

УДК 532.546

© 1993 г. В. Ф. ПИВЕНЬ

О ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОЯХ С ПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПРОВОДИМОСТЬЮ ВДОЛЬ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

На основе теории осесимметричных обобщенных аналитических функций [1, 2] и формул перехода [3] получены решения краевых задач двумерной фильтрации для широкого класса слоев, проводимость которых скачком изменяется вдоль кривых второго порядка. Особые точки этих функций моделируют произвольные двумерные течения. В пространстве решения описывают осесимметричную фильтрацию в средах, границами раздела однородности которых являются поверхности вращения второго порядка. Найденные решения применены к новым проблемам, связанным с природоохранными мероприятиями и работой водозаборов без загрязнения в сложных геологических условиях.

1. Рассмотрим двумерную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в неоднородном с коэффициентом проницаемости k слое переменной толщины h , расположенном на криволинейной поверхности с выбранной на ней изотермической сеткой координат ξ, η .

В этих координатах течение описывается квазипотенциалом скорости φ и функцией тока ψ , удовлетворяющими записанной в безразмерных величинах системе уравнений [4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (1.1)$$

где $P = kh$ — проводимость слоя. Если ξ, η интерпретировать как декартовы координаты плоскости, то слой будет располагаться на этой плоскости. К уравнениям (1.1) определенного вида квазиконформными преобразованиями сводятся наиболее общие уравнения двумерных процессов в анизотропных неоднородных средах [4].

В отличие от плоскопараллельного случая для двумерных течений в слоях переменной проводимости введем комплексный потенциал следующим образом [4]:

$$W = \varphi + i \frac{\psi}{P} \quad (1.2)$$

и запишем систему уравнений (1.1) в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} - A(\zeta, \bar{\zeta})(W - \bar{W}) = 0 \quad (1.3)$$

$$A(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \ln P(\zeta, \bar{\zeta}) \quad \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

Уравнение (1.3) определяет обобщенные аналитические функции, развитие полной теории которых (см. [5—7]) связано с принципиальной трудностью при нахождении фундаментальных решений этого уравнения для произвольных выражений P . В случае, когда

$$P = f^n(\xi, \eta) \quad (1.4)$$

($f(\xi, \eta)$ — положительная гармоническая функция, n — целое число),

уравнение (1.3) приводится к канонической форме, для которой известны фундаментальные решения.

Уравнение (1.3) ковариантно. Пусть W_n — комплексный потенциал течения в слое с законом (1.4). Тогда, используя (1.1), (1.2) и формулу перехода [3] $\varphi_{n+2} = \psi_n / f^{n+1}(\xi, \eta)$, получим для течения в слое с законом $P = f^{n+2}(\xi, \eta)$ комплексный потенциал

$$W_{n+2} = \omega_n + f^{-n-2} \int f^{n+2} \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial \omega_n}{\partial \eta} d\eta \right)$$

$$\omega_n = \frac{W_n - \overline{W}_n}{i2f}$$
(1.5)

Выберем связывающие плоскости $z = x + iy$ и ζ -конформное преобразование $z = F(\zeta)$ так, что $\text{Im } F(\zeta) = f(\xi, \eta) = y$. При этом граница $f(\xi, \eta) = 0$ области фильтрации в плоскости ζ перейдет в линию $y = 0$, и процесс будет развиваться в полуплоскости $z (\text{Im } z \geq 0)$. Квадрат элемента дуги в координатах x, y и ξ, η имеет вид [3]

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 = C^2(\xi, \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) \quad \left(C^2(\xi, \eta) = \left| \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right|^2 \right)$$
(1.6)

Применяя последовательно формулу (1.5), уравнение (1.3) при $n = 0$ и четных значениях приведем к уравнению Коши — Римана ($dW/dz = 0$). При нечетных n уравнение (1.3) записывается в канонической форме

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - \frac{W - \overline{W}}{2(z - \bar{z})} = 0 \quad \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$
(1.7)

Уравнение (1.7) можно интерпретировать как уравнение процессов в слое $P = y$ либо осесимметричных процессов [1, 2]. В этом случае (1.3) есть представление этого уравнения в изотермических криволинейных координатах ξ, η полуплоскости $z (\text{Im } z \geq 0)$.

Таким образом, чтобы исследовать краевую задачу в слоях (1.4) с любым нечетным n , необходимо преобразованием (1.5) свести ее к соответствующей задаче с каноническими границами в слое с $n = 1$. Ограничимся случаем, когда такими границами являются в полуплоскости $z (\text{Im } z \geq 0)$ кривые (в пространстве это поверхности вращения) второго порядка, и применим к отысканию решения разработанные в [1, 2] методы осесимметричных обобщенных аналитических функций.

2. Один из методов состоит в представлении решения задачи в виде обобщенного ряда Лорана по полной системе функций, удовлетворяющих уравнению (1.7). Такая система функций найдена [1, 2] в координатах x, y в виде положительных $Z^{(n)}$ и отрицательных $Z^{(-n)}$ формальных степеней, имеющих изолированные особые точки типа полюсов n -го порядка соответственно в бесконечности и произвольных точках полуплоскости $z (\text{Im } z \geq 0)$.

Введем в полуплоскости $z (\text{Im } z \geq 0)$ изотермическую сетку координат ξ, η , у которой координатные линии есть кривые второго порядка. Используя преобразование

$$z = c \operatorname{ch} \zeta \quad (x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta)$$
(2.1)

где и далее $c > 0, \xi \in [0, \infty[, \eta \in [0, \pi]$, получим сетку эллиптических координат. В этих координатах запишем формальные степени

$$Z^{(n)} = P_n(\operatorname{ch} \xi) P_n(\cos \eta) - \frac{i}{n(n+1)} P_n'(\operatorname{ch} \xi) P_n'(\cos \eta)$$
(2.2)

$$Z^{(-n)} = Q_n(\operatorname{ch} \xi) P_n(\cos \eta) - \frac{i}{n(n+1)} Q_n'(\operatorname{ch} \xi) P_n'(\cos \eta)$$

$$P_n'(\operatorname{ch} \xi) = \frac{dP_n(\operatorname{ch} \xi)}{d\xi}, \quad Q_n'(\operatorname{ch} \xi) = \frac{dQ_n(\operatorname{ch} \xi)}{d\xi}, \quad P_n'(\cos \eta) = \frac{dP_n(\cos \eta)}{d\eta}$$

где P_n и Q_n — функции Лежандра первого и второго рода.

Преобразование

$$z = c \operatorname{sh} \xi \quad (x = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta) \quad (2.3)$$

позволяет ввести другого вида сетку эллиптических координат, в которых

$$Z^{(n)} = i^n P_n(i \operatorname{sh} \xi) P_n(\cos \eta) - \frac{i^{n+1}}{n(n+1)} P_n'(i \operatorname{sh} \xi) P_n'(\cos \eta) \quad (2.4)$$

$$Z^{(-n)} = i^{n-1} Q_n(i \operatorname{sh} \xi) P_n(\cos \eta) - \frac{i^{n+1}}{n(n+1)} Q_n'(i \operatorname{sh} \xi) P_n'(\cos \eta)$$

Нетрудно убедиться, что (2.2) и (2.4) есть решения системы (1.1), а значит, удовлетворяют уравнению (1.3). Иным методом такие же решения получены в [8].

Преобразование

$$z = ce^\xi \quad (x = ce^\xi \cos \eta, \quad y = ce^\xi \sin \eta) \quad (2.5)$$

приводит полярные r, θ координаты к изотермическим ($r = ce^\xi, \theta = \eta$). Его можно рассматривать как предельный случай преобразования (2.1) либо (2.3), если в них совершить предельный переход $\xi \rightarrow \infty, c \rightarrow 0$. В результате такого перехода степени (2.2) и (2.4) записываются в координатах r, θ [2].

Согласно преобразованию

$$z = c\xi^2 \quad (x = c(\xi^2 - \eta^2), \quad y = 2c\xi\eta)$$

введем сетку параболических координат ξ, η ($\eta \in [0, \infty[$, c и ξ имеют такие же значения, что и в преобразовании (2.1)). Как известно, это преобразование является предельным случаем преобразования (2.1), если в последнем выбрать начало координат в фокусе, вместо c и ξ написать соответственно $2x^2c$ и ξ/x , а затем совершить предельный переход $x \rightarrow \infty$.

Указанные предельные переходы к полярным и параболическим координатам используем далее при решении краевых задач.

3. Переменная проводимость P слоя обусловлена изменением как коэффициента проницаемости k среды, так и толщины h слоя. Для определенности рассмотрим случай, когда h изменяется непрерывно, а k — скачком на кривой Γ второго порядка, уравнение которой в изотермических координатах $\xi = \xi_0 = \operatorname{const}$. Эта кривая делит полуплоскость z ($\operatorname{Im} z \geq 0$) на области D_1 ($\xi > \xi_0$) и D_2 ($\xi < \xi_0$) с коэффициентами проницаемости сред k_1 и k_2 , в которых течения описывают комплексные потенциалы

$$W_\nu = k_\nu \varphi_\nu + i \frac{\psi_\nu}{h} \quad (\nu = 1, 2) \quad (3.1)$$

На Γ выполняются известные условия непрерывности давления и расхода жидкости [4, 9]

$$[\varphi_1 = \varphi_2]_{\xi=\xi_0}, \quad \left[k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0} \quad (3.2)$$

Пусть поток в однородном слое, коэффициент k проницаемости которого выбран за единицу измерения проницаемости среды ($k=1$), описывает комплексный потенциал $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0/h$, особые точки которого располагаются произвольно относительно линии $\xi = \xi_0$. Если в областях D_1 ($\xi > \xi_0$) и D_2 ($\xi < \xi_0$) находятся среды с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2 , то течения в них описываются удовлетворяющими условиям (3.2) комплексными потенциалами

$$W_1 = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n L_n'(\xi_0) Z^{(-n)}, \quad W_2 = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n M_n'(\xi_0) Z^{(n)}$$

$$\Lambda_n = \alpha_n (k_1 - k_2) [k_2 L_n'(\xi_0) M_n(\xi_0) - k_1 L_n(\xi_0) M_n'(\xi_0)]^{-1} \quad (3.3)$$

$$L_n(\xi) P_n(\eta) = \operatorname{Re} Z^{(n)}, \quad M_n(\xi) P_n(\eta) = \operatorname{Re} Z^{(-n)}$$

где коэффициенты α_n определяются из разложения

$$\varphi_0(\xi_0, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(\eta)$$

В пространстве (3.3) можно трактовать как комплексные потенциалы осесимметричных течений в неоднородной среде, границей Γ раздела неоднородности которой является поверхность вращения второго порядка.

4. Применим решение (3.3) к задачам, которые связаны с природоохранными мероприятиями и работой водозаборов в слоях грунта, содержащих загрязненные области. Такие задачи исследовались в плоскопараллельной постановке [4, 10, 11] и имеют место для слоев постоянной толщины. Однако представляет практический интерес рассмотреть эти задачи в слоях переменной толщины.

Для складирования твердых или жидких экологически вредных отходов производства, не подлежащих очистке или ликвидации, сооружаются специальные хранилища, которые должны быть нефильтрационными. Это может быть достигнуто возведением вокруг хранилища дорогостоящих противофильтрационных и дренажных устройств [10]. Другой экономически выгодный способ состоит в выборе для хранения такого места, чтобы непроницаемые поверхности слоев грунта были естественными границами этого хранилища. Одной из таких возможностей является сооружение совершенного (на всю толщину слоя) хранилища в клиновидном или пологом на него слое.

Пусть хранилище расположено в слое $h = y$. Заполненное отходами хранилище моделируем однородной средой проницаемости k_2 в области D_2 , которая примыкает к оси x . Полагаем, что эта область отделена от остальной части D_1 слоя с коэффициентом проницаемости k_1 границей Γ , уравнение которой в изотермических координатах ξ, η полуплоскости z ($\operatorname{Im} z \geq 0$) есть $\xi = \xi_0$. Если в слое имеется поступательный поток, то, протекая через область D_2 , он будет загрязнять область D_1 . Очевидно, очаг загрязнения области D_1 будет наибольшим, когда скорость u_0 потока на бесконечности параллельна оси x (ось x выберем против u_0). Найдем границы этого очага, учитывая только конвективный перенос загрязнения и не принимая во внимание играющие подчиненную роль [10, 11] процессы диффузии и дисперсии. Полагаем, что коэффициенты проницаемостей k_1 и k_2 не изменяются в процессе фильтрации.

В этом случае, согласно (3.3), течение в областях D_1 и D_2 описывается комплексными потенциалами

$$W_1 = -u_0 c [Z^{(1)} + \Lambda_1 L_1'(\xi_0) Z^{(-1)}], \quad W_2 = -u_0 c [1 + \Lambda_1 M_1'(\xi_0) Z^{(1)}] \quad (4.1)$$

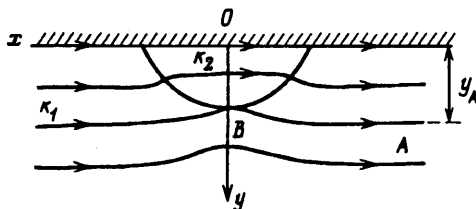
$$\Lambda_1 = (k_1 - k_2) [k_2 L_1'(\xi_0) M_1(\xi_0) - k_1 L_1(\xi_0) M_1'(\xi_0)]^{-1}$$

Из (4.1) следует, что очаг загрязнения определяется линией тока AB (фиг. 1), уравнение которой

$$\frac{u_0 y^2}{2} + u_0 c \Lambda_1 L_1' y \operatorname{Im} Z^{(-1)} = \psi_1(B)$$

Поскольку для степеней (2.2) и (2.4) $|Z^{(-1)}| = O(|\xi|^{-2})$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, находим, что линия тока AB имеет асимптоту в виде прямой, параллельной оси x

$$y = y_A = \left[\frac{2}{u_0} |\psi_1(B)| \right]^{1/2} \quad (4.2)$$



Фиг. 1

Значение y_A определяет в принятой модели максимально возможные размеры очага загрязнения области D_1 в направлении оси y . Оно зависит от размеров и формы области D_2 , а также отношения k_2/k_1 коэффициентов проницаемостей сред. В предельных случаях, когда область D_2 непроницаема ($k_2 = 0$, $\psi_1(B) = 0$), $y_A = 0$, когда эта область — бассейн грязной жидкости ($k_2 = \infty$, $|\psi_1(B)|$ — максимально), y_A принимает наибольшее значение.

Размеры очага загрязнения в любой момент времени можно найти, рассматривая продвижение границы L раздела чистой и загрязненной жидкостей как границы двух разноцветных (одинаковой вязкости и плотности) жидкостей. Пусть начальное положение границы L задано изотермическими координатами ξ , η полуплоскости z ($\text{Im } z \geq 0$) в параметрическом виде $\xi_0 = \xi_0(\sigma)$, $\eta_0 = \eta_0(\sigma)$ (σ — параметр). В последующие моменты времени t координаты этой границы определяются записанными в безразмерной форме дифференциальными уравнениями [4], которые при учете (1.6) примут вид

$$C(\xi, \eta) \frac{d\xi}{dt} = u_1(\xi, \eta), \quad C(\xi, \eta) \frac{d\eta}{dt} = v_1(\xi, \eta) \quad (4.3)$$

где

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{k_1}{C(\xi, \eta)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}, \quad v_1(\xi, \eta) = \frac{k_1}{C(\xi, \eta)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \quad (4.4)$$

компоненты скорости фильтрации в области D_1 . Как известно [4], первым интегралом уравнений вида (4.3) является семейство проходящих через точки ξ_0 , η_0 линий тока: $\psi(\xi, \eta) = \psi(\xi_0, \eta_0) = \psi_0(\sigma)$. Это позволяет решение уравнений (4.3) представить квадратурами

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{C(\xi, \psi_0) d\xi}{u_1(\xi, \psi_0)} = t, \quad \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{C(\psi_0, \eta) d\eta}{v_1(\psi_0, \eta)} = t \quad (4.5)$$

которые определяют в параметрическом виде $\xi = \xi(t, \sigma)$, $\eta = \eta(t, \sigma)$ границу L очага загрязнения в любой момент времени.

Как следует из (4.1) и (4.4), скорость движения границы L наибольшая вдоль оси x . Поэтому для оценки максимальных размеров очага загрязнения вдоль оси x достаточно исследовать движение точки границы L вдоль этой оси.

Рассмотрим конкретные случаи границы Γ области D_2 . Если Γ — вытянутый вдоль оси x полуэллипс, то, согласно (2.2), (4.1) и (4.2), находим

$$W_1 = -u_0 c (Z^{(1)} + E_1 Z^{(-1)}), \quad W_2 = -u_0 c k_2 e^3 (1 - e^2)^{-1} E_1 Z^{(1)} \quad (4.6)$$

$$E_1 = \left[(k_2 - k_1) (\text{Arth } e - e) + \frac{k_1 e^3}{1 - e^2} \right]^{-1}$$

$$Z^{(1)} = \text{ch } \xi \cos \eta + \frac{i}{2} \text{sh } \xi \sin \eta$$

$$Z^{(-1)} = (\text{ch } \xi \text{ Arcth } \text{ch } \xi - 1) \cos \eta + \frac{i}{2} (\text{sh } \xi \text{ Arcth } \text{ch } \xi - \text{cth } \xi) \sin \eta \quad (4.7)$$

$$y_A = a (e^3 k_2 E_1)^{1/2}$$

$$a = c \operatorname{ch} \xi_0, \quad e = c/a$$

Здесь a — большая полуось, e — эксцентриситет эллипса.

Когда Γ — сжатый вдоль оси x полуэллипс, то из (2.4), (4.1) и (4.2) имеем

$$W_1 = u_0 c (Z^{(1)} + \sqrt{1 - e^2} E_2 Z^{(-1)}), \quad W_2 = 2u_0 c e^3 k_2 E_2 Z^{(1)} \quad (4.8)$$

$$E_2 = [(k_2 - k_1) (\sqrt{1 - e^2} \arcsin e - e) + k_1 e^3]^{-1}$$

$$Z^{(1)} = - \left(\operatorname{sh} \xi \cos \eta + \frac{i}{2} \operatorname{ch} \xi \sin \eta \right)$$

$$Z^{(-1)} = (\operatorname{sh} \xi \operatorname{arccctg} \operatorname{sh} \xi - 1) \cos \eta + \frac{i}{2} (\operatorname{ch} \xi \operatorname{arccctg} \operatorname{sh} \xi - \operatorname{th} \xi) \sin \eta$$

и y_A определяется формулой вида (4.7), в которой следует заменить E_1 на E_2 .

Решение (4.6) либо (4.8) в пределе, когда $e = 0$, ($\xi_0 = \infty$, $c = 0$), описывает обтекание области D_2 в виде полукруга радиуса a

$$W_1 = -u_0 \left(Z^{(1)} + \frac{2\lambda a^3}{3 + \lambda} Z^{(-1)} \right), \quad W_2 = -\frac{3u_0(1 - \lambda)}{3 + \lambda} Z^{(1)} \quad (4.9)$$

$$Z^{(1)} = r \left(\cos \theta + \frac{i}{2} \sin \theta \right), \quad Z^{(-1)} = r^{-2} (\cos \theta - i \sin \theta), \quad \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

и y_A принимает значение: $y_A = a [3(1 - \lambda)/(3 + \lambda)]^{1/2}$.

Совершая в решении (4.6) указанный выше предельный переход к параболическим координатам, получим

$$W_1 = -u_0 c \left(Z^{(1)} + \frac{4\lambda}{1 - 3\lambda} Z^{(-1)} \right), \quad W_2 = -u_0 c \frac{1 - \lambda}{1 - 3\lambda} Z^{(1)} \quad (4.10)$$

$$Z^{(1)} = \xi^2 - \eta^2 + i\xi\eta, \quad Z^{(-1)} = \xi^2 - \eta^2 - \xi_0^2 \ln \frac{\xi}{\xi_0} + \frac{i\eta}{2\xi} (2\xi^2 - \xi_0^2)$$

Решение (4.10) описывает течение, когда границей Γ является парабола. Это течение моделирует равномерно вытекающий из области D_2 поток грязной жидкости, который затем неограниченно ($y_A = \infty$) может растекаться по области D_2 .

Распространение загрязнения вдоль оси x зависит от формы области D_2 . Для области D_2 в виде полукруга уравнение движения границы L загрязнения по оси x определяется согласно формулам (3.1), (4.4), (4.5), (4.9) и выглядит наиболее просто

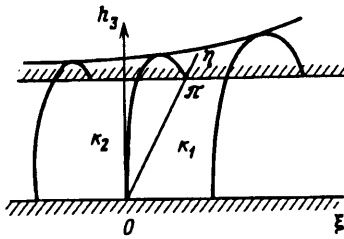
$$t = \frac{1}{u_0} \left\{ s - a - \frac{\beta}{6} \left[\ln \frac{(\beta^2 - \beta a + a^2)(\beta + s)^2}{(\beta^2 - \beta s + s^2)(\beta + a)} + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2s - \beta}{\beta\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2a - \beta}{\beta\sqrt{3}} \right) \right] \right\}$$

$$\beta^3 = \frac{4\lambda a^3}{3 + \lambda}$$

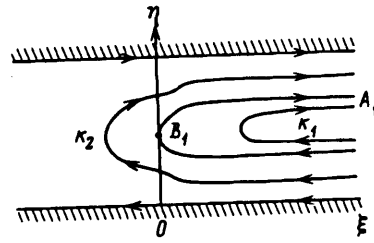
где s — расстояние границы до начала координат. Отсюда следует, что граница L перемещается быстрее всего, когда область заполнена свободной жидкостью ($\lambda = -1$). При $s \geq 3a$ влиянием области D_2 на скорость течения можно пренебречь и считать, что s возрастает со временем по линейному закону: $s = a + u_0 t$.

Решения (4.6), (4.8), (4.9) и (4.10) можно интерпретировать в плоскости ζ как комплексные потенциалы течений в слоях $h_1 = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, $h_2 = c \operatorname{ch} \xi \sin \eta$, $h_3 = c e^\xi \sin \eta$ и $h_4 = 2c\xi\eta$ с прямолинейной границей $\xi = \xi_0$ раздела их однородности. Слои h_1 , h_2 , h_3 представляют собой полосу шириной π , параллельную оси ξ . Слой h_1 полуограничен, а слои h_2 и h_3 неограниченно простираются вдоль этой оси. Слой h_4 имеет клиновидную форму. Описываемое равенством (2.5) и (4.9) течение в слое h_3 (фиг. 2) изображено на фиг. 3 (за единицу длины выбран радиус $a(a = 1)$ и, следовательно, $\xi_0 = 0$). Загрязняющаяся часть области L_1 отделена от остальной ее части линией тока $A_1 B_1$ и сужается с ростом ξ .

Проведенные выше исследования показывают, что при эксплуатации водоносных слоев, имеющих загрязненные области, водозабор необходимо



Фиг. 2



Фиг. 3

размещать вверх по потоку от этих областей с учетом вида их границы Γ . Чтобы изучить влияние границы Γ на условия работы водозабора, рассмотрим характерные и резко отличающиеся модели этой границы, представляющие собой в основании слоя прямую и полуокружность.

Пусть водозабор в виде совершенной эксплуатационной скважины расположен в слое $h = y$, где имеется поступательный поток с направленной против оси x скоростью u_0 на бесконечности. Работу скважины моделируем отрезком кольцевого радиуса y_0 и длины αy_0 (α — угол раскрытия слоя) стоком мощности Q , положение которого определяется координатой $z_0 = x_0 + iy_0$ в полуплоскости z ($\text{Im } z \geq 0$) основания слоя.

Рассмотрим случай, когда скважина находится вблизи оси x и границы Γ грязной области, сильно вытянутой в перпендикулярном к этой оси направлении. При соответствующем выборе ось O можно принять за границу чистой $D_1 (x > 0)$ и грязной $D_2 (x < 0)$ областей. Учитывая, что в этом случае решение (3.3) принимает вид фильтрационной теоремы о плоскости, а также выражения комплексных потенциалов поступательного потока и кольцевого стока [2], найдем комплексные потенциалы течений в этих областях

$$W_1 = -u_0 Z^{(1)} + \frac{Q}{\pi \alpha} [\Phi(z) + \lambda \overline{\Phi(-\bar{z})}], \quad W_2 = -u_0 Z^{(1)} + \frac{Q(1-\lambda)}{\pi \lambda} \Phi(z) \quad (4.11)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{R_+} \left\{ K(k) + i \frac{x-x_0}{2y_0} [n_1' \Pi(-n_1^2, k) - K(k)] \right\}$$

$$k = \frac{2\sqrt{yy_0}}{R_+}, \quad n_1 = \frac{4yy_0}{(y+y_0)^2}, \quad n_1^2 + n_1'^2 = 1, \quad R_{\pm} = [(x-x_0)^2 + (y \pm y_0)^2]^{1/2}$$

где $K(k)$ и $\Pi(-n_1^2, k)$ — полные эллиптические интегралы [12] модуля k , n_1^2 — параметр, $Z^{(1)}$ — такое же, что и в (4.9).

В скважину не будет попадать загрязненная жидкость, если область захвата скважины не пересекает область D_2 либо в крайнем случае только касается ее. Последнее означает, что критическая точка ($u_1 = v_1 = 0$) течения лежит на границе Γ и имеет координату y_* . Согласно формулам (4.4), (4.11), для определения y_* и предельно допустимого значения Q дебита находим равенства

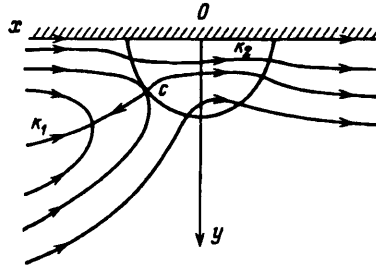
$$2y_0 B(k) - (y_* + y_0) E(k_*) = 0 \quad (4.12)$$

$$Q_* = \frac{\pi \alpha u_0 R_+^* R_-^{*2}}{(1-\lambda) x_0 E(k_*)} \quad (4.13)$$

$$R_{\pm}^* = [x_0 + (y_* \pm y_0)^2]^{1/2}, \quad k_* = \frac{2\sqrt{y_* y_0}}{R_+^*}$$

где $B(k_*)$ и $E(k_*)$ — полные эллиптические интегралы [12] модуля k_* .

Из (4.12) следует, что y_* определяется только положением скважины. Так как $2B(k_*)/E(k_*) \in [1, 2]$ при любых $k_* \in [0, 1]$ [12], то $y_* \leq y_0$. Как видно из (4.13),



Фиг. 4

Q , пропорционально скорости u_0 потока и зависит от положения скважины, а также свойств сред областей D_1 и D_2 . Если область D_2 занимает свободная жидкость ($k_2 = \infty$, $\lambda = -1$), то Q минимально. Скважина не будет загрязняться при дебитах $Q \leq Q_*$.

В предельном случае, когда скважина расположена в точке $x_0 = d$, $y_0 = 0$, с учетом $2B(0) = E(0) = \pi/2$ [12] из равенств (4.12) и (4.13) имеем $y_* = 0$ и

$$Q_* = \frac{2\alpha u_0 d^2}{1 - \lambda} \quad (4.14)$$

Полагаем теперь, что в основании слоя $h = y$ полуокружность радиуса a с центром в начале координат является границей Γ , отделяющей грязную область D_2 ($r < a$) от остальной части D_1 ($r > a$) слоя (фиг. 4). Течение в этих областях, согласно решению (3.3), соответствующему фильтрационной теореме о сфере [2], описывается комплексными потенциалами

$$W_1 = \frac{Q}{\pi\alpha} \left\{ \Phi(z) + \frac{\lambda a}{2|z|} \int_0^1 \tau^{(1-\lambda)/2} \left[2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{z}\tau\right)} + \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{z}\tau\right)} - \Phi\left(\frac{a^2}{z}\tau\right) \right] d\tau \right\} - u_0 \left(Z^{(1)} + \frac{2\lambda a^3}{3 + \lambda} Z^{(-1)} \right)$$

$$W_2 = \frac{Q}{\pi\alpha} \left\{ \Phi(z) - \lambda \int_0^1 \tau^{(1-\lambda)/2} \frac{\partial}{\partial \tau} [\tau \Phi(z\tau)] d\tau \right\} - \frac{3u_0(1-\lambda)}{3 + \lambda} Z^{(1)} \quad (4.15)$$

где $Z^{(1)}$ и $Z^{(-1)}$ такие же, как в (4.9).

Определяя скорость течения в соответствии с (3.1), (4.4) и (4.15) и приравнявая ее нулю в критической точке $C(a, \theta_*)$ полуокружности, получим для определения координаты θ_* и предельно допустимого Q дебита равенства

$$\lambda H(\theta_*) \sin 2\theta_* + G(\theta_*) (1 - \lambda \cos 2\theta_*) = 0, \quad Q_* = \frac{3\pi\alpha u_0 (1 - \lambda \cos 2\theta_*)}{(3 + \lambda) H(\theta_*)}$$

$$H(\theta_*) = - \frac{(x - x_0) E(k)}{R_+ R_-^2} - \frac{\lambda a}{r_0} \int_0^1 \tau^{(1+\lambda)/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{(x - x_0' \tau) E(k_\tau)}{R_+ R_-'^2} \right] d\tau$$

$$G(\theta_*) = \frac{2y_0 B(k) - (y + y_0) E(k)}{R_+ R_-^2} - \frac{\lambda a}{r_0} \int_0^1 \tau^{(1+\lambda)/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{2y_0' \tau B(k_\tau) - (y + y_0' \tau) E(k_\tau)}{R_+ R_-'^2} \right] d\tau$$

$$k_\tau = \frac{2\sqrt{yy_0'\tau}}{R_+}, \quad R_\pm = [(x - x_0'\tau)^2 + (y \pm y_0'\tau)^2]^{1/2}, \quad x_0' = \frac{x_0 a^2}{r_0^2}, \quad y_0' = \frac{y_0 a^2}{r_0^2}$$

$$r_0 = [x_0^2 + y_0^2]^{1/2}, \quad x = a \cos \theta_*, \quad y = a \sin \theta_*$$

Отсюда следует, что координата θ_* зависит от положения скважины и проницаемостей сред областей D_1 и D_2 .

В предельном случае, когда скважина находится в точке $x_0 = a + d$, $y_0 = 0$, имеем $\theta_s = 0$. В частности, если область D_2 заполнена свободной ($\lambda = -1$) жидкостью, то

$$Q_s = 6\alpha u_0 d(a + d) \quad (4.16)$$

Сравнивая (4.14) и (4.16), замечая, что Q_s для границы Γ в виде полуокружности больше, чем в случае прямолинейной границы при тех же условиях ($\lambda = -1$). Конфигурация границы сказывается на Q_s тем сильнее, чем дальше от нее расположена скважина.

Формулы (2.5) и (4.15), в которых $a = 1$, описывают процесс в слое h_3 .

В случае, когда $y_0 = 0$ и $\alpha = \pi$, решения (4.11) и (4.15) можно интерпретировать как комплексные потенциалы осесимметричных течений к точечной скважине, расположенной на кровле неограниченного вглубь пласта с границей Γ областей D_1 и D_2 соответственно в виде полуплоскости $x = 0$ ($y \geq 0$) и полусферы радиуса a .

Решение (3.3) и исследованные на его основе краевые задачи нетрудно распространить на случай слоя постоянной толщины ($h = 1$), переменный коэффициент проницаемости которого скачком изменится вдоль кривых второго порядка. Используя другого вида конформные преобразования и формулу перехода (1.5), можно расширить класс двумерных задач в слоях переменной проводимости, исследуемых в конечном виде.

Отметим, что полученное решение (3.3) применимо для широкого круга описываемых уравнениями (1.1) процессов различной физической природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пивень В. Ф. К теории осесимметричных обобщенных аналитических функций в динамических процессах//Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1424—1426.
2. Пивень В. Ф. Метод осесимметричных обобщенных аналитических функций в исследовании динамических процессов//ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 228—234.
3. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
4. Радыгин В. М., Голубева О. В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
6. Положий Г. Н. Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
7. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
8. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. Применение методов теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 462 с.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
10. Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадовская А. Е. Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979. 254 с.
11. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368 с.
12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1968. 344 с.

Орел

Поступила в редакцию
5.III.1992