

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1993 г. М. В. ПРОТОПОПОВ, С. Г. ЧЕРКАСОВ

ОСОБЕННОСТИ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ СРЕДЕ

Для многих задач естественной конвекции характерной особенностью является наличие устойчивой температурной стратификации, когда температура жидкости вдали от стенок, т. е. на внешней границе свободно-конвективного пограничного слоя, увеличивается с высотой. В частности, такая ситуация типична для конвекции в емкостях, вертикальных прослойках и других внутренних задач конвекции. В данной работе показано, что при наличии стратификации общие уравнения свободно-конвективного пограничного слоя допускают существенные упрощения. Показано также, что использование этих упрощений позволяет получать аналитические решения или производить достаточно точные оценки характеристик течения и теплообмена для внутренних задач конвекции. Результаты предложенного подхода к описанию пограничного слоя апробируются на численных решениях полных уравнений естественной конвекции (уравнения Навье — Стокса в приближении Буссинеска).

Будем рассматривать для определенности свободно-конвективный пограничный слой на вертикальной стенке, температура которой выше температуры жидкости вне пограничного слоя. За исключением особо оговоренных случаев, конвекцию будем считать ламинарной. Уравнения свободно-конвективного пограничного слоя [1] представим в следующем безразмерном виде:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \text{Ra} \theta' + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x^2} \quad (3)$$

Здесь x, z — координаты, направленные соответственно по нормали от стенки и вверх вдоль стенки; u, v — составляющие скорости по осям x, z ; $\theta' = (T - T_0)/\Delta T$ — безразмерная температура (T_0 — температура, принятая за начало отсчета, ΔT — характерный перепад температуры), P — отклонение давления от гидростатического давления в жидкости с температурой T_0 ; $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля; $\text{Ra} = g\beta\Delta TL^3/\nu a$ — число Рэлея, g — ускорение силы тяжести, β и a — коэффициенты теплового расширения и температуропроводности жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости. В качестве масштаба длины принят какой-либо размер L , масштаба скорости — величина a/L .

Представим безразмерную температуру θ' в виде $\theta' = \theta_\infty(z) + \theta(x, z)$, где $\theta_\infty(z)$ — температура вдали от стенки, $\theta(x, z)$ — избыточная температура в пограничном слое. Учитывая, что вдали от стенки конвективные и вязкие члены в уравнении (1) существенно меньше, чем в пограничном слое, а давление поперек пограничного слоя постоянно, преобразуем уравнения (1), (3) к виду

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \text{Ra} \theta + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = -Av + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad A(z) = \frac{\partial \theta_\infty}{\partial z} \quad (5)$$

Отметим, что в уравнениях (1), (3), (4), (5) опущены производные по времени от скорости и температуры. Тем самым предполагается, что характеристики пограничного слоя медленно изменяются во времени в соответствии с изменением стратификации A .

Допустим, что избыточная (относительно ядра) температура в пограничном слое θ существенно медленнее изменяется по высоте, чем температура в ядре θ_∞ , т. е. выполняется условие

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \ll A \quad (6)$$

Из условия (6) и уравнения неразрывности вытекает, что члены в левой части уравнения энергии (5) существенно меньше членов в правой части этого уравнения, поскольку

$$\left| u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \ll |vA|$$

Таким образом уравнение энергии принимает вид

$$Av = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (7)$$

Оценим теперь величину членов в левой части уравнения (4). Поскольку эти члены имеют в пограничном слое один порядок величины, то будем сравнивать второй член в левой части (4) и последний член этого уравнения. Обозначим через l и δ характерные масштабы изменения параметров вдоль и поперек пограничного слоя. Очевидно, что $\delta \ll l$. Тогда, учитывая (7), получим

$$\frac{1}{Pr} \left| v \frac{\partial v}{\partial z} \right| \sim \frac{1}{Pr} \cdot \frac{v^2}{l} \sim \frac{1}{Pr} \cdot \frac{v}{\delta^2} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\theta}{A} \sim \frac{1}{Pr} \frac{1}{A} \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|$$

Отсюда следует, что конвективными членами в уравнении движения (4) можно пренебречь при выполнении условия

$$\frac{1}{Pr} \left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| \ll A \quad (8)$$

Уравнение движения при этом принимает вид

$$Ra\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

Отличительной особенностью уравнений пограничного слоя (7), (9) является их локальный характер. Поскольку в этих уравнениях отсутствуют производные от параметров пограничного слоя по продольной координате z , то эти параметры оказываются однозначно зависимыми только от местных условий подвода тепла и местного значения стратификации и не связаны с характеристиками течения и теплообмена выше и ниже по потоку. Отметим также, что в уравнениях (7), (9) отсутствует число Прандтля, т. е. при выполнении условий (6), (8) число Прандтля не является определяющим параметром.

Уравнения (7), (9) с граничными условиями

$$v|_{x=0} = v|_{x=\infty} = \theta|_{x=\infty} = 0$$

имеют решение

$$\theta_1 = e^{-y} \cos y, \quad v_1 = e^{-y} \sin y$$

$$\theta_1 = \theta \cdot C^{-1}, \quad v_1 = v \cdot 2\alpha^2 Ra^{-1} C, \quad \alpha = \left(\frac{1}{4} Ra A\right)^{1/4}, \quad y = \alpha x \quad (10)$$

Параметр C определяется из граничного условия для температуры на стенке. Необходимо отметить, что профили температуры и скорости вида

$$\theta = C_1 e^{-kx} \cos kx, \quad v = C_2 e^{-kx} \sin kx \quad (11)$$

были получены еще Прандтлем [2] для конвекции около пластины с постоянным тепловым потоком в жидкость и при линейной стратификации среды. Результаты некоторых других работ также указывают либо прямо [3, 4], либо косвенно [5, 6] на близость формы профилей температуры и скорости к формулам (11). Однако в указанных работах отсутствует общий анализ условий, при которых профили вида (11) имеют место. Как показано выше, такими условиями являются соотношения (6), (8). В дальнейшем будем для определенности считать, что $Pr \geq 1$ (это соответствует теплофизическим свойствам газов и большинства жидкостей). При этом условие (8) является следствием условия (6).

Рассмотрим подробнее случай, когда к жидкости от стенки подводится постоянный тепловой поток q_w . Принимая за характерный перепад температуры ΔT величину $q_w L / \lambda$ (λ — коэффициент теплопроводности жидкости), получим следующее граничное условие для температуры на стенке и параметр C в формулах (10):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -1, \quad c = \alpha^{-1} \quad (12)$$

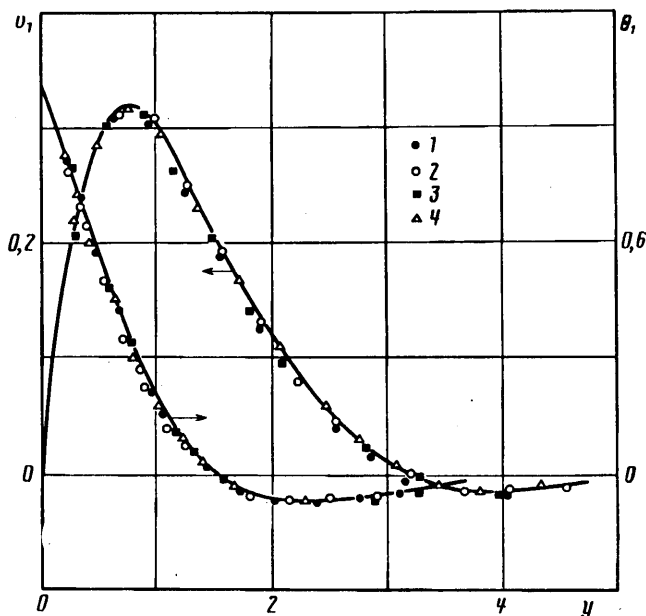
Предположим, что условие (6) выполнено и, следовательно, скорость и температура в пограничном слое описываются формулами (10), (12). Вычисляя теперь по этим формулам градиент температуры θ вдоль стенки, представим условие (6) в виде

$$Ra^{-1/4} A^{-9/4} \frac{\partial A}{\partial z} \leq \epsilon \quad (13)$$

где ϵ — некоторое число. Отметим, что левая часть неравенства (13) уменьшается с ростом числа Рэлея и стратификации и увеличивается с ростом градиента стратификации.

Для определения величины ϵ , гарантирующей реальный переход пограничного слоя к описанному выше режиму, было проведено численное моделирование (на основе решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска по методике [7], модифицированной для плоской задачи) симметричной конвекции в плоской прямоугольной области с постоянными теплопотоками на вертикальных границах. Перед началом нагрева жидкость полагалась неподвижной и в ней задавалось степенное распределение температуры по вертикали. Расчеты проводились при $Pr = 1$, числах Рэлея от 10^7 до 10^9 (в качестве характерного размера L принималась высота области) и различных коэффициентах и показателях степени в вертикальном распределении температуры. Для обработки результатов использовались характеристики конвекции на достаточном расстоянии от верхней границы области, где после начала нагрева быстро устанавливался стационарный пограничный слой, причем за время установления стратификация в ядре практически не успевала измениться. В методических расчетах, проведенных при отсутствии начальной стратификации, практически точно воспроизводилось автомоделное решение для пластины [8], что указывает на отсутствие влияния на пограничный слой слабого встречного течения в ядре.

На фиг. 1 показаны поперечные профили скорости и температуры в пограничном слое (для центрального горизонтального сечения), построенные по формулам (10), (12) и полученные на основе численного моделирования при



Фиг. 1

линейном вертикальном распределении температуры в ядре (1 — $Ra = 10^7$, $A = 0,7$; 2 — $Ra = 10^8$, $A = 0,7$; 3 — $Ra = 10^9$, $A = 3,3 \cdot 10^{-2}$; 4 — $Ra = 10^9$, $A = 0,1$). Видно, что совпадение результатов практически полное. Отметим, что при линейном распределении температуры в ядре левая часть неравенства (13) равна нулю. Расчеты, проведенные при нелинейных распределениях температуры в ядре, показали увеличение расхождения результатов численного моделирования с формулами (10), (12) при увеличении параметра ϵ и позволили установить связь между точностью изложенного выше теоретического подхода и величиной ϵ в критерии (13). Обобщение этих расчетов показало, что при $\epsilon = 0,1$ различия результатов аналитической теории и численного моделирования не превышают 5% (по максимальной величине скорости), а при $\epsilon = 1$ различия составляют около 20%.

Изложенный выше подход позволяет с помощью простых соотношений выразить характеристики свободно-конвективного пограничного слоя через стратификацию в ядре. В ряде случаев это позволяет получать аналитические решения для внутренних задач конвекции. Рассмотрим в качестве примера хорошо изученную методами численного моделирования задачу о конвекции в частично заполненном вертикальном цилиндрическом сосуде с равномерно распределенным и постоянным по времени тепловым потоком в жидкость на боковой стенке при теплоизолированных свободной поверхности и днище. В работе [9] показано, что при достаточно большом времени прогрева устанавливается квазистационарный режим конвекции, при котором течение становится стационарным, а температура жидкости растет во всех точках с одинаковым темпом. Принимая за характерный размер L радиус сосуда и вводя безразмерное время — число Фурье $Fo = at/L^2$, получим из интегрального теплового баланса, что на квазистационарном режиме

$$\frac{\partial \theta'}{\partial Fo} = 2, \quad \theta' = (T - T_0) \lambda / qL \quad (14)$$

Уравнение энергии и граничные условия для рассматриваемого случая имеют следующий безразмерный вид:

$$r \frac{\partial \theta'}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial r} (ru\theta') + \frac{\partial}{\partial z} (rv\theta') = r \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial r} \Big|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (15)$$

Здесь u — составляющая скорости по оси r . Интегрируя уравнение энергии по объему, ограниченному снизу дном, а сверху произвольным горизонтальным сечением $z = z_*$, получим с учетом граничных условий и формулы (14), что в сечении z_* выполняется соотношение

$$\int_0^1 r u \theta' dr = \int_0^1 r \frac{\partial \theta'}{\partial z} dz \quad (16)$$

Результаты численного моделирования [9] показывают, что на квазистационарном режиме вертикальный градиент температуры постоянен и по радиусу и по высоте, за исключением узких зон около дна и свободной поверхности. Поэтому левая часть неравенства (13) равна нулю и можно пользоваться профилями (10) для скорости и избыточной температуры в пограничном слое. При тонком пограничном слое формулу (16) можно преобразовать к виду

$$\int_0^{\infty} v \theta dx = \frac{1}{2} A \quad (17)$$

Подставляя в (17) формулы (10), (12), получим

$$A = 2^{-5/9} \text{Ra}^{-1/9} \quad (18)$$

Подставляя (18) в (10), (12), можно получить формулы для скорости и избыточной температуры в пограничном слое. Отличие полученных таким образом результатов от результатов прямого численного моделирования [9] не превышает 10%.

Квазистационарному режиму предшествует переходный режим, когда характеристики конвекции переменны во времени, но при этом в ядре температура и скорость постоянны по горизонтали и уравнение энергии для ядра можно представить в виде

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \text{Fo}} + v_{\infty} A = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} \quad (19)$$

Предположим, что тепловой поток на боковой стенке распределен неравномерно, т. е. граничное условие для температуры на стенке имеет вид

$$\frac{\partial \theta'}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q(z) \quad (20)$$

где q — безразмерный тепловой поток. Интегрируя уравнение (7) поперек пограничного слоя, получим соотношение

$$A Q = q, \quad Q = \int_0^{\infty} u dx \quad (21)$$

Здесь Q — расход жидкости через пограничный слой, связанный со скоростью в ядре балансом расхода

$$v_{\infty} = -2Q \quad (22)$$

Из формул (21), (22) следует, что уравнение энергии (19) имеет вид

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} + 2q \quad (23)$$

Уравнение энергии в виде (23) было предложено в [10] для расчета температуры ядра в автомодельном режиме тепловой стратификации. Отметим, что, проделав

аналогичные выкладки для пограничного слоя на криволинейной стенке, можно получить формулы для температуры в ядре и для емкостей другой формы, в частности предложенное в [10] уравнение энергии для горизонтального цилиндра.

Предположим теперь, что пограничный слой турбулентен, а условие (6) выполняется для осредненных по времени величин. Тогда для пограничного слоя уравнение энергии для осредненных величин можно представить в виде

$$Av = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial q_1}{\partial x}$$

где q_1 — турбулентный поток энергии. Однако поскольку на стенке $q_1 = 0$, то интегрирование этого уравнения приводит к тому же соотношению (21), что и для ламинарного пограничного слоя, откуда следует, что перенос энергии в ядре в автомоделном режиме стратификации описывается одним и тем же уравнением как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев. Подтверждением этому факту является полученное в [10] хорошее согласие между расчетными и экспериментальными данными для турбулентной конвекции.

В заключение рассмотрим стационарную ламинарную конвекцию в плоской вертикальной прослойке, горизонтальные границы которой теплоизолированы, а вертикальные поддерживаются при постоянных температурах, различающихся на величину ΔT . За масштаб длины примем горизонтальный размер, безразмерную высоту прослойки обозначим через H . Известно, что в центральной части прослойки температура практически линейно растет с высотой [11], откуда легко получить, что перепад температуры между стенкой и ядром связан со стратификацией соотношением

$$\left| \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right| = A$$

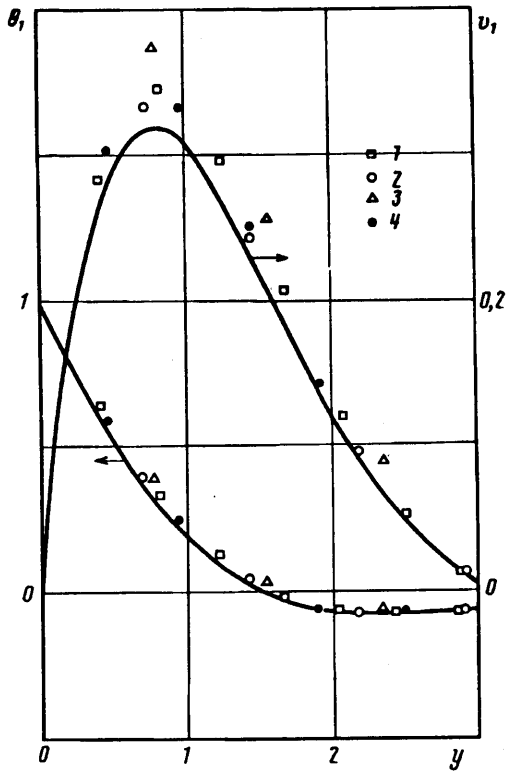
т. е. формально условие (6) не выполняется. Тем не менее развитый выше подход позволяет достаточно точно оценивать характеристики пограничного слоя. Отметим, что продольный градиент избыточной температуры в пограничном слое изменяется от нуля вдали от стенки до величины A на самой стенке. Однако вблизи стенки относительная величина различных конвективных членов в уравнении (5) незначительна, так как скорость мала. Поэтому членами в левой части уравнения (5) в первом приближении можно пренебречь и оценивать характеристики пограничного слоя по формулам (10), причем при известной температуре ядра параметр C определяется в данном случае элементарно.

Для определения реальной погрешности формул (10) были получены соответствующие численные решения (на основе методики [7]) двумерных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска. На фиг. 2 приведены значения θ_1 и ψ_1 , полученные для центрального горизонтального сечения прослойки из численных решений задачи при $Ra = 10^6$, $H = 2$, $Pr = 10$ (точки 1), $Ra = 10^7$, $H = 2$, $Pr = 10$ (точки 2), $Ra = 10^7$, $H = 1$, $Pr = 1$ (точки 3), $Ra = 10^6$, $H = 1$, $Pr = 5$ (точки 4). Сплошные линии на фиг. 2 соответствуют формулам (10). Видно, что численные результаты вполне удовлетворительно согласуются с результатами аналитического подхода. Применим теперь этот подход для расчета теплопередачи через прослойку. Приближенно представим температуру ядра в виде

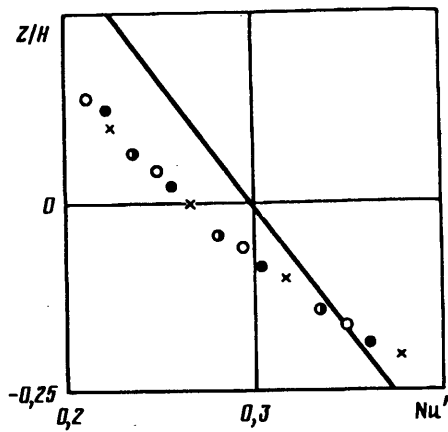
$$\theta_\infty = 0,5 + Az \quad (24)$$

где $z = 0$ соответствует центральному горизонтальному сечению прослойки. Очевидно, что температура ядра около верхней границы прослойки больше 0,5, но меньше 1. Выбирая среднее арифметическое из этих значений, получим следующие оценки для стратификации и местного числа Нуссельта на горячей стенке:

$$A = \frac{1}{2} H^{-1}, \quad Nu = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = Ca = \alpha (1 - \theta_\infty)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Последнюю формулу преобразуем к виду

$$Nu' = Nu \cdot \left(\frac{Ra}{H}\right)^{-1/4} = \frac{1}{4} \cdot 2^{1/4} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (25)$$

На фиг. 3 для центральной по высоте части прослойки сплошной линией показаны значения Nu' по формуле (25), а точками — результаты численных решений уравнений Навье — Стокса (параметры те же, что на фиг. 2). Видно, что погрешность формулы (25) не превышает 20%. Местное число Нуссельта в центре прослойки, полученное по формуле (25), можно использовать для оценки

средней теплопередачи через прослойку, что для параметров, соответствующих точкам 1—4 на фиг. 2, 3, приводит к значениям 8,0; 14,2; 14,2; 9,5. Результаты численного моделирования составляют 8,3; 14,7; 14,1; 9,1.

В целом представленные выше результаты показывают, что, хотя вопрос о границе применимости упрощенных уравнений пограничного слоя в общем случае требует дальнейшей проработки, для наиболее типичных внутренних задач конвекции данный подход является корректной основой для расчетов и оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джалурия Й. Естественная конвекция. М.: Мир, 1983. 399 с.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 576 с.
3. Кимура, Бежан. Свободная конвекция в режиме пограничного слоя внутри прямоугольной полости с равномерным тепловым потоком на боковых стенках//Тр. амер. о-ва инж.-мех. Теплопередача. 1984. Т. 106. № 1. С. 96—101.
4. Gill A. E. The boundary — layer regime for convection in a rectangular cavity//J. Fluid Mech. 1966. V. 26. № 3. P. 515—536.
5. Hess C. F., Miller C. W. Natural convection in a vertical cylinder subject to constant heat flux//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 22. № 3. P. 421—430.
6. Тарасюк В. А., Шорохова М. И. Влияние кривизны поверхности и стратификации внешней среды на свободноконвективную теплоотдачу//Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. № 3. С. 513—518.
7. Черкасов С. Г. Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде//Численные методы механики сплошной среды. 1984. Т. 15. № 5. С. 144—153.
8. Sparrow E. M., Gregg J. L. Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux//J. Heat Transfer. 1956. V. 78. № 2. P. 435—440.
9. Черкасов С. Г. Квазистационарный режим естественной конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 146—152.
10. Войтешонок В. С., Черкасов С. Г. Автомодельный режим тепловой стратификации при естественной конвекции в емкостях//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 19—24.
11. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное решение нестационарных уравнений Навье — Стокса для турбулентного режима естественной конвекции: Препринт № 81. М.: ИПМ АН СССР. 1977. 56 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1991