МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1993

УДК 532.546

© 1993 г. П. Г. БЕДРИКОВЕЦКИЙ, Д. Г. ПОЛОНСКИЙ, А. А. ШАПИРО

АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Для прогнозирования запасов и проектирования разработки залежей природных углеводородов необходима информация о том, покоится или движется многокомпонентная жидкость, насыщающая пористый коллектор. Вопрос о движении жидкости решается в рамках линейной теории устойчивости в поле силы тяжести при наличии геотермического и концентрационного градиентов [1].

В работе [2] исследована устойчивость равновесия однородной жидкости в пористой среде. В [3, 4] при исследовании устойчивости бинарной смеси в пористой среде в различных упрощенных постановках (без учета диффузионной теплопроводности и работы сил тяжести) получены критические значения чисел Нуссельта для полостей различной формы. В работе [5] для случаев действительных и чисто мнимых возмущений получены границы областей неустойчивости. При этом эффекты Соре и Дюфура [6], а также работа сил тяжести не учитывались. В работе в [7] исследовалась неустойчивость бинарной смеси химически реагирующих жидкостей, заключенных в замкнутую полость.

В данной работе задача об устойчивости бинарной смеси в пористой среде исследована в полной постановке с учетом перекрестных кинетических и гравитационного эффектов. Рассмотрены граничные условия первого и второго родов для плоского горизонтального слоя пористой среды. Определены границы областей неустойчивости. Описана область параметров, отвечающих явлению «парадокса устойчивости», которое состоит в неустойчивости смеси, утяжеляющейся с глубиной. Установлено, что многокомпонентность смеси существенно стабилизирует положение равновесия.

1. Уравнения фильтрации бинарной смеси. Конвективно-диффузионное течение бинарной смеси в пористой среде описывается следующей системой уравнений [8, 9]:

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\rho\left(m\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla C\right) = -\operatorname{div}\mathbf{j} \qquad (1.2)$$

$$-\nabla p + \rho\mathbf{g} - \frac{\eta\mathbf{u}}{K} = 0 \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho\varepsilon + (1-m)\rho_1\varepsilon_1 + m\rho g z) = -\operatorname{div}(\{\rho[\varepsilon + gz] + p\}\mathbf{u} + \mathbf{q}) \qquad (1.4)$$

Здесь m — пористость, ρ, ρ_1 — плотности смеси и пористой среды, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — скорость фильтрации смеси, C — массовая концентрация легкого компонента в примеси, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ — диффузионный и неконвективный тепловой потоки, p — давление, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, η — динамическая вязкость жидкости, K — проницаемость пористой среды, z — вертикальная координата, отсчитываемая от подошвы пласта, ε, ε_1 — удельные внутренние энергии жидкости и твердого скелета. Уравнения (1.1), (1.2) выражают законы сохранения массы для смеси в целом (уравнение неразрывности) и для легкого компонента (уравнение диффузии), (1.3) есть закон Дарси (уравнение импульса), (1.4) — закон сохранения энергии. Выражения для потоков $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ определяются формулами [8]

$$\mathbf{j} = \rho D\,(\nabla C + \nu_T \nabla T) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{q} = \left[\nu_T T \left(\frac{\partial \mu}{\partial C}\right)_{p,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c} + \mu\right]\mathbf{j} - \lambda \nabla T \tag{1.6}$$

Здесь D — коэффициент диффузии, T — температура, μ — химический потенциал, λ — эффективная теплопроводность системы жидкость — пористая среда, параметр ν_T равен k_T/T, где k_T — термодиффузионное отношение. Учет перемешивания жидкости приводит к тому, что D следует считать коэффициентом фильтрационно-конвективной диффузии [10]. В выражении (1.5) пренебрегаем членом бародиффузии [1].

Для упрощения системы (1.1)—(1.4) используется приближение Буссинеска [1]: уравнение состояния $\rho = \rho(p,\ T,\ C)$ имеет вид

$$\rho = \rho_0\,(1 - \beta_T\,(T - T^0) - \beta_c\,(C - C^0)\,) \tag{1.7}$$

Параметры ρ_0, T^0, C^0 считаются постоянными, константы температурного и концентрационного расширения β_T, β_C — малыми, так что

$$|\beta_T\,(T - T^0)\,| \ll 1, \quad |\beta_c\,(C - C^0)\,| \ll 1 \tag{1.8}$$

для всех значений T, C в рассматриваемой задаче. При этом уравнение неразрывности (1.1) имеет тот же вид, что для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.9}$$

Преобразуем уравнение (1.4), используя следующие термодинамические соотношения [6], [8], справедливые для уравнения состояния (1.7):

$$d\varepsilon = Tds + \frac{pd\rho}{\rho^2} + \mu dC \tag{1.10}$$

$$di = C_p dT + \left(\mu - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c}\right)dC$$

В результате преобразований получаем

$$C_m\frac{\partial T}{\partial t} + C_p \rho \mathbf{u}\,\left(\nabla T + \frac{\mathbf{g}}{C_p}\right) = -N\operatorname{div}\mathbf{j} + \lambda \Delta T \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.10)—(1.11) s — энтропия, i — энтальпия, C_p — изобарная теплоемкость смеси, C_m — теплоемкость пористой среды, N — параметр, равный $\nu_T\,(\partial\mu/\partial C)_{p,T}$. По сравнению с уравнениями, изучавшимися ранее [3—5, 7] здесь учтена работа силы тяжести [11].

Пусть параметры p, T, C мало отклоняются от определенных постоянных значений p^0, T^0, C^0. Дальнейшая линеаризация системы уравнений (1.2), (1.3), (1.9), (1.11) проводится в предположении о постоянстве коэффициентов η, m, K, C_p, C_m, λ, N, D, ν_T, отвечающих значениям p^0, T^0, C^0. Кроме того, в уравнениях (1.2), (1.11) ρ заменяется на постоянное значение ρ_0. Таким образом, в соответствии с требованиями приближения Буссинеска температурная и концентрационная сжимаемость смеси учитывается только в уравнении движения (1.3) [1].

2. Линеаризация в окрестности механического равновесия. Исследование условий механического равновесия для выведенной системы уравнений проводится аналогично [1]. Устанавливается существование решений с постоянными вертикальными градиентами температуры и концентрации $T = T_s = T^0 - Az$, $C = C_s = C^0 - Bz$. При этом равновесное распределение давления задается квадратичной зависимостью

$$p = p_s = -\ 0{,}5\rho_0 g\,(\beta_T A + \beta_c B)\,z^2 + p_1 z + p_2$$

где константы p_1, p_2 определяются граничными условиями.

Такое равновесное состояние реализуется в горизонтальном слое пористой среды, ограниченном плоскостями $z = 0$ и $z = L$, если на этих плоскостях заданы постоянные значения температуры и концентрации. В этом случае $A = \Delta T/L$, $B = \Delta C/L$, где ΔT, ΔC — перепады температуры и концентрации между граничными плоскостями.

Исследуем устойчивость равновесного состояния. Представим термодинамические переменные в виде

$$p = p_s + p', \ T = T_s + T', \ C = C_s + C', \ \mathbf{u} = \mathbf{u}' \tag{2.1}$$

Величины p', T', C', $\mathbf{u}'$ считаем малыми по сравнению с равновесными. Подстановка (2.1) в систему уравнений, отвечающих приближению Буссинеска, и пренебрежение квадратичными по возмущениям членами приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0 \\ m\frac{\partial C'}{\partial t} - B(\mathbf{u}'\mathbf{l}) = D(\Delta C' + \nu_{\text{т}}\Delta T') \\ -\nabla p' - \frac{\nu}{K}\mathbf{u}' + \rho_0 g(\beta_{\text{т}} T' + \beta_c C')\mathbf{l} = 0 \\ C_m\frac{\partial T'}{\partial t} - \left(A + \frac{g}{C_p}\right)(\mathbf{u}'\mathbf{l}) = N\rho_0 D(\Delta C' + \nu_T\Delta T') + \lambda\Delta T' \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{l}$ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх. Обезразмерим уравнения в системе (2.2). Введем следующие единицы: расстояния — мощность пласта L, времени — $K\rho_0/\eta$, скорости — $\lambda/\rho_0 C_p L$, температуры — AL, концентрации — $BL\lambda/\rho_0 C_r$, давления — $\eta\lambda/\rho_0 C_p K$. Переходя при помощи указанных единиц к безразмерным переменным, и опуская штрихи в обозначениях, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

$$P_d\frac{\partial C}{\partial t} - u_z = \Delta C + \mathrm{Td}\,\Delta T \tag{2.4}$$

$$-\nabla p - \mathbf{u} + (RT + R_d C)\mathbf{l} = 0 \tag{2.5}$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t} - (1 + G)u_z = (1 + \mathrm{Dt})\Delta T + \frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}}\Delta C \tag{2.6}$$

$$P_d = \frac{mL^2\eta}{KD\rho_0}, \quad \mathrm{Td} = \frac{ADC_p\nu_T\rho_0}{B\lambda} \tag{2.7}$$

$$R = \frac{\rho_0^2 g\beta_T AL^2KC_p}{\eta\lambda}, \quad R_d = \frac{\rho_0 g\beta_c BL^2K}{\eta D} \tag{2.8}$$

$$P = \frac{C_m L^2\eta}{K\lambda\rho_0}, \quad G = \frac{g}{AC_p}, \quad \mathrm{Dt} = \frac{ND\nu_T\rho_0}{\lambda} \tag{2.9}$$

Фильтрационное и фильтрационно-диффузионное число Рэлея R и R_d определяют соотношения между составляющими выталкивающей силы, связанной с наличием градиентов температуры и концентрации, и отвечающими им диссипативными механизмами (теплопроводность, диффузия). Соотношения между фильтрационной проводимостью K/η и величинами, определяющими скорость диссипативных процессов, выражаются фильтрационным и фильтрационно-диффузионным числами Прандтля P и P_d. Параметры Td, Dt, отвечающие за эффекты Соре и Дюфура, характеризуют величину термодиффузии по сравнению с диффузией и диффузионную теплопроводность по сравнению с обычной теплопроводностью соответственно. Вклад работы сил тяжести по сравнению с градиентом температуры определяется параметром G.

Аналогично [1] из системы (2.3)—(2.6) исключаются давление и компоненты скорости u_x, u_y. Для этого к (2.5) применяется операция rot rot с использованием (2.3). Затем полученное векторное уравнение проецируется на ось z. В результате уравнение (2.3) исключается и остается система из трех уравнений относительно u_z, T, C

$$\Delta u_z + \Delta_1 (RT + R_d C) = 0 \tag{2.10}$$

$$P_d \frac{\partial C}{\partial t} - u_z = \Delta C + \mathrm{Td}\, \Delta T \tag{2.11}$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} - (1 + G) u_z = (1 + \mathrm{Dt}) \Delta T + \frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}} \Delta C \tag{2.12}$$

Здесь оператор Δ_1 определяется как $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Система уравнений (2.10)—(2.12) исследуется для плоского горизонтального слоя. В этом случае на плоскостях $z = 0$ и $z = L$ задаются однородные граничные условия

$$u_z = T = C = 0 \tag{2.13}$$

3. Нормальные возмущения. Исследование системы (2.10)—(2.12) обычным образом сводится к исследованию спектра нормальных возмущений [1]

$$\{u_z, T, C\}\, (x, y, z, t) = \{w, \theta, q\}\, (z) \exp\left(-\sigma t + i\,(k_1 x + k_2 y)\right) \tag{3.1}$$

Здесь σ — декремент возмущений, k_1, k_2 — волновые числа, w, θ, q — амплитуды возмущений величин u_z, T, C соответственно.

Критерий устойчивости относительно нормальных возмущений имеет вид Re $\sigma \geq 0$. При этом действительным значениям σ отвечают монотонные возмущения, а комплексным — колебательные.

Подстановка волн (3.1) в уравнения (2.8)—(2.10) приводит к системе линейных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений

$$\ddot{w} - k^2 w + k^2 (R\theta + R_d q) = 0, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{3.2}$$

$$-\sigma P_d q - w = \ddot{q} - k^2 q + \mathrm{Td}\, (\ddot{\theta} - k^2 \theta) \tag{3.3}$$

$$-\sigma P \theta - (1 + G) w = \frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}} (\ddot{q} - k^2 q) + (1 + \mathrm{Dt})\, (\ddot{\theta} - k^2 \theta) \tag{3.4}$$

Система уравнений (3.2) — (3.4) имеет однопараметрическое семейство решений, удовлетворяющее граничным условиям (2.13) [1]

$$w = w_0 \sin \pi n z, \quad \theta = \theta_0 \sin \pi n z, \quad q = q_0 \sin \pi n z$$

Подстановка этих решений в (3.2)—(3.4) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно w_0, θ_0, q_0. Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю

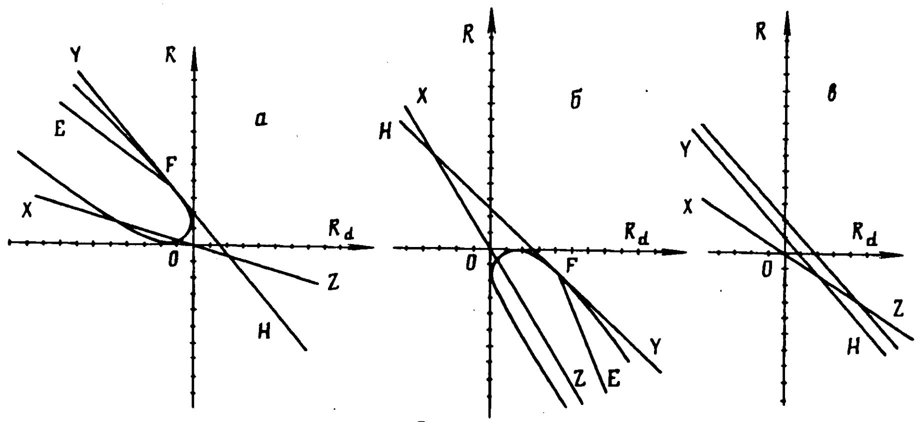
$$a\sigma^2 + b\sigma + d = 0$$

$$a = \omega P P_d, \quad \omega = \pi^2 n^2 + k^2 \tag{3.5}$$

$$b = k^2 \left[R_d P + (1 + G) R P_d\right] - \omega^2 \left[P + P_d (1 + \mathrm{Dt})\right]$$

$$d = \omega \left[\omega^2 + k^2 \left\{R_d (\mathrm{Td}\,(1 + G) - 1 - \mathrm{Dt}) + R\left(\frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}} - 1 - G\right)\right\}\right]$$

Квадратное уравнение (3.5) имеет корни $\sigma_{1,2}$ с положительной действительной



Фиг. 1

частью, если и только если $b < 0$, $d > 0$. Равновесие устойчиво при выполнении этого условия, а также при $b \le 0$, $d = 0$, когда $\sigma_1 \ge \sigma_2 = 0$. Монотонная неустойчивость ($\operatorname{Re}\sigma_2 < 0$, $\operatorname{Im}\sigma_2 = 0$) наблюдается, если $d < 0$, и $d = 0$, $b > 0$, а также если $d > 0$, $b > 0$ и дискриминант уравнения (3.5) $\Delta = b^2 - 4ad$ положителен. Область колебательной неустойчивости, отвечающая комплексным корням $\sigma_{1,2}$, определяется условиями $b > 0$, $d > 0$, $\Delta < 0$. Чисто мнимые возмущения ($\operatorname{Re}\sigma = 0$) имеют место, тогда $b = 0$ и $d > 0$. Частота таких возмущений δ равна $(d/a)^{1/2}$.

Таким образом, в пространстве безразмерных параметров M область устойчивости и различные области неустойчивости отделяются друг от друга гиперповерхностями

$$d = 0,\ b = 0,\ \Delta = b^2 - 4ad = 0 \tag{3.6}$$

Удобно рассматривать сечения пространства M плоскостями, параллельными координатной плоскости (R_d, R) (фиг. 1). Гиперповерхности (3.6) изображаются на этих плоскостях различными линиями. Условиям $b = 0$ и $d = 0$ отвечают прямые

$$R_dP + (1 + G)RP_d = \frac{\omega^2}{k^2}\,[P + P_d\,(1 + \mathrm{Dt})\,] \tag{3.7}$$

$$R_d\,[\mathrm{Dt} + 1 - \mathrm{Td}\,(1 + G)\,] + R\left(1 + G - \frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}}\right) = \frac{\omega^2}{k^2} \tag{3.8}$$

Условие $\Delta = 0$ изображается кривой второго порядка

$$\{k^2\,[R_dP + (1 + G)RP_d] - \omega^2\,[P + P_d\,(1 + \mathrm{Dt})\,]\}^2 - \tag{3.9}$$

$$- 4\omega^2PP_d\left(\omega^2 + k^2\left[R_d\{\mathrm{Td}\,(1 + G) - 1 - \mathrm{Dt}\} + R\left(\frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}} - 1 - G\right)\right]\right) = 0$$

В последнем выражении в фигурных скобках выделен полный квадрат b^2. Поэтому кривая (3.9) является параболой, причем прямая $b = 0$ параллельна ее оси. Так как при $b = 0$ и $d = 0$ дискриминант $\Delta = b^2 - 4ad$ также равен нулю, то парабола (3.9) проходит через точку F пересечения прямых (3.7) и (3.8) на плоскости (R_d, R). Более того, поскольку при b, равном нулю, имеем

$$\frac{\partial\Delta}{\partial R} = -4a\frac{\partial d}{\partial R},\quad \frac{\partial\Delta}{\partial R_d} = -4a\frac{\partial d}{\partial R_d}$$

то эта парабола касается прямой $d = 0$ в точке F.

Исследуем расположение областей устойчивости в простейшем случае, когда гравитационный параметр G, а также параметры Td, Dt, отвечающие за перекрестные кинетические эффекты, пренебрежимо малы: G = Td = Dt = 0 [1]. Выражения для разграничивающих кривых на плоскости (R_d, R) при этом упрощаются и принимают вид

$$b = 0:\ RP_d + R_dP = \frac{\omega^2}{k^2}(P + P_d) \tag{3.10}$$

$$d = 0:\ R + R_d = \frac{\omega^2}{k^2} \tag{3.11}$$

$$\Delta = 0:\ \omega^4 (P - P_d)^2 + k^4 (RP_d + R_dP)^2 + 2\omega^2 k^2 (P - P_d)(RP_d - R_dP) = 0 \tag{3.12}$$

В рассматриваемом случае парабола $\Delta = 0$ касается обеих координатных осей в точках $[0, (\omega^2/k^2)(1 - P/P_d)]$ и $[(\omega^2/k^2)(1 - P_d/P), 0]$. Заметим, что вид уравнений не меняется при замене P на P_d, R на R_d. Вследствие этого случаи $P < P_d$, $P > P_d$ обладают определенной симметрией (фиг. 1, *а*, *б*). Точка F пересечения всех линий имеет координаты $[(\omega^2/k^2)P/(P - P_d), (\omega^2/k^2)(P_d/(P_d - P)]$. Область абсолютной устойчивости лежит внутри угла EFH, образованного лучом FE прямой (3.10) и лучом FH прямой (3.11). В области EFY наблюдается неустойчивость относительно колебательных возмущений. Область неустойчивости относительно монотонных возмущений располагается выше прямой (3.11) (прямая FH). В особом случае при P, равном P_d, прямые (3.10) и (3.11) параллельны прямой $R = -R_d$, в которую вырождается парабола (3.12) (фиг. 1, *в*). Область абсолютной устойчивости лежит ниже прямой (3.11). Выше нее находится область неустойчивости относительно монотонных возмущений (фиг. 1, *в*). Относительно колебательных возмущений равновесие устойчиво.

4. Парадокс устойчивости. Явление «парадокса устойчивости», обнаруженное для бинарной смеси вязких жидкостей [1], состоит в том, что механическое равновесие такой смеси может оказаться неустойчивым, даже если снизу преобладает более тяжелый компонент. Покажем, что это явление наблюдается и в пористой среде.

Подставляя в уравнение состояния (1.7) равновесные распределения температуры и концентрации и применяя оператор ∇, находим

$$\nabla \rho_s = \rho_0 (\beta_T A + \beta_c B)\mathbf{l} \tag{4.1}$$

Здесь ρ_s — равновесное распределение плотности. Нулевому градиенту плотности отвечает уравнение

$$\beta_T A + \beta_c B = 0$$

В безразмерных переменных это уравнение приобретает вид

$$R = \frac{-\alpha P R_d}{P_d}, \quad \alpha = \frac{m\rho_0 C_p}{C_m} \tag{4.2}$$

Параметр α, равный отношению удельной теплоемкости жидкости и суммарной теплоемкости фаз, принимает значения от нуля до единицы. На плоскости (R_d, R) ниже прямой XZ, определяемой соотношением (4.2), лежит область значений этих параметров, для которых смесь утяжеляется с глубиной (фиг. 1, *а*, *б*). В пересечении этих областей с внешностью угла EFH наблюдается парадокс устойчивости.

В случае $P_d < P$ (фиг. 1, *а*) тангенс угла наклона прямой XZ нулевого градиента плотности заведомо меньше единицы. Поэтому область парадокса устойчивости целиком лежит в полуплоскости $R < 0$. Эти значения фильтрационного числа Рэлея отвечают значениям $A < 0$, что соответствует подогреву сверху.

Однако в месторождениях природных углеводородов геотермический градиент A больше нуля. Для положительных чисел R парадокс устойчивости может наблюдаться, если $P_d > P$ (фиг. 1, *б*), причем наклон прямой нулевого градиента плотности к оси R_d больше наклона границы монотонных возмущений (3.10): $\alpha P/P_d > 1$. Выражая числа P, P_d через размерные величины, находим, что в области парадокса устойчивости

$$\frac{\lambda}{\rho_0 C_p} < D \tag{4.3}$$

Величина $\lambda/\rho_0 C_p$ является характеристикой нагрева единицы объема жидкости за счет суммарной теплопроводности в обеих фазах. В отсутствие пористой среды эта величина была бы равна температуропроводности жидкости [1]. Таким образом, условие (4.3) означает, что в режиме парадокса устойчивости выравнивание температуры жидкости за счет теплопроводности происходит медленнее, чем выравнивание концентрации за счет диффузии. При этом элемент жидкости, сместившийся наверх в результате флуктуации равновесного состояния, будет быстро приобретать добавочную концентрацию легкого компонента и относительно медленно нагреваться. При подходящих значениях градиентов температуры и концентрации плотность элемента окажется ниже плотности окружающей среды и всплывание будет продолжаться неограниченно, что отвечает монотонной неустойчивости.

5. Слои с непроницаемыми границами. Если границы плоского слоя непроницаемы для вещества, то в равновесии диффузионный поток отсутствует

$$\nabla C_s + \nu_т \nabla T_s = 0 \tag{5.1}$$

Это дает дополнительную связь между равновесными градиентами концентрации и температуры, а значит, и между соответствующими числами Рэлея

$$R_d = \psi\tau R \tag{5.2}$$

Здесь параметр ψ равен $-\nu_т\beta_c/\beta_т$, параметр τ, равный $\lambda/\rho_0 C_p D$, есть отношение скоростей выравнивания температуры и концентрации. Из (5.1) находим, что в слое с непроницаемыми границами $\mathrm{Td} = -\tau^{-1}$.

Граница областей неустойчивости вырождается в рассматриваемом случае в ряд критических значений на прямой чисел Рэлея. Из соотношений (3.7), (3.8) и (5.2) получаем выражения для нижних границ областей монотонной и колебательной неустойчивостей R_r и R_I

$$R_r = \omega^2 [k^2 \{1 + G + \tau\,\mathrm{Dt} + \psi\tau(1 + \mathrm{Dt} + (1 + G)\tau^{-1})\}]^{-1} \tag{5.3}$$

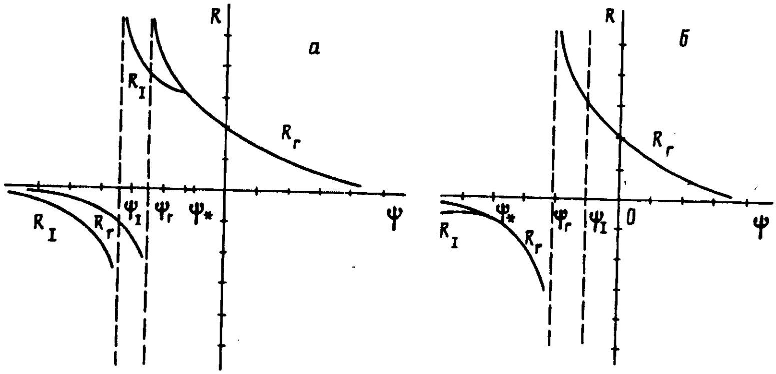
$$R_I = \omega^2 [P + P_d(1 + \mathrm{Dt})]\{k^2(P_d(1 + G) + \psi\tau P)\}^{-1} \tag{5.4}$$

В пренебрежении работой сил тяжести, а также эффектом диффузионной теплопроводности [1, 3] выражения для наименьших критических чисел Рэлея R_r и R_I, отвечающих минимальному волновому числу $k = \pi n$ и основной моде $n = 1$, принимают вид

$$R_r = 4\pi^2 [1 + \psi(1 + \tau)]^{-1}$$

$$R_I = 4\pi^2 [1 + P(\psi\tau - 1)(P_d + P)^{-1}]^{-1}$$

На фиг. 2 приведена зависимость чисел R_r, R_I от параметра термодиффузии ψ. Значения ψ_r, ψ_I есть абсциссы вертикальных асимптот гипербол $R_r(\psi)$, $R_I(\psi)$. Величина ψ_* есть абсцисса точки пересечения гипербол



Фиг. 2

$$\psi_r = -(\tau + 1)^{-1};\ \psi_I = -P_d(\tau P)^{-1};\ \psi_* = -P\,[P_d(\tau + 1) + P]^{-1}$$

Если отношение P_d/P больше, чем $\tau/(\tau + 1)$ (или, в размерных параметрах, $\lambda/\rho_1 C_{p1}$ больше $(1 - m)D/m$), возможно существование как монотонной, так и колебательной неустойчивости при $\psi < 0$ (фиг. 2, *а*). В противном случае колебательная неустойчивость возможна лишь при $R < 0$ (фиг. 2, *б*). Колебательная неустойчивость может иметь место только в области аномальной термодиффузии [1] $\psi < 0$. Область ее существования определяется неравенством $R(1 + \psi) < 4\pi^2$. Сравнивая соотношения (4.1) и (5.1), замечаем, что нулевому равновесному градиенту плотности отвечает значение $\psi = -1$. Если $\psi < -1$, то смесь утяжеляется с глубиной и наблюдается парадокс устойчивости.

6. Определение критической проницаемости. Определим критические проницаемости — пороговые значения, выше которых наблюдается конвекция. Рассмотрим на плоскости чисел Рэлея произвольную точку (R_{d0}, R_0). При изменении проницаемости эта точка описывает луч с вершиной в начале координат, в то время как границы областей неустойчивости остаются неизменными. Точки пересечения луча с этими границами дают значения величин критических проницаемостей K_r, K_I для монотонной и колебательной неустойчивости соответственно.

Критические проницаемости K_r, K_I находятся из соотношений (3.7), (3.8)

$$K_I = \frac{\omega^2}{k^2}(P_* + P_{d*}(1 + \mathrm{Dt}))\,[R_{d*}P_* + (1 + G)R_*P_{d*}]^{-1} \tag{6.1}$$

$$K_r = \frac{\omega^2}{k^2}\left[R_{d*}(\mathrm{Dt} + 1 - \mathrm{Td}(1 + G)) + R_*\left(1 + G - \frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{Td}}\right)\right]^{-1} \tag{6.2}$$

Параметры R_*, R_{d*}, P_*, P_{d*} получаются из соответствующих безразмерных величин (2.7), (2.8), (2.9) путем исключения K (например, $P_* = KP = C_m\eta L^2/\rho_0\lambda$).Так как область колебательной устойчивости целиком лежит в области монотонной, то $|K_I| > |K_r|$. Наименьшие критические проницаемости отвечают минимуму выражения $\omega^2/k^2 = (\pi^2 n^2 + k^2)^2/k^2$, которое достигается при $k = \pi n$ на основной моде $n = 1$. При этом множитель ω^2/k^2 принимает значение $4\pi^2$ [1].

В пренебрежении работой сил тяжести и перекрестными эффектами выражение для наименьших критических проницаемостей упрощается

$$K_I = 4\pi^2(P_* + P_{d*})\,[R_{d*}P_* + R_*P_{d*}]^{-1} \tag{6.3}$$

$$K_r = 4\pi^2\,[R_{d*} + R_*]^{-1} \tag{6.4}$$

Отметим, что выражения (6.1)—(6.4) в ряде случаев дают значения $K_{I,r} < 0$. Это значит, что пересечение с границами областей неустойчивости луча, соединяющего точки (0, 0) и (R_{d0}, R_0), пусто. Но начало координат вместе с некоторой своей окрестностью всегда лежит в области устойчивости. Поэтому условие $K_{I,r} < 0$ является критерием того, что пластовая смесь устойчива при любых значениях проницаемости.

Были рассчитаны значения критических проницаемостей для пластовых условий Карачаганакского месторождения [12]. Многокомпонентная пластовая смесь разбивалась на два псевдокомпонента, из которых легкий отвечал метану. Выбирались следующие значения определяющих параметров: $C^0 = 0{,}4$; $T^0 = 360$ K; $p^0 = 60$ МПа; $C_p = 3{,}3\cdot10^3$ м^2/с^{2}К; $\rho_0 = 5\cdot10^2$ кг/м^3; $\lambda = 1{,}2$ кг · м/с^{3}К; $C_m = 3\cdot10^6$ кг/м·с^{2}К; $\eta = 10^{-4}$ кг/м·с; $L = 1400$ м; $A = 0{,}01$ К/м; $B = -3\cdot10^{-5}$ м$^{-1}$; $\beta_T = 10^{-4}$К$^{-1}$; $\beta_C = 0{,}1$; $k_T = 0{,}2$; $m = 0{,}07$; $D = 10^{-8}$ м/с^2. При оценке коэффициента D учитывается вклад фильтрационно-конвективной дисперсии [10].

Поскольку в рассматриваемых случаях пластовая смесь утяжеляется с глубиной и подогревается снизу за счет геотермического градиента, то $R > 0$. Критические проницаемости, рассчитанные по формулам (6.1), (6.2), оказались отрицательными: $K_r = -2{,}58\cdot10^{-18}$ м^2, $K_I = -2{,}03\cdot10^{-17}$ м^2. Упрощенные формулы (6.3), (6.4) дали значения $K_r = -2{,}74\cdot10^{-18}$ м^2, $K_I = -1{,}15\cdot10^{-17}$ м^2. Таким образом, пластовая смесь Карачаганакского месторождения устойчива при любых значениях проницаемости коллектора. Учет перекрестных кинетических эффектов и гравитационного члена изменяет значения величин критических проницаемостей, но не влияет на их порядок.

Если рассчитывать критическую проницаемость в предположении об однородности флюида Карачаганакского газоконденсатного месторождения, она оказывается равной $4\pi^2/R_*$, что составляет $2{,}98\cdot10^{-13}$ м^2. Таким образом, однородная модель предсказывает существование конвективных течений в высокопроницаемых зонах. Неучет многокомпонентности смеси приводит здесь к принципиальной ошибке.

Аналогичные расчеты проводились для Тенгизского месторождения [12] ($T^0 = 430$ K; $p^0 = 85$ МПа; $\rho_0 = 6\cdot10^2$ кг/м^3; $\lambda = 1{,}7$ кг·м/с^3 К; $\eta = 2\cdot10^{-4}$ кг/м·с; $L = 1500$ м; $A = 0{,}05$ К/м; $B = -2\cdot10^{-5}$ м$^{-1}$). При этом оказалось, что с учетом кинетических эффектов $K_r = -4{,}85\cdot10^{-18}$ м^2, $K_I = -3{,}31\cdot10^{-17}$ м^2, а без учета $K_r = -4{,}96\cdot10^{-18}$ м^2, $K_I = -1{,}90\cdot10^{-17}$ м^2. Однородная модель дает значение критической проницаемости, равное $1{,}94\cdot10^{-13}$ м^2. Таким образом, и в этом случае многокомпонентность является существенным фактором, без учета которого невозможен правильный вывод об устойчивости смеси.

Из соотношения (6.4) следует, что в отсутствие перекрестных эффектов смесь оказывается устойчивой при любых значениях проницаемости, если $|R_d| > |R|$, т. е. выравнивание концентрации за счет диффузии происходит быстрее, чем выравнивание температуры за счет теплопроводности. Если $|R_d|$ меньше, чем $|R|$, то критическая проницаемость K_r, рассчитанная по формуле (6.4), оказывается больше, чем проницаемость $4\pi^2/R_*$, рассчитанная для однородной жидкости.

Таким образом, исследование полученных аналитических зависимостей показывает, что фактор многокомпонентности смеси увеличивает устойчивость состояния механического равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

2. *Золотарев П. П.* Условия возникновения тепловой конвекции в пористом пласте//Инж. журн. 1965. Т. 5. № 2. С. 236—238.

3. *Brand H., Steinberg V.* Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium//Physika. 1983. V. 119A. P. 327—338.
4. *Taslim M. E., Narusawa U.* Binary fluid convection and doublediffusive convection in a porous medium//Trans. ASME. J. Heat and Mass Transf. 1986. V. 108. № 1. P. 221—224.
5. *Nield D. A.* Onset of thermohaline convection in a porous medium//Water Resources Res. 1968. V. 4. № 3. P. 553—560.
6. *Сюэ-сень Ц.* Физическая механика. М.: Мир, 1965. 544 с.
7. *Patil P. R.* Soret driven instability of the reacting fluid in a porous medium//Isr. J. Technol. 1981. V. 19. № 5—6. P. 193—196.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
9. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
10. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
11. *Басниев К. С., Каплан А. Г.* Использование естественных термогравитационных эффектов при разработке газоконденсатно-нефтяных месторождений//Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1328—1331.
12. *Перепеличенко В. Ф.* Компонентоотдача нефтегазоконденсатных залежей. М.: Недра, 1990. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.XII.1991