МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1993

УДК 53:.6.011.55:532.526.2

© 1993 г. Т. В. КОНОТОП, В. Н. ТРИГУБ

ОБТЕКАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕРОВНОСТЕЙ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ОХЛАЖДЕННОМ ТЕЛЕ

Исследуется обтекание малых пространственных неровностей на поверхности холодного тела гиперзвуковым потоком газа. Установлены основные параметры задачи, определяющие физические особенности течения в пристеночном вязком слое. Численно исследованы решения краевой задачи о вязком подслое при обтекании клина конечного размаха на линии симметрии клина, показано влияние параметров подобия. Сильное охлаждение поверхности обтекаемого тела при гиперзвуковых скоростях внешнего течения приводит к увеличению числа Маха внутри слоя, в результате чего пограничный слой может стать закритическим. Закритический пограничный слой реагирует на изменение давления как сверхзвуковая струйка тока. В этом случае возмущения проникают вверх по течению лишь на расстояния, сравнимые с толщиной невозмущенного пограничного слоя. Такие режимы обтекания реальны при полетах аппаратов с гиперзвуковой скоростью.

Наибольший интерес здесь представляет исследование обтекания локальных неровностей, моделирующих различные элементы конструкций аппаратов, так как вблизи даже малых неровностей могут образовываться зоны повышенных тепловых потоков [1]. В [2, 3] было исследовано обтекание двумерных неровностей, для которых проведена классификация режимов течения, получены примеры численных решений. Отдельные режимы обтекания малых пространственных неровностей рассмотрены в [4—8], там же представлены численные решения линеаризованных краевых задач.

В [9] рассматривалась двумерная задача обтекания охлажденного тела с установленным на нем щитком на режиме слабого гиперзвукового взаимодействия. Было получено распределение индуцированного давления по области взаимодействия. Основной особенностью решения стала зависимость функционального вида распределения возмущения давления от интеграла Пирсона

$$L = \int_0^{\delta^-} \left(\frac{1}{M_0^2(y)} - 1 \right) dy$$

где $M_0(y)$ — профиль числа Маха невозмущенного пограничного слоя с толщиной δ. Оказалось, что при $L > 0$ увеличение давления происходит до щитка (такой режим назван докритическим), а при $L < 0$ область возмущения лежит за угловой точкой (закритический режим). Результаты [9] были использованы в работе [10], где проведен расчет вязкого подслоя и получены распределения тепловых потоков на стенке для различных углов отклонения щитка.

В настоящей работе исследуется обтекание трехмерной неровности, расположенной на дне гиперзвукового пограничного слоя на охлажденной поверхности.

1. Постановка задачи. Пусть на поверхности пластины на достаточном расстоянии от ее передней кромки (там, где реализуется режим слабого взаимодействия) находится небольшая пространственная выпуклость.

Введем декартову систему координат так, чтобы ось X_p совпадала с направлением невозмущенного набегающего потока, ось Z_p была перпендикулярна X_p на плоскости пластины, а Y_p — перпендикулярна плоской поверхности. Предполагается, что характерная толщина неровности по порядку величины меньше толщины невозмущенного пограничного слоя δ на пластине, а ее протяженность l больше характерной толщины пограничного слоя δ. Ширина неровности предполагается сравнимой с ее длиной. Поперечный характерный размер неровности $y_p = \delta\sigma h\cdot(x_p/l,\, z_p/l)$, где $h\,(x_p/l,\, z_p/l)$ —форма поверхности, $\sigma << 1$. Для простоты ограничимся рассмотрением течения совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями c_p и c_v, $c_p/c_v = \gamma$.

Пусть u, v, w — компоненты скорости в прямоугольной системе координат x_p, y_p, z_p, ρ — плотность, P_p — давление, T — температура. Считаем, что до неровности реализуется режим слабого гиперзвукового взаимодействия при $M_e \to \infty$, где M_e — число Маха невозмущенного набегающего потока. Ниже индекс e употребляется для параметров в невозмущенном набегающем потоке.

Рассмотрим сначала течение в области, включающей в себя основную часть невозмущенного пограничного слоя.

Предельное состояние течения над плоской пластиной при $M_e \to \infty, \mathrm{Re} \to \infty, y = y_p/\delta = O(1)$ — плоскопараллельный поток вдоль оси x_p с распределением скорости $u = u_e u_0(y), v = 0, w = 0$ и плотности $\rho = P_e u_e^{-2}\rho_0(y)$. Начальные невозмущенные профили скорости $u_0(y)$ и плотности $\rho_0(y)$ имеют конечную толщину $y_p = \delta$.

Для плоских течений при достаточно малых значениях температурного фактора g_w, характеризующего величину отношения энтальпии газа на поверхности тела к энтальпии торможения внешнего сверхзвукового потока, главный вклад в изменение толщины пограничного слоя при возмущении давления вносит основная по толщине часть пограничного слоя [9, 10]. Полагаем, что градиент давления, индуцируемый неровностью, велик. Это приводит к выводу, что влияние сил вязкости на течение в этой области несущественно, а изменения функций малы, поскольку предполагается, что мало индуцированное давление. Представим решение задачи в области $y = O(1)$ в виде асимптотического разложения

$$u = u_e\,[u_0(y) + \sigma u_1(x, y, z) + \ldots],\quad v = u_e\tau v_1(x, y, z) + \ldots \tag{1.1}$$

$$w = u_e\sigma w_1(x, y, z) + \ldots$$

$$p_p = p_e\,[1 + \sigma p_1(x, z) + \ldots]$$

$$\rho = \frac{p_e}{u_e^2}\,[\rho_0(y) + \sigma\rho_1(x, y, z) + \ldots]$$

$$\tau = \delta/l << 1,\quad x_p = lx,\quad y_p = \tau l y,\quad z_p = lz$$

Подстановка разложений (1.1) в уравнение Навье — Стокса и совершение предельного перехода $\tau \to 0, \sigma \to 0$ приводят в первом приближении к системе уравнений, решение которой, удовлетворяющее условиям непротекания, может быть получено в виде

$$w_1 = -\frac{u_0}{\gamma M_0^2}\, g$$

$$v_1 = u_0\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_0}{\gamma}\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}L + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(L + 1)\right] \tag{1.2}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\gamma}\rho_0 p_1 - \rho_0' h(x, z) - \frac{1}{\gamma}\rho_0'\,[p_1 L + \varphi(L + 1)]$$

$$u_1 = -\frac{p_1}{\rho_0 u_0} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\left[h(x, z) + \frac{p_1}{\gamma}L + \frac{\varphi}{\gamma}(L + 1)\right]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z},\quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z},\quad p_1 \equiv p(x, z)$$

Здесь $p(x, z)$ — произвольная функция, которая будет определена в дальнейшем.

Рассмотрим возмущенное течение в области внешнего потока над неровностью. Возмущение толщины пограничного слоя $\Delta\delta/\delta = O(\tau\sigma)$ вызывает, по оценкам линейной теории, возмущение давления на внешней границе $\Delta p/p = O(\mathrm{M}_e\sigma\tau)$. Значит, для того чтобы внешнее возмущение давления соответствовало по порядку возмущению внутри слоя ($\Delta p/p = O(\sigma)$), необходимо положить $\tau = 1/\mathrm{M}_e$. Толщина внешней области определяется наклоном характеристик, что позволяет принять в качестве вертикальной координаты в этой области переменную $\eta = y - 1$. В рамках точности первого приближения течение будет оставаться изэнтропическим. Из решения уравнений в виде (1.1) следует вид соответствующих разложений в области внешнего гиперзвукового потока

$$u = u_e\,[1 + \tau^2\sigma u_1\,(x, \eta, z) + \dots] \tag{1.3}$$

$$v = u_e\tau\sigma v_1\,(x, \eta, z) + \dots, \quad w = u_e\tau^2\sigma w_1\,(x, \eta, z) + \dots$$

$$p = p_e\,[1 + \sigma p_1\,(x, \eta, z) + \dots], \quad \rho = \rho_e\,[1 + \sigma\rho_1\,(x, \eta, z) + \dots]$$

Подстановка разложений (1.3) в уравнение Эйлера приводит в первом приближении к системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}$$

$$p_1 = \gamma\rho_1, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_1}{\partial z}$$

Учитывая, что на характеристиках, приходящих на границу пограничного слоя, возмущение отсутствует, можно получить связь функций на границе $\eta = 0$: $v_1 = \rho_1 = p_1/\gamma = -u, \eta = 0$.

Проводя сращивания вертикальной компоненты скорости v_1, получаем уравнение, замыкающее поставленную задачу

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}L + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L + 1)\right] \tag{1.4}$$

2. Распределения давления, индуцированного клином конечного размаха. В качестве примера рассмотрим обтекание клина конечного размаха $-a \le z \le a$ с малым углом α, установленного на дне пограничного слоя на пластине при $x > 0$. Координаты верхней поверхности клина выражаются через толщину пограничного слоя δ, параметр σ и введенную ранее функцию $h(x, z)$ в виде $y_p = \delta\sigma h(x, z)$, продольная координата $x_p = \delta \mathrm{M}_e x$, следовательно, $\alpha = \delta\sigma h(x, z)/\delta\mathrm{M}_e x$, $h = \alpha\mathrm{M}_e x/\sigma$ при $-a \le z \le a$. Выберем малый параметр $\sigma = \alpha\mathrm{M}_e \ll 1$, тогда в безразмерных переменных

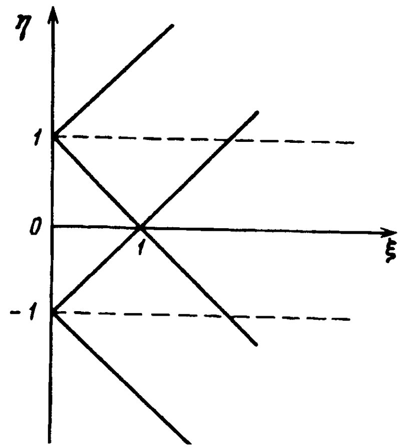
$$h\,(x, z) = x, \quad x > 0, \quad -a \le z \le a$$

$$h\,(x, z) = 0, \quad |x| > 0, \quad z \notin (-a, a)$$

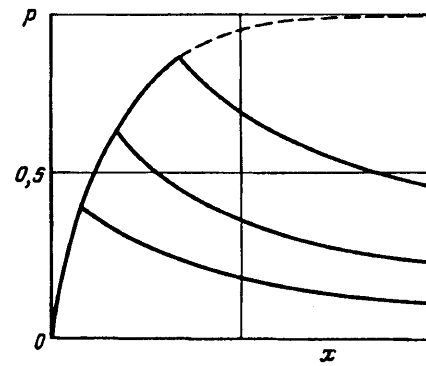
Уравнение для возмущения давления (1.4) представимо в виде

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}L + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}(L + 1) = \frac{\partial p_1}{\partial x} - \gamma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

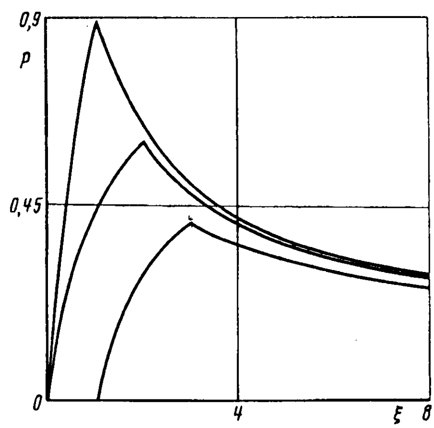
Рассмотрим прежде всего случай $L < 0$. При закритическом режиме ($L < 0$) возмущения от препятствия не проникают вверх по течению и на линии $x = 0$ давление остается невозмущенным $p_1(0, z) = 0$. Требуя непрерывности давления при переходе через линию $x = 0$, приходим к краевой задаче в области $x > 0$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} L + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} (L + 1) = \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$p_1 (0, z) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} (0, z) = \begin{cases} -\gamma / L & (-a \le z \le a) \\ 0 & (|z| > a) \end{cases}$$

Выполнив замену переменных, приведем задачу (2.2) к виду

$$\eta = \frac{z}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a\sqrt{-L(L+1)}}, \quad p_1 (x, z) = U (\xi, \eta) \exp\left(-\frac{1}{2} \theta \xi \right),$$

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{-L(L+1)}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{\theta^2}{2} U = 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad \zeta > 0 \tag{2.3}$$

$$U (0, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} (0, \eta) = \begin{cases} \gamma\theta & |\eta| \le 1 \\ 0 & |\eta| > 1 \end{cases}$$

При заданном значении адиабаты решение задачи (2.2)—(2.3) зависит от единственного параметра θ и представляется в виде

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma\theta}{2} \int\limits_{\eta-\xi}^{\eta+\xi} S(\lambda) I_0 \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{\xi^2 - (\eta - \lambda)^2} \right) d\lambda \tag{2.4}$$

Здесь $I_0(z)$ — функция Бесселя, $S(\lambda) = 1$ при $-1 \le \lambda \le 1, S(\lambda) = 0$ при $|\lambda| > 1$.

Область интегрирования показана на фиг. 1. На характеристиках, изображенных на схеме, первые производные функции U, p_1 по нормали к характеристикам терпят разрывы, а сами функции непрерывны. Возмущения распространяются только при $\xi > 0$, т. е. до начала клина

$$U(\xi, \eta) = 0, \;\; p_1(x, z) = 0, \;\; \eta > \xi + 1, \;\; \eta < -\xi - 1$$

Покажем, что при $a \to \infty$ решение гиперболической краевой задачи (2.4) для щитка конечного размаха a переходит в решение двумерной задачи об обтекании щитка бесконечного размаха, полученное в [9].

Представим решение (2.4) в виде

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma\theta}{2} \int\limits_{\eta-\xi}^{\eta+\xi} S(\lambda) I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{L^2} - \frac{(a\lambda - z)^2}{|L(L+1)|}} \right) d\lambda$$

Проведем замену переменных

$$t = \frac{a\lambda - z}{\sqrt{|L(L+1)|}}, \;\; \lambda = \eta + \xi, \;\; t = \frac{x}{|L|}, \;\; \lambda = \eta - \xi, \;\; t = -\frac{x}{|L|}$$

Для любой точки внутри характеристического треугольника ($s(\lambda) = 1$)

$$U = \frac{1}{2}\gamma \int\limits_{-x_1}^{x_1} I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 - t^2} \right) dt = 2\gamma \int\limits_0^{x_2} \frac{I_0(\tau)\, \tau\, d\tau}{\sqrt{x_2^2 - \tau^2}}$$

$$x_1 = \frac{x}{|L|}, \;\; x_2 = \left| \frac{x}{2L} \right|, \;\; \tau = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 - t^2}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} I_0(x)\, dx = sh a, \;\; a > 0$$

получаем $U = \gamma\,(e^{-x/2L} - e^{x/2L})$.

Давление имеет вид $p_1 = U_e^{-1/2\theta\xi}$, а так как $-{}^1/_2\theta\xi = x/2L$, приходим к тому же, что и в [9], выражению для возмущения давления для $x > 0$ и $L < 0$: $p_1 = \gamma(1 - e^{x/L})$.

Результат справедлив без какого-либо предельного перехода для любой точки внутри характеристического треугольника. Это естественно, поскольку течение в этой области не испытывает влияния краев клина.

Результаты численного интегрирования уравнения (2.4) представлены на фиг. 2, где показаны распределение давления $p_1(x)$ на линии симметрии и влияние параметра подобия θ (пунктирная линия соответствует обтеканию плоского щитка). Значение параметра θ фактически является координатой расположения точки пересечения характеристик. На фиг. 3 представлены графики продольного распределения давления при различных значениях координаты размаха η, которая менялась от $\eta = 0$ (линия симметрии) до $\eta = 2$ с шагом $\Delta\eta = 1$.

Рассмотрим случай докритического режима обтекания неровности, $L > 0$. Задача является эллиптической. В этом случае увеличение давления происходит до препятствия. Потребуем непрерывности давления при переходе через линию $x=0$ и выполнения условия затухания $p_1 \to 0$ при $x^2 + z^2 \to \infty$.

Выполняя замену переменных в уравнении (2.1), преобразуем задачу к виду

$$\eta = \frac{z}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{L+1}{L}}.$$

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad p_1 = U(\xi, \eta)\, e^{\frac{1}{2}\theta\xi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\theta^2}{4} U = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\Big|_{0^+} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\Big|_{0^-} = -\gamma\theta \quad (-1<\eta<1)$$

$$U(\xi, \eta)\, e^{-\frac{1}{2}\theta\xi} \to 0, \quad \xi^2 + \eta^2 \to \infty$$

Функция $U(\xi, \eta)$ непрерывна на линии $\xi = 0$, $-1 < \eta < 1$. Решение задачи (2.5) имеет вид

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma\theta}{2\pi} \int_{-1}^{1} K_0\left(\frac{\theta}{2}\sqrt{\xi^2 + (\eta - \lambda)^2}\right) d\lambda \tag{2.6}$$

где K_0 — функция Бесселя 2-го рода.

Покажем, что в пределе $a \to \infty$, $x = O(1)$, $z = O(1)$ решение (2.6) переходит в решение задачи о щитке бесконечного размаха [9]. Представим решение (2.6) в виде

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma\theta}{2\pi} \int_{-1}^{1} K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{L^2} + \frac{(z - a\lambda)^2}{L(L+1)}}\right) d\lambda$$

Проводя замену переменной

$$t = \frac{a\lambda - z}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad t_1 = \frac{-a - z}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad t_2 = \frac{a - z}{\sqrt{L(L+1)}}$$

получаем

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{L^2} + t^2}\right) dt$$

При $z = O(1)$, $a \to \infty$ пределы интегрирования стремятся соответственно к $+\infty$ и $-\infty$.

Вводя новую переменную $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{x^2/L^2 + t^2}$ и учитывая, что

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{K_0(\tau)\,\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

получаем выражения для U при $a \to \infty$, $z = O(1)$, $x = O(1)$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{L^2} + t^2}\right) dt = \frac{2\gamma}{\pi} \int_{|x/2L|}^{\infty} \frac{K_0(\tau)\,\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2/L^2}} = \gamma e^{|x|/2L}$$

Тогда возмущение давления p_1 принимает вид

$$p_1 = U e^{\frac{1}{2}\theta\xi} = \gamma e^{-|x|/2L} e^{x/2L} = \begin{cases} \gamma, & x > 0 \\ \gamma e^{x/L}, & x < 0 \end{cases}$$

что совпадает с результатом работы [9].

3. Расчет вязкого подслоя на линии симметрии. Полученные результаты позволяют провести расчеты течения в вязком подслое и определить тепловые потоки, вызванные наличием клина конечнсго размаха.

При $y = O(\sigma^2)$ располагается слой, возмущения в котором нелинейные. Заметим, что по толщине он существенно меньше толщины неровности. Выберем масштаб σ так, чтобы в нелинейном подслое $y = O(\sigma^2)$ действовали силы вязкости. Пусть вязкость линейно зависит от температуры, а число Прандтля равно единице. Определим число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_e u_e L_1/\mu_e$, где L_1 — расстояние от начала пластины до неровности, μ_e — коэффициент вязкости. Тогда толщина пограничного слоя над неровностью $\sigma \sim L_1 \mathrm{M}_e^2 \mathrm{Re}^{-1/2}$. Для того чтобы в нелинейном подслое действовала вязкость, должно быть выполнено условие $\sigma = \chi^{1/3}$, где $\chi = \mathrm{M}_e^3 \mathrm{Re}^{-1/2}$. Тогда, определяя $\sigma = \chi^{1/3}$, $l = L_1 x$, при $y = O(\sigma^2)$ получим следующее представление решения:

$$u_p = u_e\chi^{1/3} u\,(x, y, z) + \ldots, \quad v_p = u_e\chi \mathrm{M}_e^{-1} v\,(x, y, z) + \ldots$$

$$w_p = u_e\chi^{1/3} w\,(x, y, z) + \ldots, \quad \rho_p = \rho_e \mathrm{M}_e^{-2}\chi^{1/3}\rho\,(x, y, z) + \ldots$$

$$p_p = p_e\,[1 + \gamma\chi^{1/3} p\,(x, y, z) + \ldots, \quad n_p = u_e^2\chi^{1/3} h\,(x, y, z) + \ldots \qquad (3.1)$$

$$\mu_p = \mu_e\,(\gamma - 1)\,\chi^{1/3}\mathrm{M}_e^2 h\,(x, y, z) + \ldots$$

$$x_p = L_1\chi x, \quad y_p = L_1\chi^{5/3}\mathrm{M}_e^{-1} y, \quad z_p = L_1\chi z$$

Подставляя разложения (3.1) в уравнения Навье — Стокса и совершая предельный переход $\chi \to 0$, $\mathrm{M}_e \to 0$, приходим к системе уравнений трехмерного пограничного слоя.

Ограничимся рассмотрением решений на линии симметрии для случая закритического режима ($L < 0$). Переходя к переменным Дородницына

$$x = x, \quad z = z, \quad \eta = \int_0^y \rho\, dy$$

и вводя функции $F = w/z, f_1, f_2$ так что $u = \partial f_1/\partial\eta$, $F = \partial f_2/\partial\eta$, $V = -\partial f_1/\partial x - f_2$, получим на линии симметрии систему уравнений

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} = -h_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1^2}$$

$$u_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} + F_1^2 = h_1 \frac{\partial F_{1\infty}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \eta_1^2}$$

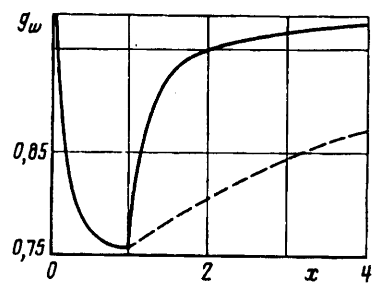
$$u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 h_1}{\partial \eta_1^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta_1} + F_1 = 0$$

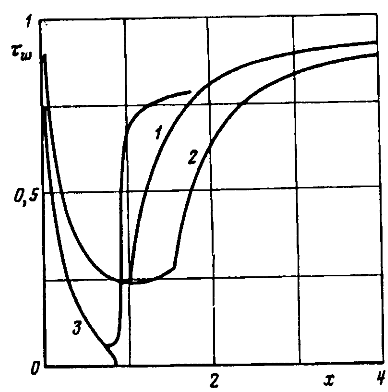
$$x = |L| x_1, \quad \eta = k\eta_1, \quad k = \left(\frac{L}{A}\right)^{1/3}$$

$$u = Aku_1, \quad V = \frac{V_1}{k}, \quad F = \frac{F_1}{k^2}$$

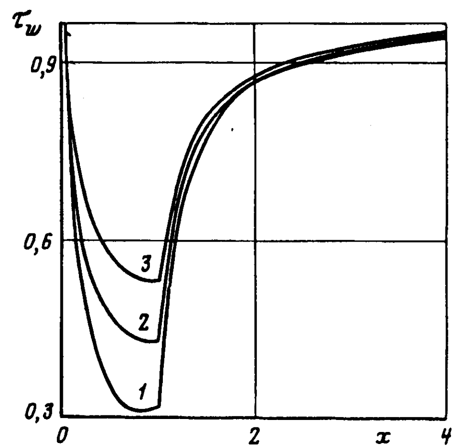
$$h = Bkh_1, \quad h_{w_1} = 0{,}5 g_w \frac{\chi^{-1/3}}{Bk}$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$$\alpha_1 = \frac{\alpha\,(\gamma - 1)}{A^2 k}\, B\mathrm{M}_\infty \chi^{-1/3}$$

$$A = 0{,}5 c_f \,\mathrm{Re}^{1/2}, \quad B = 0{,}5\ \mathrm{St}\,\mathrm{Re}^{1/2}$$

где c_f и St — коэффициент трения и число Стантона для невозмущенного слоя в том месте, где расположена неровность.

До начала клина ($x_1 < 0$) течения остается невозмущенным: $u_1 = \eta_1$, $h_1 = \eta_1 + h_{w_1}$, $p = 0$, $F_1 = 0$. От начала клина до места пересечения характеристик, идущих от его боковых граней ($0 \le x_1 \le \theta$), располагается область двумерного течения

$$F_1 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \alpha_1 e^{-x_1}, \quad u_1 = 0, \quad h_1 = h_{w_1} \quad (\eta_1 = 0)$$

$$u_1 = \eta_1 + O\,(\eta_1), \quad h_1 = \eta_1 + O\,(\eta_1) \quad (\eta_1 \to \infty)$$

Эффекты растекания проявляются только после пересечения характеристик в плоскости симметрии ($x_1 > \theta$). Здесь

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\,\alpha_1 e^{-1/2 x_1}\,\{J_1\,(x_1) + x_1 J_2\,(x_1)\}$$

$$F_{1\infty} = -\lambda\alpha_1 \left[\frac{1}{2}\, e^{-x_1/2}\,(J_1\,(x_1) + x_1 J_2\,(x_1)\,) - 1\right], \quad \lambda = \frac{|L|}{L + 1}$$

$$u_1 = F_1 = 0, \quad h_1 = h_{w1}\,(\eta_1 = 0)$$

$$u_1 = \eta_1 + O(\eta_1),\quad h_1 = \eta_1 + O(\eta_1),\quad F_1 = F_{1\infty} + O(1)\quad (\eta_1 \to \infty)$$

$$J_1 = \int_0^\theta I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - \tau^2}\right) d\tau,\quad J_2 = \int_0^\theta \frac{I_1(1/2\sqrt{\xi^2 - \tau^2})}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau$$

Таким образом, в задачу входят четыре независимых параметра: α_1 — приведенный угол отклонения клина, h_{w1} — приведенный температурный фактор, θ — приведенная ширина размаха клина, λ — величина, характеризующая степень закритичности пограничного слоя.

На фиг. 4—6 представлены результаты численных расчетов вязкого подслоя при обтекании клина конечного размаха на линии симметрии. Различие распределения тепловых потоков $q_w(x_1)$ на линии симметрии клина конечного размаха и для случая плоского обтекания (пунктирная линия) показано на фиг. 4 при $\alpha_1 = 0{,}3, h_{w1} = 1, \theta = 1$. Из результатов расчетов видно, что включение пространственных членов в систему уравнений качественно меняет вид решения.

На фиг. 5 представлены распределения поверхностного трения для различных значений параметра подобия θ: $\theta = 1$ соответствует кривой *1*, $\theta = 1{,}5$ — кривой *2*, $h_{w1} = 0{,}5, \alpha_1 = 0{,}5, \lambda = 0{,}1$. Следует подчеркнуть, что при $x_1 < \theta$ течение плоское, из поведения кривых *3* — $\tau_w(x)$ видно, что значение приведенной ширины размаха клина $\theta = 0{,}75$ соответствует еще безотрывному обтеканию ($\tau_{w\min} = 0{,}05$), а при $\theta = 1$ уже присутствует точка отрыва. На фиг. 6 показано влияние температурного фактора h_{w1} на распределение $\tau_w(x)$ при параметрах $\theta = 1, \alpha_1 = 0{,}35, \lambda = 0{,}1, h_{w1} = 1; 0{,}75; 0{,}5$ (кривые *1—3*). Увеличение h_{w1} приближает отрыв.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sedney R.* The effects of stready, three-dimensional perturbations in boundary layers//AIAA Pap. 1972. № 713. P. 14.
2. *Smith F. T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate//J. Fluid Mech. 1973. V. 57. № 4. P. 803—824.
3. *Боголепов В. В., Нейланд В. Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений//Аэромеханика. М.: Наука, 1976. С. 104—118.
4. *Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M.* A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump//J. Fluid Mech. 1977. V. 83. № 1. P. 163—176.
5. *Mason P. J., Sykes R. I.* Three-dimensional numerical integration on the Navier-Stokes equations for flow over surface-mounted obstracles//J. Fluid Mech. 1979. V. 91. № 3. P. 433—450.
6. *Липатов И. И.* Пространственное обтекание малой неровности ламинарным пограничным слоем//Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 2. С. 122—127.
7. *Боголепов В. В., Липатов И. И.* Исследование пространственных локальных ламинарных течений//ПМТФ. 1985. № 1. С. 28—36.
8. *Боголепов В. В.* Анализ режимов обтекания малых пространственных неровностей на поверхности тела//Тр. ЦАГИ. 1988. Вып. 2376. С. 3—29.
9. *Нейланд В. Я., Соколов Л. А.* К асимптотической теории зарождения отрыва около щитка при обтекании охлажденного тела гиперзвуковым потоком на режиме слабого гиперзвукового взаимодействия//Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 3. С. 25—34.
10. *Конотоп Т. В.* Вязкий подслой в окрестности угловой точки при обтекании охлажденного тела сверхзвуковым потоком//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 142—147.

Москва

Поступила в редакцию
16.IX.1991