

УДК 533.6.011.5

© 1993 г. В. А. БАШКИН, В. Н. ШАБАНОВ

ОБТЕКАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С МАЛЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПО РАЗМАХУ

Методом сращиваемых внешних и внутренних асимптотических разложений исследована задача об обтекании сверхзвуковым потоком совершенного газа полубесконечной поверхности с продольным оребрением, образованной путем наложения на плоскую пластину малых возмущений, изменяющихся по размаху по гармоническому закону. Отношение максимума амплитуды возмущения поверхности к толщине пограничного слоя имеет порядок $Re^{-1/4}$. Решение задачи получено с учетом четырех членов разложения.

За последние годы проявляется большой интерес к исследованию влияния поперечных возмущений (продольных ребер) обтекаемой поверхности на поле течения и коэффициенты сопротивления трения и теплопередачи. При обтекании пластины с продольным оребрением высота ребра сопоставима с толщиной пограничного слоя; кроме того, оребрение поверхности вызывает вторичное течение в пристеночном слое и поперечный отрыв потока. Вследствие этого для анализа развития течения около оребренной поверхности необходимо использовать полные или упрощенные уравнения Навье — Стокса или уравнения Рейнольдса. Расчеты показали (см., например, [1, 2]), что при движении несжимаемой жидкости наличие оребрения при определенных условиях приводит к снижению сопротивления.

Для выявления особенностей развития вторичного течения в окрестности оребренной поверхности в [3] было получено асимптотическое решение задачи об обтекании полубесконечной поверхности с продольным оребрением потоком несжимаемой жидкости. При этом предполагалось, что оребрение по размаху представляет собой гармоническую волну, амплитуда которой в продольном направлении возрастает пропорционально корню квадратному из продольной координаты; отношение максимальной амплитуды к толщине пограничного слоя имеет порядок $O(Re^{-1/4})$. Решение получено с учетом четырех членов асимптотических разложений.

При движении тел в сжимаемом газе волнистые поверхности применяются для снижения не только сопротивления трения, но и интенсивности аэродинамического нагрева обтекаемой поверхности. Например, в [4] экспериментально было установлено, что продольные ребра позволяют снизить средний уровень теплоотдачи примерно на 20% по сравнению с плоской поверхностью.

В настоящей работе асимптотический анализ работы [3] распространен на случай движения совершенного газа вдоль изотермической или адиабатической поверхности. При аналогичных предположениях методом сращиваемых внешних и внутренних асимптотических разложений получено решение задачи с учетом четырех членов разложения, поскольку только с четвертого члена разложения начинает проявляться пространственность течения.

1. Рассмотрим стационарное обтекание твердой поверхности однородным потоком совершенного газа в декартовой системе координат $x^* = xL$, $y^* = yL$, $z^* = zL$, ось x^* которой направлена по набегающему потоку, а ось z^* — по размаху поверхности. Здесь L — характерный линейный размер, а звездочкой обозначены размерные величины. Пусть $U^* = UU_\infty$, $V^* = VU_\infty$, $W^* = WU_\infty$ — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x^* , y^* , z^* соответственно, $\rho^* = \rho\rho_\infty$ — плотность, $P^* = P\rho_\infty U_\infty^2$ — давление, $H^* = HH_\infty$ — энтальпия торможения, $T^* = TT_0$ — температура, $\mu^* = \mu\mu_\infty$ — динамическая вязкость. Здесь индексом « ∞ » обозначены размерные параметры набегающего потока, T_0 — температура торможения

набегающего потока. Совершенный газ подчиняется уравнению состояния Клапейрона, имеет постоянное число Прандтля Pr и удельные теплоемкости, а динамическая вязкость зависит только от температуры.

Течение газа описывается системой уравнений Навье — Стокса, содержащей параметры подобия: $\alpha_0 = (U_\infty/U_{\max})^2$ и число Рейнольдса $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty L/\mu_\infty$, где $U_{\max} = (2H_\infty)^{1/2}$ — максимальная скорость невязкого течения. На искомое решение, как обычно, накладываются условия прилипания, условие изотермичности либо теплоизолированности на обтекаемой поверхности и условие затухания возмущений на бесконечности.

Влияние поперечной кривизны на структуру поля течения исследуем на примере обтекания под нулевым углом атаки поверхности, слабо отличающейся от плоской пластины, и зададим ее форму в виде $y = \varepsilon_1 \sqrt{x} A(z)$, где ε_1 — малый параметр, а $A(z) = O(1)$ — периодическая функция с периодом $2\pi\Lambda/L$. Выберем в качестве характерного линейного размера L длину волны Λ .

Будем предполагать, что движение газа происходит при больших числах Рейнольдса ($\varepsilon = 1/Re_\infty^2 \ll 1$) и выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \ll \varepsilon_1 \ll \varepsilon \quad (1.1)$$

Для применения метода сращиваемых асимптотических разложений поле течения разбивается на две области — внешнюю и внутреннюю.

Во внешней области независимые переменные порядка единицы. В силу этого система уравнений Навье — Стокса с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ совпадает с системой уравнений Эйлера и, следовательно, с указанной точностью во внешней области течения полная энергия остается постоянной ($H = \text{const}$), а поле скоростей является потенциальным. Искомое решение должно удовлетворять внешним граничным условиям и условиям сращивания с решением для внутренней области.

Для внутренней области, где инерционные силы, силы давления и силы внутреннего трения в главных своих членах имеют один и тот же порядок, справедливы следующие оценки: координаты $x, z = O(1)$; нормальная координата $y = O(\varepsilon)$; нормальный компонент скорости $V = O(\varepsilon)$; поперечный компонент скорости $W = O(\varepsilon_1)$, поскольку его появление обусловлено возмущением поверхности; остальные газодинамические переменные имеют порядок единицы.

С учетом указанных оценок для внутренней области введем новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{(y - y_s)}{\varepsilon \sqrt{x}} = \frac{y}{\varepsilon \sqrt{x}} - \sigma A(z), \quad \zeta = z \quad (1.2)$$

$$U = u, \quad V = \varepsilon v/\xi^{1/2}, \quad W = \varepsilon_1 w, \quad P = p$$

где $\sigma = \varepsilon_1/\varepsilon$ — дополнительный малый параметр ($\sigma \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу предположения (1.1)).

В результате преобразований система уравнений Навье — Стокса примет вид

$$\xi \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} - \frac{1}{2}(\eta + \sigma A) \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} + \varepsilon_1 \xi \frac{\partial(\rho w)}{\partial \zeta} = O(\varepsilon^2) \quad (1.3)$$

$$\rho \left(\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2}(\eta + \sigma A) u \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} + \varepsilon_1 \xi w \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = -\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = O(\varepsilon^2) \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_1 \rho \left(\xi u \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{2}(\eta + \sigma A) u \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = -\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\xi u \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{1}{2} (\eta + \sigma A) u \frac{\partial H}{\partial \eta} + v \frac{\partial H}{\partial \eta} + \varepsilon_1 \xi w \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial H}{\partial \eta} + 2 \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \alpha_0 \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Искомое решение удовлетворяет внутренним граничным условиям и условиям срачивания с решением для внешней области.

Для установления связи между малыми параметрами $\sigma = \varepsilon_1/\varepsilon \gg \varepsilon \gg \varepsilon_1$, воспользуемся уравнением импульсов (1.6). В этом уравнении главные инерционные и диффузионные члены имеют порядок ε_1 . Параметр σ является старшим и по нему строятся асимптотические разложения, следовательно, градиент давления $\partial P/\partial \xi = O(\sigma^n)$, где n — целое число, характеризующее номер члена асимптотического разложения, начиная с которого в потоке появляется поперечный градиент давления. Поскольку главные члены разложения должны иметь один и тот же порядок, то получим: $\varepsilon_1 = (\varepsilon_1/\varepsilon)^n$ или $\varepsilon_1 = \varepsilon^{n/(n-1)}$. Отсюда с учетом (1.1) приходим к неравенству $2 > n/(n-1) > 1$, которое выполняется при $n \geq 3$. Примем $n = 3$, что соответствует случаю наиболее раннего появления поперечного градиента давления в асимптотическом решении. Тогда будем иметь $\varepsilon_1 = \varepsilon^{3/2}$, $\sigma = \varepsilon^{1/2}$.

Асимптотическое решение задачи будем строить в виде ряда по малому параметру $\sigma = \varepsilon^{1/2}$, т. е. каждая газодинамическая функция $F(x, y, z)$ для внешней области и $f(\xi, \eta, \zeta)$ для внутренней области представляется асимптотическими рядами

$$F(x, y, z) = \sum_0^{\infty} F_n(x, y, z) \sigma^n, \quad f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_0^{\infty} f_n(\xi, \eta, \zeta) \sigma^n \quad (1.8)$$

При этом компоненты вектора скорости, давление и энтальпия торможения определяются из уравнений Навье — Стокса, а плотность, температура и динамическая вязкость — с помощью алгебраических соотношений, вид которых зависит от модели газа.

При построении асимптотического решения предполагается, что области существования решений для внешней и внутренней областей течения пересекаются между собой и, следовательно, срачивание этих решений можно проводить на основе принципа предельного перехода [6].

Внешняя задача имеет меньший порядок по сравнению с внутренней задачей: она удовлетворяет внешним граничным условиям, а недостающее граничное условие устанавливается из условия срачивания нормального компонента скорости.

Внутренняя задача удовлетворяет внутренним граничным условиям и условиям срачивания касательных компонентов скорости, давления и энтальпии торможения.

Для внутренней области задача в конечном итоге сводится к численному интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку независимая переменная η изменяется на полубесконечном интервале, то для искомых функций были получены асимптотические решения при $\eta \rightarrow \infty$; на основе этих решений были установлены асимптотические соотношения, которые использовались в качестве внешних граничных условий при численном анализе соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. В нулевом приближении имеем классическую постановку задачи об обтекании тела потоком вязкого газа при больших числах Рейнольдса. Решением задачи для внешней области является однородный набегающий поток, т. е.

$$U_0(x, y, z) = 1, \quad \rho_0(x, y, z) = 1, \quad P_0 = 1/\gamma M_\infty^2$$

где M_∞ — число Маха набегающего потока, γ — показатель адиабаты, а для

внутренней области — решение задачи Блазиуса, обобщенное на случай течения сжимаемой жидкости.

В первом приближении еще нет взаимодействия между внешним и внутренним течениями, поскольку «толщина» пограничного слоя имеет порядок малости $O(\varepsilon)$, а величина «шероховатости» — $O(\varepsilon)$.

Для внешней области течения имеем линейную однородную систему уравнений с однородными граничными условиями и, следовательно,

$$U_1(x, y, z) = V_1(x, y, z) = W_1(x, y, z) = \rho_1(x, y, z) = P_1(x, y, z) = 0$$

Для внутренней области течения получается система линейных неоднородных уравнений с нулевыми граничными условиями, которая имеет следующее решение:

$$u_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad v_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad 5A(\xi)u_0(\eta), \quad H_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

Отсутствие возмущения продольного и наличие возмущения нормального компонента скорости объясняются тем, что в пограничном слое компоненты вектора скорости имеют разный порядок: $u = O(1)$, $v = O(\varepsilon)$.

Во втором приближении течение во внешней области определяется системой однородных уравнений с неоднородными граничными условиями. Поскольку внешнее течение потенциально, то можно ввести потенциал скорости φ_2 , для которого получается линейное волновое уравнение со следующим граничным условием:

$$b^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{a}{\sqrt{x}}, \quad b = (M_\infty^2 - 1)^{1/2}, \quad a = \lim_{\eta \rightarrow \infty} v_0$$

Решение этого уравнения записывается в явном виде и позволяет получить формулы для возмущений газодинамических переменных:

$$u_2 = -\frac{a}{b\sqrt{x-by}}, \quad V_2 = \frac{a}{\sqrt{x-by}}, \quad W_2 = 0$$

$$P_2 = \frac{a}{b\sqrt{x-by}}, \quad H_2 = 0, \quad \rho_2 = M_\infty^2 \frac{a}{b\sqrt{x-by}} \quad (2.2)$$

Возникающая при $(x-by) \rightarrow 0$ сингулярность указывает на то, что решение задачи становится некорректным в окрестности передней кромки, поскольку эквивалентное тело является затупленным. Аналогичная ситуация имеет место в линеаризированной теории сверхзвуковых течений.

Система уравнений второго приближения для внутренней области с помощью преобразования

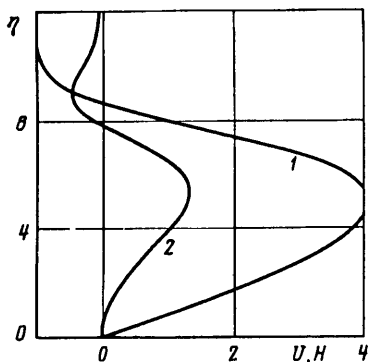
$$f_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{b\sqrt{\xi}} f_{20}(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.3)$$

где под $f_2(\xi, \eta, \zeta)$ понимается любая из искомым функций, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом уравнение неразрывности интегрируется в явном виде

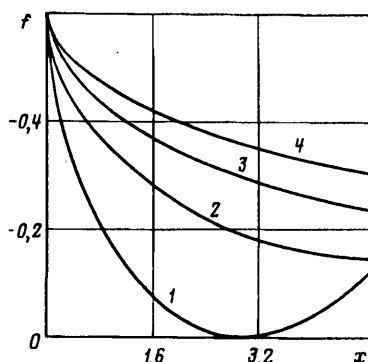
$$v_{20} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{2} \eta (\rho_0 u_{20} + \rho_{20} u_0) - \rho_{20} v_0 \right) \quad (2.4)$$

Задача свелась к следующей:

$$\rho_0 \left(-\frac{1}{2} u_0 u_{20} + \left(v_0 - \frac{1}{2} \eta u_0 \right) \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_0 \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + \mu_{20} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) \quad (2.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\rho_0 \left(-\frac{1}{2} u_0 H_{20} + \left(v_0 - \frac{1}{2} \eta u_0 \right) \frac{\partial H_{20}}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{Pr} \times \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_0 \frac{\partial H_{20}}{\partial \eta} + \mu_{20} \frac{\partial H_0}{\partial \eta} \right) + 2 \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_{20} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \mu_0 \left(u_0 \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + u_{20} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) \right) \quad (2.6)$$

$$u_{20} = 0, \quad H_{20} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H_{20}}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0)$$

$$u_{20} = -1, \quad H_{20} = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Возмущения продольного компонента скорости и полной энтальпии изменяются поперек области течения немонотонным образом (фиг. 1, где для $M_\infty = 4$ и $H_w = 0,6$ приведены профили возмущений: 1 — u_{20} , 2 — H_{20}); значения экстремумов (по модулю) возрастают по мере увеличения числа Маха (при $H_w = \text{const}$) и энтальпийного фактора (при $M_\infty = \text{const}$).

3. В решении третьего приближения впервые проявляется влияние «шероховатости» поверхности и появляется градиент давления по размаху тела.

Во внешней области потенциал возмущения $\varphi_3(x, y, z)$ определяется следующей задачей:

$$b^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{0,5A(z)}{\sqrt{x}} \quad (3.1)$$

Для гармонических возмущений поверхности по размаху тела $A(z) = \sin(z)$ решение уравнения (3.1) записывается в виде

$$\varphi_3(x, y, z) = f(x, y) \sin(z) \quad (3.2)$$

$$b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{0,5}{\sqrt{x}}$$

Уравнение (3.2) будем решать операционным методом [7]. Применяя преобразование Лапласа по x к искомой функции и граничным условиям

$$F(p, y) = \int_0^\infty (f(x, y) \exp(-px) dx), \quad C(p) = \int_0^\infty \frac{\exp(-px)}{2\sqrt{x}} dx \quad (3.3)$$

приходим к обыкновенному уравнению, решение которого с учетом условия об ограниченности его в поле течения записывается в явном виде

$$F(p, y) = -\frac{C(p)}{\sqrt{b^2 p^2 + 1}} \exp(-y\sqrt{b^2 p^2 + 1}) \quad (3.4)$$

Для анализа внутреннего решения третьего приближения необходимо найти внешнее решение при $y = 0$.

Функция $1/(p^2 + 1/b^2)$ является изображением для функции Бесселя первого рода $J_0(x/b)$. Согласно теореме умножения, получим

$$f(x, 0) = -\frac{1}{b} \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{x-t}} J_0\left(\frac{t}{b}\right) dt = -\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{2b(k!)^2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\frac{t}{b}\right)^{2k} dt = \sqrt{x} \sum_0^{\infty} C_k x^{2k} \quad (3.5)$$

$$C_k = \frac{2(2k-1)}{b^2(4k+1)(4k-1)k} C_{k-1}, \quad C_0 = -\frac{1}{b}$$

Решение для функции $f(x, 0)$ получено в виде ряда, который быстро сходится. Согласно результатам расчетов на рассматриваемых продольных размерах ($x < 7$) можно ограничиться пятью членами разложения. При этом максимальная погрешность расчета не превышает 0,1%. Поведение величины $f(x, 0)$, вычисленное с учетом шести членов разложения, показано на фиг. 2: 1 — $M_{\infty} = 2,5$; 2 — 4,0; 3 — 5,5; 4 — 7,0.

Возмущения газодинамических переменных связаны с функцией f и ее производной соотношениями:

$$U_3(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial x} \sin(z), \quad W_3(x, 0) = f \cos(z), \quad (3.6)$$

$$P_3(x, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x} \sin(z), \quad H_3(x, 0) = 0, \quad \rho_3(x, 0) = -M_{\infty}^2 \frac{\partial f}{\partial x} \sin(z)$$

и имеют сингулярный характер поведения в окрестности острой передней кромки пластины.

Для внутренней области течения решение задачи будем искать в виде

$$w_3 = \cos(\zeta) \sqrt{\xi} \sum_0^{\infty} \xi^{2k} w_{3k}$$

$$v_3 = \frac{\sin(\zeta)}{\sqrt{\xi}} \sum_0^{\infty} \xi^{2k} v_{3k} + 0,5u_2 A(\zeta) \quad (3.7)$$

$$F_3 = \frac{\sin(\zeta)}{\sqrt{\xi}} \sum_0^{\infty} \xi^{2k} F_{3k}$$

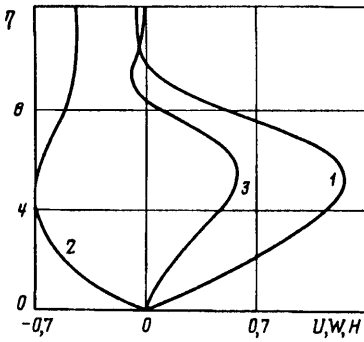
где F_3 есть любая искомая функция, кроме поперечной и нормальной составляющих скорости. Подставляя разложения (3.7) в определяющую систему уравнений и собирая члены с одинаковыми степенями при ξ , получим ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right) (\rho_0 u_{3k} + \rho_{3k} u_0) - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho_0 u_{3k} + \rho_{3k} u_0) +$$

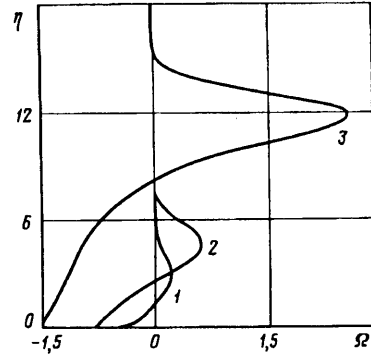
$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho_0 v_{3k} + \rho_{3k} v_0) - \rho_0 w_{3(k-1)} = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho_0 \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right) u_0 u_{3k} - \frac{1}{2} \eta \left(u_0 \frac{\partial u_{3k}}{\partial \eta} + u_{3k} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) + v_0 \frac{\partial u_{3k}}{\partial \eta} + v_{3k} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \rho_{3k} \left(v_0 - \frac{1}{2} \eta u_0 \right) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = \left(2k - \frac{1}{2}\right) C_k' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_0 \frac{\partial u_{3k}}{\partial \eta} + \mu_{3k} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) \quad (3.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\rho_0 \left(\left(2k + \frac{1}{2} \right) u_0 w_{3k} + \left(v_0 - \frac{1}{2} \eta u_0 \right) \frac{\partial w_{3k}}{\partial \eta} \right) = C_k' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_0 \frac{\partial w_{3k}}{\partial \eta} \right) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\left(2k - \frac{1}{2} \right) u_0 H_{3k} - \frac{1}{2} \eta \left(u_0 \frac{\partial H_{3k}}{\partial \eta} + u_{3k} \frac{\partial H_0}{\partial \eta} \right) + v_0 \frac{\partial H_{3k}}{\partial \eta} + v_{3k} \frac{\partial H_0}{\partial \eta} \right) + \\ + \rho_{3k} \left(u_0 - \frac{1}{2} \eta u_0 \right) \frac{\partial H_0}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \times \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_0 \frac{\partial H_{3k}}{\partial \eta} + \mu_{3k} \frac{\partial H_0}{\partial \eta} \right) + \\ + 2 \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu_0 \left(u_0 \frac{\partial u_{3k}}{\partial \eta} + u_{3k} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) + \mu_{3k} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$u_{3k} = v_{3k} = w_{3k} = 0, \quad H_{3k} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H_{3k}}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0) \quad (3.12)$$

$$u_{3k} = C_k', \quad w_{3k} = C_k, \quad H_{3k} = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

При этом $W_{3(k-1)} = 0$ при $k = 0$.

Для внутренней области решение было получено с учетом шести членов разложения, которых достаточно для описания профилей искомых функций на интервале $x \in (0, 7]$.

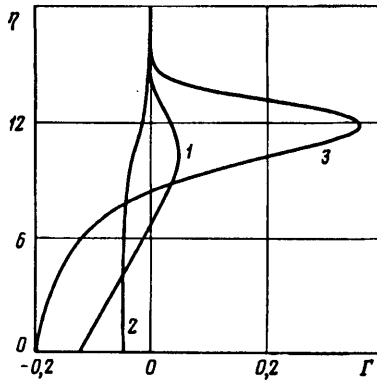
Возмущения искомых функций поперек области течения изменяются немонотонным образом (фиг. 3, где для $M_\infty = 4$, $H_w = 0,6$, $x = 3$ показаны профили возмущений: 1 — u_3 , 2 — w_3 , 3 — H_3). Экстремальные значения возмущений продольного компонента скорости и полной энтальпии (по модулю) в поле течения возрастают с ростом числа Маха и температурного фактора и уменьшаются с увеличением продольной координаты. Для возмущения поперечного компонента скорости его максимальное значение возрастает с ростом числа Маха и температурного фактора. С увеличением продольной координаты значение максимума сначала увеличивается, а затем уменьшается. При определенных условиях (например, при $M_\infty = 2,5$, $H_w = 0,6$, $x = 5$) начальный локальный экстремум исчезает, но вместо этого в пристеночной области возмущение скорости меняет знак и образуется новый экстремум.

4. Для исследуемой задачи вектор завихренности

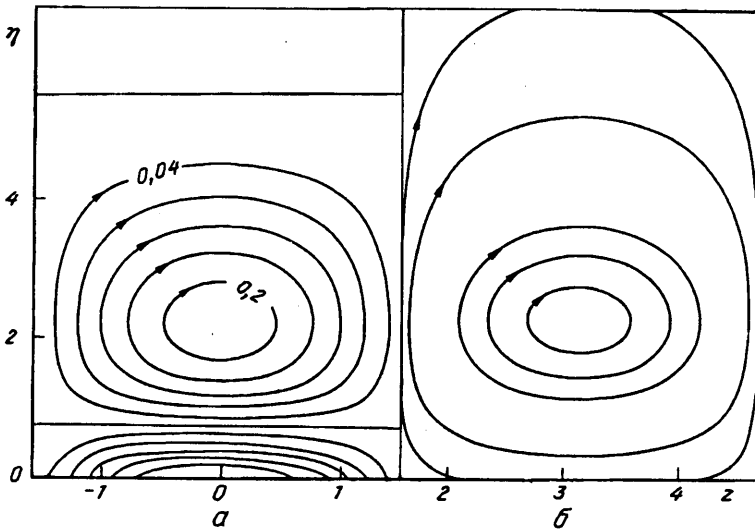
$$\vec{\omega}^* = \frac{1}{2} \text{rot} V^* = \frac{V_\infty}{2L\epsilon\sqrt{x}} (\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k)$$

отличен от нуля только во внутренней области течения; при этом вплоть до второго приближения он имеет лишь одну составляющую, направленную по размаху пластины, и только в третьем приближении появляются две другие составляющие.

В рамках нулевого приближения острая передняя кромка является источником



Фиг. 5



Фиг. 6

завихренности, которая далее вниз по потоку за счет вязкости диффундирует по полю течения; при этом полный поток завихренности через любое сечение $x = \text{const}$ один и тот же ($\Omega_0 = -0,5$). Завихренность ω_{20} отрицательна во всем поле течения (все частицы вращаются по часовой стрелке) и по модулю уменьшается по мере отхода от обтекаемой поверхности.

Возмущение завихренности во втором приближении зависит от продольной координаты: $\omega_{22} \sim 1/\sqrt{x}$. Изменение величины $\Omega = \sqrt{x} \omega_{22}$ поперек области течения является немонотонным (фиг. 4, где 1 — $M_\infty = 2,5$; $H_w = 0,2$; 2 — $M_\infty = 2,5$; $H_w = 0,6$; 3 — $M_\infty = 5,5$; $H_w = 0,6$); при этом с увеличением числа Маха и энтальпийного (температурного) фактора локальные экстремумы ω_{22} (по модулю) возрастают. Таким образом, в результате слабого вязко-невязкого взаимодействия завихренность в пристеночном слое возрастает, а в окрестности внешней границы пограничного слоя может образоваться вихревой слой с противоположным направлением вращения частиц газа; при этом по мере удаления от острой передней кромки эти возмущения завихренности затухают.

Поскольку течение в пограничном слое второго приближения происходит при наличии градиента давления, то в нем имеет место образование завихренности. В целом приращение завихренности имеет положительный знак, т. е. не совпадает

со знаком завихренности течения в нулевом приближении. Следовательно, полный поток завихренности через сечение $x = \text{const}$ уменьшается по модулю.

В третьем приближении имеем все три составляющие вектора завихренности. Профили возмущений этих составляющих имеют достаточно сложный характер поведения. В качестве примера на фиг. 5 для $M_\infty = 5,5$, $H_w = 0,6$, $x = 5,0$ показаны профили функций (1 — Γ_{x3} , 2 — Γ_{y3} , 3 — Γ_{z3})

$$\Gamma_{x3} = \frac{\sqrt{x} \omega_{x3}}{\cos(z)}, \quad \Gamma_{y3} = \frac{\omega_{y3}}{\cos(z)}, \quad \Gamma_{z3} = \frac{\sqrt{x} \omega_{z3}}{\sin(z)}$$

В таком представлении Γ_{y3} является знакопостоянной функцией и зависит только от определяющих параметров задачи: ее экстремальное значение по модулю уменьшается по мере увеличения температурного фактора и числа Маха. Величины Γ_{x3} и Γ_{z3} являются знакопеременными функциями, зависящими от определяющих параметров задачи и продольной координаты. Хотя в третьем приближении местная завихренность поля течения изменяется, ее вклад в суммарный поток завихренности через сечение $x = \text{const}$ на длине волны возмущения равен нулю.

Наличие составляющих ω_x , ω_y вектора завихренности говорит о том, что на фоне поля вихрей, оси которых направлены по размаху, образуется пространственная, периодическая по размаху структура вихрей. Для того чтобы получить некоторое представление об этой структуре, на фиг. 6, а приведены картины изолиний $\omega_x = \text{const}$, в сечении $x = 5$ при числе Маха $M_\infty = 2,5$ и температурном факторе $H_w = 0,6$. Можно видеть, что между двумя вершинами поверхности в поле течения формируются пары вихрей противоположного вращения (П-образные вихри); с увеличением температурного фактора интенсивность этих вихрей возрастает и они оттесняются от обтекаемой поверхности.

В нулевом, первом и втором приближениях течение плоское: все линии тока располагаются в плоскости $z = \text{const}$. В третьем приближении появляется поперечное течение, и поле возмущений становится пространственным с периодической структурой. Для того чтобы получить представление о картине течения во внутренней области, были построены в сечении $x = \text{const}$ псевдолинии тока согласно уравнению

$$\frac{d\eta}{v_1} = \frac{dz}{w_3}$$

Результаты расчетов показывают, что в области впадины волны невязкий газ всасывается в пограничный слой вихрями, расположенными в его внешней части, а в области гребня вытесняется во внешний невязкий поток (фиг. 6, б, где показаны псевдолинии тока для условий расчета: $M_\infty = 2,5$, $H_w = 0,6$, $x = 5$).

5. С точки зрения аэродинамического нагрева большой интерес представляет случай обтекания теплоизолированной поверхности: $q_w = 0$, $H_w = H_R$, где H_R — энтальпия восстановления; этот режим соответствует максимальному уровню температуры поверхности в условиях адиабатичности течения в целом. Величина H_R необходима также для определения коэффициентов теплопередачи (число Стантона) и перенесения результатов экспериментального исследования аэродинамического нагрева в аэродинамических установках на натурные условия. Энтальпия (температура) восстановления зависит от числа Маха и теплофизических характеристик; для выбранной модели среды число Прандтля $Pr < 1$ и, следовательно, $H_R < 1$. В рамках асимптотического решения задачи энтальпия восстановления запишется в виде следующего разложения:

$$H_R = H_{R0} + \sigma^2 H_{R2} + \sigma^3 H_{R3}$$

В нулевом приближении имеем классическую задачу о пограничном слое на теплоизолированной пластине. По известному значению H_{R0} определяется коэффициент восстановления энтальпии (температуры) r_0 ; его значение слабо уменьшается с ростом числа Маха и хорошо согласуется с расчетом по приближенной формуле $r_0 = \text{Pr}^{1/2}$ (максимальное различие между ними не превышает 1%). Этой формулой обычно пользуются в инженерной практике для расчета энтальпии (температуры) восстановления.

Возмущение второго порядка энтальпии восстановления зависит от числа Маха и продольной координаты; результаты расчетов для рассматриваемого диапазона чисел Маха ($2,5 < M_\infty < 7,0$) аппроксимируются с максимальной погрешностью 10% выражением

$$\sqrt{x} H_{R2} = 0,8 - 0,21M_\infty^2$$

При $M_\infty > 2,5$ это возмущение отрицательно и, следовательно, учет вязко-невязкого взаимодействия приводит к снижению уровня энтальпии (температуры) восстановления из-за наличия продольного градиента давления.

В третьем приближении возмущение энтальпии восстановления зависит от числа Маха и двух пространственных координат, причем зависимость от z записывается в явном виде: $H_{R3} \sim \sin(z)$. Величина $H_{R3}/\sin(z)$, как показывают расчеты, отрицательна и быстро уменьшается по модулю по мере удаления от передней кромки. Следовательно, энтальпия (температура) восстановления уменьшается на гребне волны и возрастает во впадине.

6. Полученное решение задачи позволяет оценить местные характеристики на обтекаемой поверхности: коэффициент давления C_p , коэффициенты сопротивления трения C_{F1} и C_{F2} , местный тепловой поток q_w

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{0,5\rho_\infty V_\infty^2} = \sum_0^3 C_{pN}\sigma^N$$

$$C_{F1} = \frac{\tau_{w1}}{0,5\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{(\mu\partial u/\partial y)_0}{0,5\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} \sum_0^3 C_{F1N}\sigma^N$$

$$C_{F2} = \frac{\tau_{w2}}{0,5\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{(\mu\partial w/\partial y)_0}{0,5\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} C_{F23}\sigma^3$$

$$q_w = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty H_\infty} = \frac{(\mu\partial H/\partial y)_0}{\text{Pr} \rho_\infty V_\infty H_\infty} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} \sum_0^3 q_N\sigma^N$$

В нулевом приближении имеем классическую задачу о развитии пограничного слоя на плоской пластине при нулевом градиенте давления ($C_{p0} = 0$). Эта задача хорошо известна, поэтому на результатах ее решения останавливаться не будем.

Решение первого приближения не дает вклада в рассматриваемые характеристики: $C_{p1} = C_{F11} = q_1 = 0$.

Решение второго приближения определяет возмущение местных характеристик, возникающее в результате вязко-невязкого взаимодействия. Возмущения коэффициентов давления C_{p2} и сопротивления трения C_{F12} обратно пропорциональны $x^{1/2}$ и являются положительными функциями; при этом значения величин $x^{1/2}C_{p2}$ и $x^{1/2}C_{F12}$ возрастают с увеличением числа Маха и температурного фактора. Расчеты показали, что в пределах точности вычислений возмущение теплового потока q_2 равно нулю.

В решении третьего приближения проявляются эффекты волнистости обтекаемой поверхности и зависимость от поперечной координаты z .

Составляющая коэффициента давления $C_{p3} = -\sin(z)\partial f/\partial x$; функция $\partial f/\partial x$ в

окрестности передней кромки пластины отрицательна и по мере продвижения вниз по потоку она возрастает, принимая положительные значения. Вследствие этого в окрестности передней кромки на гребне волны коэффициент давления подрастает, а во впадине уменьшается. По мере увеличения продольной координаты характер распределения коэффициента давления меняется на противоположный: на гребне волны давление понижается, а во впадине подрастает.

Возмущение третьего приближения C_{F13} зависит как от продольной, так и от поперечной координаты, причем зависимость от последней выражается явным образом: $C_{F13} \sim \sin(z)$. Поскольку величина $C_{F13}/\sin(z)$ является положительной функцией, то рассматриваемое приближение обуславливает рост коэффициента сопротивления трения на гребне волны и уменьшение его во впадине. Аналогичным образом ведет себя и возмущение теплового потока $q_3 \sim \sin(z)$.

Возмущение поперечного коэффициента сопротивления трения C_{F23} зависит от обеих координат, причем $C_{F23} \sim \cos(z)$. Расчеты показали, что в рассматриваемом диапазоне изменения определяющих параметров величина $C_{F23}/\cos(z)$ является отрицательной функцией и, следовательно, на гребне волны поперечный компонент напряжения трения отрицателен, а во впадине положителен.

Указанный характер влияния поперечных возмущений поверхности на местные коэффициенты сопротивления трения и теплопередачи качественно согласуется с результатами расчетов на основе полных и упрощенных уравнений Навье — Стокса и экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Djenidi L., Liandrat J., Anselmet F., Fulachier L.* Numerical and experimental investigation of the laminar boundary layer over riblets // *Appl. Sci. Res.* 1989. V. 46. № 3. P. 263—270.
2. *Khan M. M. S.* A numerical investigation of the drag reduction by riblet-surfaces // *AIAA Pap.* 1986. № 1127. P. 1—11.
3. *Wilson D. E., Lipp S.* The secondary flow due to small periodic transverse curvature on a semi-infinite plate // *AIAA Pap.* 1988. № 608. P. 1—8.
4. *Боголепов В. В., Бражко В. Н., Дозорова Л. В. и др.* Аэродинамическое нагревание волнистых поверхностей в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое // *Уч. зап. ЦАГИ.* 1987. Т. 18. № 6. С. 1—7.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.; 1987. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.XII.1991