе времени t_2 . При этом необходимо иметь в виду, что в уравнении для величины A нельзя пренебрегать изменением функций пространственных переменных s и q при движении частицы на масштабе времени t_2 , как это имело место для уравнения (3.3)

$$s = s_r + \epsilon^\mu t_2 \left(\frac{ds}{dt} \right)_{Cr} + \dots, \quad q = q_r + \epsilon^\mu t_2 \left(\frac{dq}{dt} \right)_{Cr} + \dots$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{Cr} = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v_{SC} \frac{\partial}{\partial y} \right)_r = \left[u \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{v_{SC}}{\sqrt{x}} - \frac{\eta u}{2x} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right]_r$$

Представление функций s и q в виде ряда Тейлора по времени записано с учетом разложения (4.1), из которого следует, что скорость движения частицы в области 2 в главном приближении описывается квазиравновесным распределением в точке (x_r, η_r) , $u_s = u_r + O(\epsilon^\mu), v_s = v_{SCr} + O(\epsilon^\mu)$. Раскладывая также в ряд Тейлора по степеням α нелинейную функцию $\chi(\alpha)$ вблизи значения $\chi_{Cr} = \chi(\alpha_{Cr})$, с учетом $\chi_{Cr} = q$ (последнее равенство следует из фиг. 1, где точке $(r(\eta), \eta)$ соответствует

точка касания C_2 кривой $\chi(\alpha)$ и прямой $(\alpha q + sR_0^{-1})$, получим $\nu = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$. Уравнение для величины A запишется в виде

$$\frac{dA}{dt_2} + aA^2 = bt_2 \quad (4.2)$$

$$a = -\chi_{cr}'' (4q_{cr})^{-1} > 0, \quad b = \frac{d}{dt} \left(\frac{\chi R_0 - s}{2q R_0} \right)_{cr} < 0$$

Условие срачивания с внешним решением можно получить из уравнения (2.4), описывающего квазиравновесное решение, аналогично тому, как было получено (4.2), раскладывая функции s и q в ряды Тейлора по времени и функцию $\chi(\alpha)$ в ряд по степеням α и переписывая затем полученное уравнение в переменных A, t_2

$$t_2 \rightarrow -\infty: A = (bt_2/a)^{1/2} \quad (4.3)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (4.2) с постоянными коэффициентами a, b представляет собой уравнение Риккати. Его решение, удовлетворяющее условию срачивания (4.3), может быть выражено через функцию Эйри [9]

$$A = - (b/a^2)^{1/3} \text{Ai}'(z) / \text{Ai}(z), \quad z = t_2 (ab)^{1/3} \quad (4.4)$$

Полученное решение имеет особенность в точке, соответствующей первому нулю функции Эйри $t_{2\sigma} = -2,3381(ab)^{-1/3}$

$$t_2 \rightarrow t_{2\sigma}: A = [a(t_2 - t_{2\sigma})]^{-1} \quad (4.5)$$

и, следовательно, верно лишь для моментов времени $t_2 < t_{2\sigma}$. С возникновением указанной особенности связана необходимость выделения внутренней области (область 3 на фиг. 5). Действительно, как следует из (4.5), в малой окрестности $\Delta t_2 = O(\varepsilon^{2/3})$ точки $(x_r + \varepsilon^{1/3} u t_{2\sigma}, y_r + \varepsilon^{1/3} v_{SC} t_{2\sigma})$ разложение (4.1) и решение (4.4) в переходной области 2 становятся неприменимыми. Масштаб времени изменения параметра α в указанной внутренней области составляет $\Delta t_2 \sim \varepsilon^{2/3} \sim \varepsilon t$, что совпадает с масштабом релаксации продольной скорости частицы t_0 .

Таким образом, переход с ветви C квазиравновесного решения на ветвь A , т. е. изменение знака поперечной скорости частицы v_s , происходит в ε -окрестности кривой $x = r(\eta) + \varepsilon^{1/3} \sigma(\eta)$, $\sigma(\eta) = t_{2\sigma} [u - v_{SC} r'(\eta)]$ (траектория частицы в рассматриваемых областях 1, 2, 3 качественно изображена на фиг. 5). Продольная скорость частицы u_s в процессе перехода с одной ветви решения на другую не меняется и равна продольной скорости газа u_r .

Распределение величин α и v_s во внутренней области может быть найдено из решения уравнения (3.3), описывающего движение частицы на масштабе времени $t_0 = \varepsilon^{2/3} (t_2 - t_{2\sigma})$. При этом правая часть (3.3), содержащая функции пространственных переменных s и q , должна вычисляться в точке (x_r, η_r) . В качестве начальных условий к нему следует, очевидно, использовать условие срачивания с внутренним пределом (4.5) решения в переходной области

$$t_0 \rightarrow -\infty: \alpha = \alpha_{cr} + (at_0)^{-1}, \quad v_s = v_{SCr} + hx^{1/2} (at_0 f'')^{-1} \quad (4.6)$$

Результат численного решения (3.3) при $R_0 = 3$ в точке перехода с координатами $x_r = 0,5$; $\eta_r = 0,78$, удовлетворяющего условиям срачивания (4.6), представлен на фиг. 4 в виде фазовой траектории $v_s(\alpha)$ (штриховая кривая). В пределе $t_0 \rightarrow +\infty$ достигаются значения $\alpha_{Ar} = \alpha_A(x_r, \eta_r)$, $v_{sAr} = v_{sA}(x_r, \eta_r)$, т. е. решение переходит на ветвь A квазиравновесного распределения скоростей. В дальнейшем частица движется по направлению к пластине со скоростью, соответствующей той же ветви квазиравновесного решения (траектория A на фиг. 2), до тех пор, пока не достигнет ее поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P. G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow//J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 2. P. 385—400; Corrigendum: J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 624.
2. *Otterman B., Lee S.-L.* Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of suspension over a flat plate//Proc. «Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst.» Monterey, Calif.. 1970. Stanford, Calif., 1970. P. 311—322.
3. *Осипцов А. Н.* Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 80—87.
4. *Наумов В. А.* Расчет ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 171—173.
5. *Асмолов Е. С.* О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое на плоской пластине//Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 1. С. 66—73.
6. *Асмолов Е. С.* О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 91—96.
7. *Осипцов А. Н.* О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 48—54.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1992