

УДК 532.013.4:536.25

© 1993 г. Е. А. РЯБИЦКИЙ

КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ В ПРИСУТСТВИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА

Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя относительно монотонно нарастающих возмущений исследовалась в [1, 2]. В [3] для плоской свободной границы изучено влияние поверхностно-активного вещества (ПАВ) на возникновение стационарной конвекции. Появление колебательной неустойчивости существенно связано с учетом деформируемости свободной поверхности [4—7].

В данной работе исследуется влияние капиллярности и ПАВ на устойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры. Получено, что присутствие ПАВ приводит к появлению как монотонной, так и колебательной неустойчивости, при этом наличие поверхностной концентрации дестабилизирует равновесие в случае подогрева слоя снизу. При нагреве свободной поверхности ПАВ стабилизирует капиллярную неустойчивость.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой теплопроводной жидкости при отсутствии массовых сил. Начало координат помещено на твердой поверхности: оси x , y направлены горизонтально, ось z — вертикально вверх. Уравнения твердой и свободной границ: $z = 0$ и $z = l$ соответственно. Положим, что на свободной поверхности сосредоточено ПАВ с поверхностной концентрацией $\Gamma(t, x, y)$. Изменение коэффициента поверхностного натяжения линейно зависит от температуры и концентрации ПАВ: $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0) - \gamma(\Gamma - \Gamma_0)$, явления адсорбции и десорбции ПАВ не учитываются. Перенос ПАВ вдоль свободной границы описывается уравнением [8]

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \Gamma) + \frac{\partial}{\partial y} (v \Gamma) = D_s \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \right)$$

где u , v — компоненты вектора скорости жидкости на поверхности, D_s — коэффициент поверхностной диффузии ПАВ.

В равновесии концентрация ПАВ на границе постоянна: $\Gamma = \Gamma_0$, а градиент температуры имеет вид

$$d\theta/dz = s\theta_1/l$$

Здесь θ_1 — заданный перепад температуры в жидкости, $s = 1$ при подогреве снизу и $s = -1$ при нагреве свободной поверхности.

Выберем в качестве масштаба длины, времени, давления, температуры и поверхностной концентраций соответственно: l , l^2/ν , $\rho\nu^2/l$, $s\theta_1\nu/\chi$, Γ_0 . Здесь ν , χ — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности, ρ — плотность.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия. Считаем, что возмущения вектора скорости (U, V, W) , давления P , температуры T , нормальной составляющей свободной поверхности R и концентрации ПАВ G имеют вид

$$(U, V, W, P, T, R, G) = (U(\xi), V(\xi), W(\xi), P(\xi), T(\xi), R, G) \exp i(\alpha_x x + \alpha_y y - C\tau)$$

где α_x, α_y — волновые числа, τ — безразмерное время, $\xi = z/l$, $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент.

Линеаризованные уравнения для возмущений с учетом преобразования Сквайра примут вид [6]

$$\begin{aligned} a\Phi + ik^2P &= \Phi_{\xi\xi}, & aW + P_{\xi} &= W_{\xi\xi} \\ i\Phi + W_{\xi} &= 0, & bT - W &= T_{\xi\xi} \\ a &= -iC + k^2, & b &= -iPrC + k^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия на твердой границе и свободной поверхности имеют вид

$$\Phi = W = T = 0 \quad (\xi = 0) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi} + ik^2W + ik^2M(T - R/Pr) + ik^2BG &= 0 \\ -P + 2W_{\xi} + k^2WeR &= 0, & iCR + W &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$T_{\xi} + Bi(T - R/Pr) = 0, \quad (-iC + D_0k^2)G + i\Phi = 0 \quad (\xi = 1)$$

$$\Phi = \alpha_x U + \alpha_y V, \quad k^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad D_0 = \frac{D_s}{\nu}$$

$$M = \frac{s\chi\theta_1 l}{\rho\nu\chi}, \quad We = \frac{\sigma_0 l}{\rho\nu^2}, \quad Bi = \frac{\beta l}{\lambda}, \quad B = \frac{\gamma\Gamma_0 l}{\rho\nu^2}$$

Здесь λ, β — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена, Pr — число Прандтля, M — число Марангони, We — число Вебера, Bi — число Био. Знак числа Марангони зависит от способа подогрева.

Граница устойчивости равновесия определяется условием $C_i = 0$.

2. Для случая $B = 0$ (отсутствие ПАВ) в зависимости от параметров жидкости, способа подогрева и волнового числа возникновение термокапиллярной конвекции может быть обусловлено как монотонными, так и колебательными возмущениями [6].

Рассмотрим сначала влияние ПАВ на монотонные нейтральные возмущения ($C_r = 0, C_i = 0$). В этом случае задача (1.1)–(1.3) существенно упрощается и решение (1.1) после исключения функции Φ имеет вид

$$P = \mu_1 \operatorname{sh} k \xi + \mu_2 \operatorname{ch} k \xi$$

$$W = \frac{\mu_1}{2} \left(\xi \operatorname{sh} k \xi - \frac{\operatorname{ch} k \xi}{2k} \right) + \frac{\mu_2}{2} \left(\xi \operatorname{ch} k \xi - \frac{\operatorname{sh} k \xi}{2k} \right) + \mu_3 \operatorname{sh} k \xi + \mu_4 \operatorname{ch} k \xi$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_1}{8k^2} \left(2\xi \operatorname{sh} k \xi + \frac{\operatorname{ch} k \xi}{k} - k \xi^2 \operatorname{ch} k \xi \right) + \frac{\mu_2}{8k^2} \left(2\xi \operatorname{ch} k \xi + \frac{\operatorname{sh} k \xi}{k} - k \xi^2 \operatorname{sh} k \xi \right) + \\ &+ \frac{\mu_3}{4k^2} (\operatorname{sh} k \xi - 2k \xi \operatorname{ch} k \xi) + \frac{\mu_4}{4k^2} (\operatorname{ch} k \xi - 2k \xi \operatorname{sh} k \xi) + \mu_5 \operatorname{sh} k \xi + \mu_6 \operatorname{ch} k \xi \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), (1.3), получим выражение для нейтральных чисел Марангони

$$M = \frac{4(\operatorname{Bish} k + k \operatorname{ch} k) [(B/D_0)(k^2 - \operatorname{sh}^2 k) + 2k(k - \operatorname{sh} k \operatorname{ch} k)]}{k^3 \operatorname{ch} k - \operatorname{sh}^3 k - 8k^3 (\operatorname{We} Pr)^{-1} \operatorname{ch} k} \quad (2.1)$$

При отсутствии ПАВ ($B = 0$) выражение (2.1) получено в [2]. Для недеформируемой свободной поверхности ($We = \infty$) аналог формулы (2.1) можно вывести из [9], если пренебречь влиянием адсорбции и десорбции.

Получим длинноволновую асимптотику ($k \rightarrow 0$) задачи (1.1)—(1.3) в случае деформируемой свободной границы ($We \neq \infty$). Разлагая искомые функции в ряд по четным степеням k и считая, что разложение R и G начинается с k^{-2} , в нулевом приближении имеем

$$\Phi = \xi, \quad W = \frac{-i \xi^2}{2}, \quad P = -i \xi + \mu_1, \quad T = \frac{i \xi^4}{24} + \mu_2 \xi$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), получаем квадратное уравнение для нахождения комплексного декремента, решение которого имеет вид

$$C_{1,2} = -\frac{1}{2} ik^2 (d_1 \mp (d_1^2 + 4d_2)^{1/2}) \quad (2.2)$$

$$d_1 = D_0 + B - M / (2Pr(1 + Bi)), \quad d_2 = MD_0 / (2Pr(1 + Bi))$$

Таким образом, для рассматриваемой асимптотики декремент C будет чисто мнимым, а соответствующие возмущения — монотонными. При этом C_1 соответствует термокапиллярной, а C_2 — поверхностно-концентрационной моде.

Нетрудно показать, что при $M > 2 Pr(1 + Bi)(B + D_0)$ и $D_0 \neq 0$ декремент C_1 всегда положителен, следовательно, присутствие ПАВ приводит к дестабилизации равновесия относительно длинноволновых возмущений.

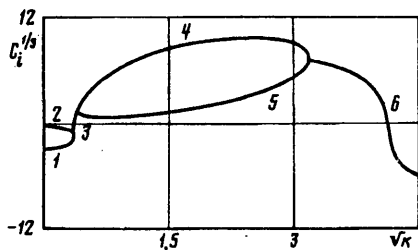
3. Численное решение задачи (1.1)—(1.3) для произвольных возмущений осуществлялось методом ортогонализации.

Рассмотрим сначала подогрев снизу ($s = 1$). Пусть свободная граница недеформируема ($We = \infty$), тогда потеря устойчивости возможна вследствие конкуренции двух механизмов: неустойчивости, обусловленной неоднородным распределением температуры вдоль свободной границы (термокапиллярная конвекция), и неустойчивости, связанной с наличием градиента ПАВ на поверхности (поверхностно-концентрационная конвекция). При $B = 0$ имеет место только монотонная термокапиллярная неустойчивость [6]. Наличие ПАВ приводит к появлению нового типа возмущений и возникновению колебательной неустойчивости.

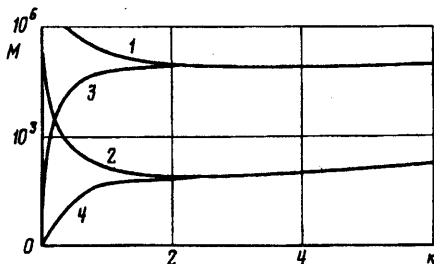
На фиг. 1, построенной для $M = 4200$, $Pr = 0,016$, $Bi = 0$, $B = 5$, $D_0 = 10^{-3}$, показан механизм образования осциллирующих возмущений. Здесь кривая 1 соответствует термокапиллярному возмущению, а кривая 2 — возмущению, обусловленному присутствием ПАВ. С ростом волнового числа монотонно затухающие возмущения сливаются, образуя комплексно-сопряженную пару (кривая 3). Полученные осциллирующие возмущения, начиная с некоторого k , нарастают, вызывая кризис равновесия. Далее происходит еще одно распадение на термокапиллярную (кривая 4) и поверхностно-концентрационную моды (кривая 5) с дальнейшим образованием новой колебательной моды (кривая 6), которая и определяет границу неустойчивости в коротковолновой области. С ростом числа Марангони кривая 5 смещается вниз и начиная с $M = 74\,088$ происходит пересечение поверхностно-концентрационной моды с осью $C_i = 0$.

Соответствующая монотонная нейтральная кривая ($Pr = 0,016$, $Bi = 0$, $B = 5$, $D_0 = 10^{-3}$) приведена на фиг. 2 (кривая 1) и полностью совпадает с нейтральной кривой, построенной по формуле (2.1). Кривая 2 обозначает границу колебательной неустойчивости. При этом относительно монотонно нарастающих возмущений равновесие неустойчиво для чисел Марангони, лежащих ниже кривой 1, а относительно осциллирующих — выше кривой 2. Кривая 2 практически совпадает с нейтральной кривой для монотонных возмущений, полученной в [1].

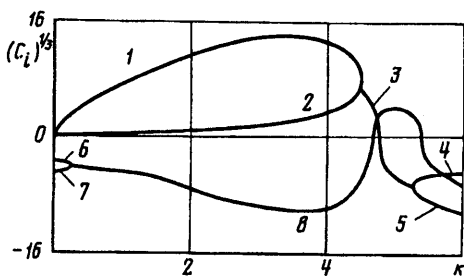
Таким образом, быстрое нарастание критических чисел Марангони с ростом B нельзя интерпретировать как стабилизацию монотонной неустойчивости равновесия, как это было сделано в [3]. Более того, присутствие ПАВ оказывает сильное дестабилизирующее влияние и делает устойчивость невозможной. Для двухфазной жидкости этот результат был получен в [10]. При этом наличие ПАВ приводит к тому, что возмущения, вызывающие кризис равновесия, нарастают колебательным образом.



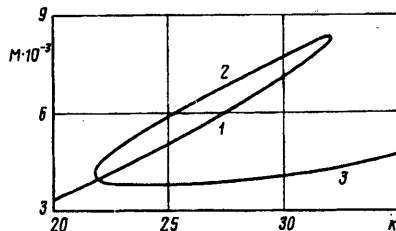
Фиг. 1



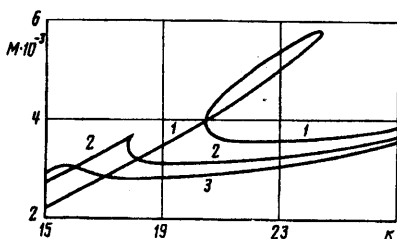
Фиг. 2



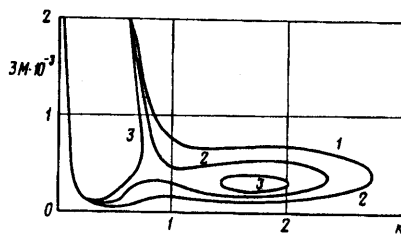
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Пусть свободная поверхность деформируема ($We \neq \infty$). При рассматриваемых значениях параметров, согласно асимптотике (2.2), термокапиллярные и поверхностно-концентрационные возмущения монотонно нарастают и в длинноволновой области.

На фиг. 3, построенной для $We = 10^4$, соответствующие моды обозначены кривыми 1 и 2. С ростом волнового числа эти возмущения сливаются, образуя комплексно-сопряженную пару (кривая 3). В коротковолновой области термокапиллярные возмущения становятся затухающими, распадаясь вновь на пару монотонных мод (кривые 4, 5). Нейтральные кривые для $We = 10^4$ приведены на фиг. 2. Здесь кривая 3 соответствует поверхностно-концентрационным возмущениям (монотонным) и кривая 4 — термокапиллярным (осциллирующим). Таким образом, учет деформируемости свободной поверхности для этих мод проявляется только в области малых волновых чисел.

Рассмотрим вклад капиллярного механизма возникновения конвекции. Как показано на фиг. 3, для деформируемой свободной границы в области длинных волн возникают монотонно затухающие возмущения (кривые 6, 7 на фиг. 3), которые с ростом волнового числа образуют пару осциллирующих (кривая 8). Полученные колебательные возмущения, начиная с некоторых чисел Марангони (при $M > 3894$ для $B = 5$), нарастают и приводят к кризису равновесия в коротковолновой области. С дальнейшим ростом M происходит стабилизация капиллярных возмущений (интервал неустойчивости сужается, максимум кривой

8 убывает). Область термокапиллярной неустойчивости при этом увеличивается (точка пересечения кривой 3 с осью $C_i = 0$ сдвигается вправо).

На фиг. 4 приведены нейтральные кривые (построенные при $We = 10^4$, $Pr = 0,016$, $Bi = 0$, $B = 5$, $D_0 = 10^{-3}$) в области больших волновых чисел. Здесь кривая 1 является продолжением термокапиллярной нейтральной кривой (кривой 2 на фиг. 2), кривые 2 и 3 — новые, обусловленные учетом капиллярности. Монотонная нейтральная кривая, описывающая границу устойчивости относительно возмущений индуцированных наличием ПАВ, лежит значительно выше и на графике не приводится. В отличие от случая $B = 0$ капиллярная неустойчивость реализуется только в ограниченном диапазоне чисел Марангони (для $B = 5$ при $3894 < M < 8968$). Нейтральные кривые классифицируются следующим образом. При числах Марангони, меньших 8168, кривая 1 описывает границу термокапиллярной неустойчивости, а кривые 2, 3 — капиллярной. Для кривой Марангони, больших 8168, кривые 1, 2 обозначают порог устойчивости относительно капиллярных возмущений, а кривая 3 — относительно термокапиллярных. Область «устойчивости» расположена при $k < 22$ ниже кривой 1, а при $k > 22$ ниже кривой 3.

На фиг. 5 показано влияние поверхностной концентрации на изменение нейтральных кривых. Кривая 1 относится к случаю $B = 20$, 2 — к случаю $B = 50$ и 3 — к случаю $B = 70$. Увеличение концентрации ПАВ приводит к некоторой стабилизации в области умеренных волновых чисел, в то же время происходит дестабилизация равновесия относительно длинноволновых термокапиллярных возмущений.

Пусть жидкость подогревается сверху. Поскольку числа Марангони, построенные по формуле (2.1), всегда положительны, монотонной неустойчивости здесь нет. Спектр нескольких первых мод в случае $B = 0$ приведен в [6]. Присутствие ПАВ незначительно влияет на возмущения и не приводит к появлению нового механизма неустойчивости. Следовательно, как и в случае чистой жидкости, потеря устойчивости возможна только под действием поверхностных возмущений. На фиг. 6 приведены нейтральные кривые, построенные при $Pr = 0,016$, $D_0 = 10^{-3}$, $Bi = 0$ для $B = 20$ (кривая 1), $B = 50$ (кривая 2) и $B = 70$ (кривая 3). С ростом концентрации ПАВ происходит стабилизация возмущений с умеренными волновыми числами, при этом область неустойчивости теряет связность.

Таким образом, увеличение поверхностной концентрации стабилизирует капиллярную неустойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 5. P. 489—497.
2. Scriven L. E., Sternlin C. V. On cellular convection driven by surface tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. № 3. P. 321—340.
3. Berg J. C., Acrivos A. The effect of surface active agents on convection cells induced by surface tension // Chem. Engng Sci. 1965. V. 20. № 8. P. 737—745.
4. Vidal A., Acrivos A. Nature of the neutral state in surface tension driven convection // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 3. P. 615—616.
5. Рябицкий Е. А. О термокапиллярной неустойчивости равновесия плоского слоя при наличии внутренних источников тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 27—31.
6. Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя при наличии вертикального градиента температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 3. С. 19—24.
7. Garcia-Ybarra P. L., Velarde M. G. Oscillatory Marangoni — Bernard interfacial instability and capillary-gravity waves in single- and two-component liquid layers with or without Soret thermal diffusion // Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 6. P. 1649—1655.
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР. 1952. 539 с.
9. Palmer H. J., Berg J. C. Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. № 2. P. 385—402.
10. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойных системах при наличии поверхностноактивного вещества на границе раздела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 3—8.