

УДК 532.5 : 537.84

© 1993 г. М. П. ЗЕКЦЕР

АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПО ПЛОСКОМУ КАНАЛУ В СОБСТВЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Проведено исследование течения проводящего газа в плоском канале в гидравлическом приближении с учетом эффекта Холла и дифференциального члена в законе Ома. Несмотря на значительное число работ, посвященных течению в каналах (например, [1—7]), одновременный учет указанных факторов выполнен не был. Оказалось, что их наличие приводит к невозможности введения полностью однородного газодинамического потока, что усложняет задачу. Особое внимание уделено условиям реализации плавного перехода потока через характеристическую скорость, которая в этих условиях не соответствует газодинамическому числу Маха, равному единице.

1. Рассмотрим изотермическое квазиодномерное течение газа в плоском канале, верхняя и нижняя стенки которого являются идеальными проводниками (электродами), между которыми течет ток, а две боковые стенки — изоляторами. Такое течение газа описывается уравнениями магнитной гидродинамики [1]. Замыкающим для них является закон Ома, конкретный вид которого определяется условиями задачи. Будем использовать закон Ома в форме

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) - \beta \mathbf{j} \times \mathbf{e}_b, \quad \mathbf{D} = \frac{\nabla P_e}{en_e} \quad (1.1)$$

Здесь P_e и n_e — давление и концентрация электронной компоненты, σ — проводимость среды, \mathbf{U} — скорость, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, β — параметр Холла, \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{e}_b — единичный вектор в направлении вектора \mathbf{B} . Легко показать, что все остальные члены, содержащиеся в обобщенной форме закона Ома, обычно либо малы, либо вовсе отсутствуют [8].

Пренебрежем концевыми эффектами и будем полагать, что все токи замыкаются в пределах канала. Предположим также, что контрагирование разряда отсутствует и вектор плотности тока имеет две компоненты $\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0)$, а индуцированное магнитное поле — одну $\mathbf{B}(0, 0, B)$.

Введем в рассмотрение канонический поток с однородным распределением скорости U в плоскости поперечного сечения канала. Поскольку проекция ponderomotive силы на ось z равна нулю, $P = P(x, y)$. Применяя стандартную процедуру осреднения [1], получим следующую систему уравнений гидравлического приближения (значок $\langle \rangle$ обозначает среднее по сечению значение соответствующей величины):

$$S \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x} (S \langle \rho \rangle U) = 0 \quad (1.2)$$

$$S \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle U) + \frac{\partial}{\partial x} (S U^2 \langle \rho \rangle) = \frac{\partial}{\partial x} (S \langle P \rangle) + SF + S\tau_w^*$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \langle \mathbf{j} \times \mathbf{B} \rangle; \quad \tau_w^* = -\frac{1}{S} \int_{\Sigma} P \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} d\Sigma + \langle \tau_w \rangle; \quad \alpha = n \mathbf{e}_x$$

Здесь Σ — контур, ограничивающий выбранное сечение, \mathbf{n} — вектор, направленный по нормали к контуру, τ_w — сила, возникающая на стенке канала за счет вязких напряжений, S — площадь поперечного сечения канала, ρ — плотность среды, \mathbf{e}_x — единичный вектор в направлении оси x .

Введенный таким образом поток не является полностью однородным, ибо давление не может быть в рассматриваемой постановке однородным по сечению канала. Поскольку течение полагается изотермическим, что является неплохим приближением для полностью ионизованного газа вследствие его высокой теплопроводности, всюду ниже вместо уравнения энергии будет использоваться замыкающее соотношение

$$\frac{d\langle P \rangle}{dx} = \alpha^2 \frac{d\langle \rho \rangle}{dx} \quad (1.3)$$

где α — скорость звука.

Будем считать давление P на контуре Σ кусочно-постоянной функцией. Тогда для стационарного течения невязкого газа получим

$$\rho U S = G \quad (1.4)$$

$$\rho U \frac{dU}{dx} = - \frac{d\langle P \rangle}{dx} + F - \frac{\langle P \rangle}{S} \frac{dS}{dx} + \frac{1}{S} (P_2 S_2' - P_1 S_1')$$

$$S = S_2 - S_1; \quad S_1 = l R_1$$

Здесь l — ширина канала, R_i — расстояние от оси до верхней и нижней стенок, G — массовый расход газа.

Для замыкания (1.3)—(1.4) необходимо получить в явном виде выражения для F — среднего значения пондермоторной силы и P_i — давления на стенках канала.

Выпишем уравнение движения (1.2) в проекции на ось Y и проекцию уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c$ на ось z

$$- \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{c} j_x B(x, y) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \quad (1.6)$$

Полагая, что $j_x = I_x/S = j_x(x)$, можно из (1.5)—(1.6) получить вид функций $B(x, y)$, $P(x, y)$, а также с их средних значений

$$B(x, y) = \frac{4\pi}{c} j_x y + B, \quad \langle B \rangle = B + \frac{4\pi}{c} j_x \frac{R_2 + R_1}{2} \quad (1.7)$$

$$P(x, y) = - \frac{1}{c} j_x B y - \frac{4\pi}{c^2} j_x^2 \frac{y^2}{2} + P \quad (1.8)$$

$$\langle P \rangle = P - \frac{1}{c} j_x B \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{4\pi}{c^2} j_x^2 \frac{R_2^3 - R_1^3}{6(R_2 - R_1)}$$

Здесь P и B — неизвестные пока функции координаты x . Для определения вида функции F воспользуемся проекцией уравнения Максвелла на ось Y

$$\frac{4\pi}{c} j_y(x, y) = - \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \quad (1.9)$$

Отсюда следует, что

$$F = - \frac{d}{dx} \left\langle \frac{B^2(x, y)}{8\pi} \right\rangle$$

или

$$F = -\frac{1}{8\pi} \left\{ 2BB' + \left(\frac{4\pi}{c} \right)^2 \frac{I_x^2 (R_2^2 - R_1^2)^2 (R_2 R_1' - R_1 R_2')}{l^2 (R_2 - R_1)^4} + \right. \\ \left. + \frac{4\pi I_x}{cl} \left[B' \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} + \frac{2B (R_2 R_1' - R_1 R_2')}{(R_2 - R_1)^2} \right] \right\} \quad (1.10)$$

Структура уравнений (1.3)—(1.4) такова, что функция P в окончательные соотношения не входит. Поэтому для замыкания системы уравнений (1.3)—(1.4) осталось получить выражение для B .

Осредняя (1.9) по сечению, с учетом (1.1) получим (параметр Холла всюду предполагается постоянным)

$$\frac{4\pi}{c} \langle j_y(x, y) \rangle = -\frac{d}{dx} \langle B(x, y) \rangle \quad (1.11)$$

$$\langle j_y(x, y) \rangle = \frac{\sigma}{(1 + \beta)^2} \left(\langle E_y \rangle - \frac{U}{c} \langle B(x, y) \rangle + \beta \langle E_x \rangle + \langle D_y \rangle + \beta \langle D_x \rangle \right)$$

Входящие в (1.11) средние $\langle E_x \rangle$ и $\langle E_y \rangle$ определим из следующих соображений. Интегрируя по сечению z -компоненту уравнения $\text{rot} \mathbf{E} = 0$, с учетом равенства нулю касательной составляющей напряженности электрического поля получим

$$\langle E_y \rangle = -V / (R_2 - R_1) \quad (1.12)$$

где V — разность потенциалов между электродами. Для $\langle E_x \rangle = -\langle E_y \tan \psi \rangle \simeq -\langle E_y \rangle \langle \tan \psi \rangle$, где ψ — угол наклона вектора \mathbf{E} к оси x , используя для $\tan \psi$ линейную аппроксимацию, получим

$$\tan \psi = \frac{R_2' - R_1'}{R_2 - R_1} y + \frac{R_2 R_1' - R_1 R_2'}{R_2 - R_1}$$

$$\langle E_x \rangle = -(R_2' + R_1') \langle E_y \rangle / 2 \quad (1.13)$$

Определим теперь средние значения компонент вектора \mathbf{D} , входящие в (1.11). Полагая плазму полностью ионизованной, получим

$$\langle D_y \rangle = -\frac{1}{enc} j_x \left(B + \frac{4\pi}{c} j_x \frac{R_2 + R_1}{2} \right) \quad (1.14)$$

$$\langle D_x \rangle = \frac{1}{en} \left[\frac{\partial}{\partial x} \langle P \rangle - \frac{P_2 R_2' - P_1 R_1'}{R_2 - R_1} + \frac{R_2' - R_1'}{R_2 - R_1} \langle P \rangle \right]$$

Уравнения (1.4) и (1.11) с учетом (1.7), (1.8), (1.10), (1.12)—(1.15) сводятся к двум безразмерным уравнениям

$$M' = \frac{F_1}{F_0}, \quad b' = \frac{F_2}{F_0} \quad (1.15)$$

$$F_1 = \frac{s'}{Ms} + Ns \left\{ -\eta^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2(r_2 - r_1)^2} Z_1 - \eta b Z_1 + \frac{r_2'}{r_2 - r_1} Z_2 - \frac{r_1'}{r_2 - r_1} Z_3 \right\} - \\ - Ns Z_4 \left\{ -\eta Z_1 + K \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \left(1 - \frac{\beta}{2} (r_2' + r_1') \right) + M \frac{Rm}{K} Z_4 (1 + \xi \eta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\beta \xi Rm Ms}{KN} \left(-\frac{s'}{Ms^2} + \frac{N}{r_2 - r_1} (r_2' Z_2 - r_1' Z_3) \right) \right] \right\}$$

$$F_2 = \frac{2\beta\xi \text{Rm}}{MN} F_1 + F_0 \left\{ -\eta Z_1 + K \left[\frac{1}{r_2 - r_1} \left(1 - \frac{\beta}{2} (r_2' + r_1') \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + M \frac{\text{Rm}}{K} Z_4 (1 + \eta\xi) + \frac{2\beta\xi \text{Rm} Ms}{KN} \left(-\frac{s'}{Ms^2} + \frac{N}{r_2 - r_1} (r_2' Z_2 - r_1' Z_3) \right) \right] \right\} \\ F_0 = 1 - \frac{1}{M^2} + \frac{2\beta\xi \text{Rm} s}{M} Z_4, Z_1 = \frac{r_2 r_1' - r_1 r_2'}{(r_2 - r_1)^2}, Z_2 = -\frac{\eta b}{2} + \eta^2 \frac{-2r_2^3 - r_1^3 + 3r_2^2 r_1}{6(r_2 - r_1)^3}, \\ Z_3 = \frac{\eta b}{2} + \eta^2 \frac{2r_1^3 + r_2^3 - 3r_1^2 r_2}{6(r_2 - r_1)^3}, Z_4 = b + \frac{\eta}{2} \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \\ M = \frac{U}{a}, s = \frac{S}{S_0}, x = \frac{x}{R_0}, r = \frac{R}{R_0}, b = \frac{B}{B_0}, \eta = \frac{I_x}{I} \\ N = \frac{B_0^2 S_0}{4\pi G a}, K = \frac{4\pi\sigma V}{c B_0 (1 + \beta^2)}, \text{Rm} = \frac{aR}{v_m (1 + \beta^2)}, \xi = \frac{ml}{eG}$$

Здесь N — параметр взаимодействия, K — параметр нагрузки, Rm — магнитное число Рейнольдса. Что касается величины η , то она должна определяться из осредненного по сечению уравнения для продольной компоненты плотности тока. Результат осреднения зависит от конкретной электрической схемы замыкания токов. Например, если токи утечки на землю отсутствуют, электроды идеально секционированы и цепь продольного тока разомкнута, то $\eta = 0$ [1]. В общем случае η является некоторой функцией продольной координаты. Примем для упрощения, что η — варьируемый параметр задачи.

В качестве характерного значения индукции магнитного поля принято его значение B_0 в начальном сечении канала, которое с учетом сделанных выше предположений связано с током I следующим образом:

$$I = -l \int_0^L j_y dx = -\frac{c}{4\pi} l B_0$$

Отсюда следует, что $b < 0$ и граничные условия к (1.15) принимают вид $x = 0; b = -1, M = M_0$ (1.16)

2. Рассмотрим вначале простейший случай — канал постоянного сечения: $s = 1, r_2 = 1, r_1 = -1, s' = r_1' = 0$. Домножая координату x на $K/2$, получим

$$M' = -\frac{Nb(1 + k_1 Mb)}{F_0}, b' = \frac{(M^2 - 1)(1 + k_1 Mb)}{M^2 F_0} \quad (2.1)$$

$$k_1 = 2 \text{Rm} (1 + \eta\xi)/K, k_2 = 2\beta\xi \text{Rm}$$

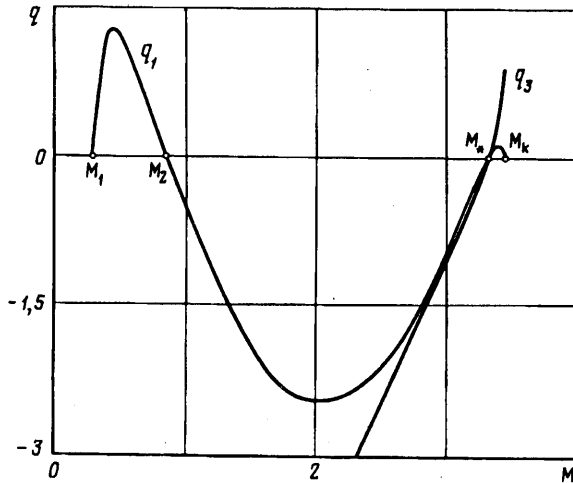
Отсюда легко получить соотношение, связывающее искомые функции M и b

$$\frac{dM}{db} = -\frac{M^2 bN}{M^2 - 1}, b = -\sqrt{\frac{2(CM - M^2 - 1)}{MN}}, C = 0,5N + M_0 + \frac{1}{M_0} \quad (2.2)$$

Решение системы (2.1) не имеет особенностей на фазовой плоскости (M, b) . Проанализируем совместно (2.1) и (2.2).

Система уравнений (2.1) имеет структуру типа уравнений обращения воздействия в газовой динамике [1, 9] с особой точкой (M_*, b_*)

$$M_*^2 = 1 + \frac{k_2}{k_1}, b_* = -\frac{1}{k_1 M_*}$$



Фиг. 1

Отличие особой точки от значения $M_* = 1$ связано с перекрестным действием эффекта Холла, определяемого параметром β , и градиентного члена в законе Ома, определяемого параметром ξ . В отсутствие хотя бы одного из них $M_* = 1$. Не останавливаясь пока на типе особой точки, изучим возможность непрерывного ускорения потока от чисел $M_0 < M_*$ до $M_k > M_*$. Обозначим

$$q_1 = -(1 + k_1 b M) N b, \quad q_2 = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) (1 + k_1 M b), \quad q_3 = 1 - \frac{1}{M^2} + k_2 \frac{b}{M}$$

Пусть M_1 , M_* , M_k — корни уравнения $q_1(M) = 0$. Легко показать, что качественно зависимости $q_1(M)$ и $q_3(M)$ всегда имеют вид, приведенный на фиг. 1, причем если $k_1 M_0 < 1$, то $M_0 < M_1$; в противном случае $M_1 > M_0$. Поскольку для непрерывного ускорения потока ($M' > 0$) необходимо, чтобы q_1 и q_3 имели одинаковые знаки, должно выполняться условие $k_1 M_0 > 1$. Число Маха на выходе из канала ускорителя определяется согласно (2.2)

$$M_k = 0,5C (1 + \sqrt{1 - 4/C^2})$$

Для особой точки системы (2.1) характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{k_1 k_2 M_* - N}{k_1 + k_2} \lambda = 0 \quad (2.3)$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет минимум один нулевой корень, т. е. особая точка — вырожденная.

Для анализа вырожденной особой точки перейдем к изучению обычной автономной системы [10]

$$\dot{M} = -N b (1 + k_1 M b); \quad \dot{b} = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) (1 + k_1 M b) \quad (2.4)$$

и приведем ее к виду, когда особенность находится в начале координат фазовой плоскости (W_1, W_2), $M = M_* + W_1$, $b = b_* + W_2$. Разложив правые части (2.4) в ряд вблизи особой точки (M_* , b_*), получим

$$\dot{W}_1 = c_1 W_1 + c_2 W_2 + \varphi_1, \quad \dot{W}_2 = c_3 W_1 + c_4 W_2 + \varphi_2 \quad (2.5)$$

$$c_1 = -\frac{N}{k_1 + k_2}, \quad c_2 = N, \quad c_3 = -\frac{k_2}{(k_1 + k_2) M_*}, \quad c_4 = \frac{k_1 k_2 M_*}{k_1 + k_2}$$

$$\varphi_1 = -N k_1 M_* W_2^2, \quad \varphi_2 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{M_*^{i+2}} W_1^i$$

Рассмотрим вначале случай, когда $N \neq k_1 k_2 M_*$, и перейдем к новым переменным u и v с помощью линейного преобразования

$$W_1 = u + v, \quad W_2 = -\frac{c_1}{c_2} u + \frac{c_4}{c_2} v$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{(c_4 + c_1)v + \psi_2}{\psi_1} \quad (2.6)$$

$$\psi_2 = \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 \rho_2}{c_4 + c_1}, \quad \psi_1 = \frac{c_4 \varphi_1 - c_2 \rho_2}{c_4 + c_1}$$

Определим характер изменения v вблизи особой точки, учитывая, что числитель и знаменатель (2.6) в ней обращаются в нуль

$$v \approx K_2 u^2 + K_3 u^3 \quad (2.7)$$

$$K_2 = \frac{N k_1 (-N M_* + 2 k_1 (k_1 + k_2))}{(c_4 + c_1)^2 (k_1 + k_2)^3}, \quad K_3 = -\frac{3N}{(c_4 + c_1)^2 M_*^3}$$

Если $K_2 \neq 0$, то характер изменения v определяется первым членом в (2.7); в противном случае — вторым.

Подставим (2.7) в выражение для ψ_1 и представим его в виде разложения по степеням u (как будет видно ниже, для полного анализа особой точки необходимо удержать первые три члена разложения)

$$\psi_1 = \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \gamma_4 u^4 \quad (2.8)$$

Необходимо всякий раз учитывать только старший член разложения, причем характер особой точки определяется степенью u и знаком стоящего перед ним коэффициента γ [10]

$$\gamma_2 = -c_4 N k_1 M_* \frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{2c_2}{M_*^2} = \frac{N k_1^2}{(k_1 + k_2)^2 (c_4 + c_2)} \left(2 - \frac{k_2}{k_1} \right); \quad \frac{k_2}{k_1} \neq 2$$

При $\gamma_2 \neq 0$ особая точка — двукратный седло-узел с одним узловым сектором и двумя седловыми. Узловой сектор оказывается устойчивым при $W < W_*$ и неустойчивым при $W > W_*$; W_* — корень уравнения

$$W \sqrt{1 + W} - p = 0; \quad W = \frac{k_2}{k_1}, \quad p = \frac{N}{k_1^2}$$

По сделанному выше предположению, $W \neq W_*$. (Это эквивалентно условию $k_1 k_2 M_* \neq N$).

При $\gamma_2 = 0$ имеем $W = 2$, $M_*^2 = 3$ и

$$\gamma_3 = \frac{1}{c_4 + c_1} \left[2c_4 N k_1 M_* K_2 \frac{c_1 c_4}{c_2^2} + c_4 \left(\frac{2K_2}{M_*^4} - \frac{3}{M_*^5} \right) \right] = \frac{p(7p - 22\sqrt{3})}{3\sqrt{3}(-p + 2\sqrt{3})^2} k_1^2$$

Особая точка имеет характер седла, если $p > 22\sqrt{3}/7$, и узла — в противном случае. Узел оказывается устойчивым, если $22\sqrt{3}/7 > p > 2\sqrt{3}$, и неустойчивым при $p < 2\sqrt{3}$.

Если $p = 22\sqrt{3}/7$, то $\gamma_3 = 0$ и характер особой точки определяется последним членом в (2.8)

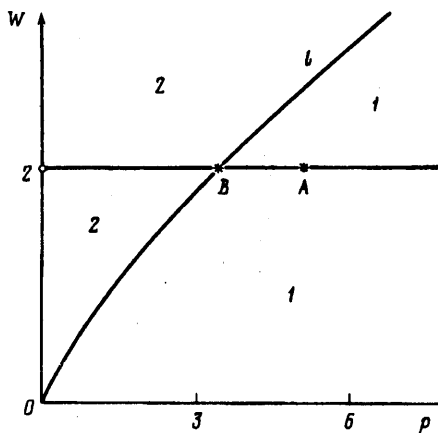
$$\gamma_4 = \frac{1}{c_4 + c_1} \left[2c_4 N k_1 M_* \frac{c_1 c_4}{c_2^2} K_3 - c_4 N k_1 M_* K_2^2 \frac{c_1^2}{c_2^2} - c_2 \left(-\frac{2}{M_*^4} (2K_3 + K_2^2) + \frac{9}{M_*^5} K_2 - \frac{4}{M_*^6} \right) \right]$$

Прямые вычисления показывают, что $\gamma_4 < 0$. В этом случае имеем четырехкратный седло-узел с устойчивым узловым сектором.

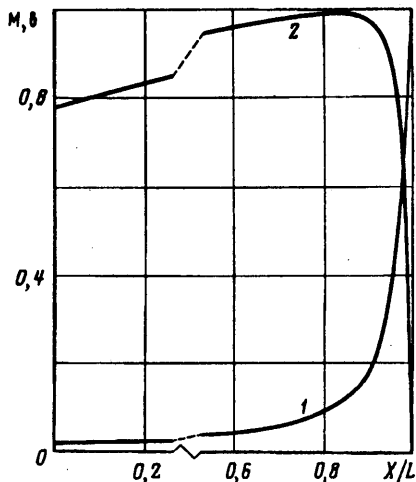
В случае двукратного нулевого корня характеристического уравнения (2.3) $k_1 k_2 M_* = N$ и применим метод разрешения особенностей с помощью специального преобразования фазового пространства, при котором вместо особой точки вклеивается целое многообразие, в нашем случае — окружность [11]. Перейдем в (2.5) к полярным координатам $W_1 = r \cos \alpha$, $W_2 = r \sin \alpha$. Система (2.5) после преобразования примет вид (нелинейными членами пренебрегаем)

$$\dot{r} = \cos \alpha (c_1 r \cos \alpha + c_2 r \sin \alpha) + \sin \alpha (c_3 r \cos \alpha + c_4 r \sin \alpha)$$

$$\dot{\alpha} r = -\sin \alpha (c_1 r \cos \alpha + c_2 r \sin \alpha) + \cos \alpha (c_3 r \cos \alpha + c_4 r \sin \alpha)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда тип особой точки определяется корнями уравнения [11]

$$-\sin \alpha(c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha) + \cos \alpha(c_3 \cos \alpha + c_4 \sin \alpha) = 0$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{k_1 \pm k_2}, \quad \lambda = \operatorname{tg}(\alpha)$$

и особая точка имеет тип вырожденного неустойчивого узла.

Итог проведенного анализа представлен на фиг. 2. Вне прямой $W=2$ и кривой l , подчиняющейся уравнению $W\sqrt{1+W} - p = 0$, особая точка имеет тип двукратного седло-узла с одним узловым сектором и двумя седловыми, причем в области 1 узловой сектор устойчив, а в области 2 — неустойчив. На прямой $W=2$ особая точка имеет тип неустойчивого узла на участке $[C, B)$, устойчивого узла на участке (B, A) и седла на участке (A, ∞) . В т. А особая точка — четырехкратный седло-узел с устойчивым узловым сектором. На линии l — вырожденный неустойчивый узел. Анализ устойчивости течения в окрестности вырожденной точки такого сорта является сложной, до настоящего времени нерешенной задачей. Геометрия всех особых точек подробно описана в [10].

3. Перейдем теперь к результатам численного решения системы уравнений (1.15) с граничными условиями (1.16). Расчеты проводились для следующего диапазона безразмерных параметров: $0 < \eta < 1$; $0,01 < \beta < 100$; $0,01 < Rm < 100$; $0,01 < N < 10^5$; $0,01 < K < 10^5$; $0,01 < \xi < 1$. Форма канала: либо постоянного сечения, либо расширяющийся с $r_1 = \pm(h_i x + 1)$, причем верхний знак соответствует r_1 , а нижний — r_1 ; $h_i = 0,01$; $0,1$.

Поскольку наибольший интерес представляет ускорение потока от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям, величина M_0 варьировалась в пределах от 0,1 до 0,7 и отбирались решения, соответствующие $M_k > 10$. Причем рассматривались лишь решения, соответствующие непрерывному ускорению потока ($M' > 0$ на всей длине канала).

Расчеты показали следующее. В рассматриваемом диапазоне параметров не существует решения с $\xi = 0,01$. При $\xi = 0,1$ появляется узкая область существования решений, одно из которых, соответствующее каналу постоянного сечения с $\eta = 0$, $\beta = 100$, $Rm = 100$, $K = 10$, $N = 10$, $M_0 = 0,2$, приведено на фиг. 3. Кривая 1 соответствует распределению по длине канала числа Маха, отнесенного к $M_{\max} = 10,1$, а кривая 2 — распределению магнитного поля, отнесенного к $B_{\max} = -1,281$. Безразмерная длина канала $L = 9,72$ определялась из условия

равенства нулю магнитного поля на выходе из канала. Особая точка находится практически в выходном сечении канала и является двукратным седло-узлом.

При $\xi = 1$ область существования решений значительно расширяется. Для канала постоянного сечения решение существует во всем диапазоне изменения параметров η при $Rm = 10$ и 100 , $\beta = 10$ и 100 , N от $0,01$ до 100 , K от 1 до 100 и различных значениях M_0 . Расчеты показали, что если решения существуют, то они слабо различаются для различных значений Rm , β и η .

Для канала переменного сечения с $h_i = 0,1$ существуют решения при $0,1 < \eta < 1$ и $Rm = 100$, $\beta = 100$, $N = 100$, $K = 100$ и различных значениях M_0 .

Общий вывод по всем проведенным расчетам следующий. На сам факт существования решения влияют все без исключения параметры. Однако если решение существует, то его отличительные особенности определяются, в основном, параметрами нагрузки и взаимодействия, а влияние остальных параметров мало. Основное ускорение потока почти всегда происходит в малой выходной части канала, причем $M_k \approx M_*$. Это позволяет получать достаточно большие скорости течения еще до перехода через особую точку. Необходимая для ускорения потока длина канала определяется его геометрией и всей совокупностью задаваемых параметров.

Сопоставим полученные результаты с экспериментальными данными [12]. В [12] проведено исследование течения полностью ионизированной плазмы водорода в канале коаксиального ускорителя радиуса $1-2$ см. Длина канала ≈ 20 см, концентрация заряженных частиц $10^{16} - 10^{18}$ см⁻³, температура электронов $2 - 6$ эВ. Расход плазмы варьировался от $0,1$ до 4 г/с, ток — от 10 до 30 кА, напряжение на электродах — от 100 до 300 В. Показано, что температура плазмы слабо менялась как в радиальном, так и осевом направлениях.

Весьма неожиданным для авторов [12] явилось отсутствие в экспериментах ускорения потока до сверхзвуковых скоростей. Анализируя результаты, авторы указывают на «две основные причины отсутствия ускорения потока: 1) неоптимальность выбранной формы электронов и отсутствие внутреннего согласования формы канала, величины массового расхода и разрядного тока; 2) возникновение в плазме неустойчивостей, приводящих к турбулизации потока».

Ни в коей мере не отрицая важность этих причин, посмотрим на результаты [12] под углом зрения настоящей работы. Рассчитанные по данным [12] значения безразмерных параметров лежат в следующем диапазоне: $\xi = 0,08-3$; $N = 7-2500$; $K = 0,01-5$; $Rm = 0,05-15$; $\beta = 0,03-7$. В этом диапазоне параметров решение, удовлетворяющее сформулированным выше условиям, отсутствует и поэтому отсутствие ускорения потока является естественным. Наиболее близким по параметрам, хотя и не по всем, к экспериментальным условиям [12] является, пожалуй, решение с $\xi = 1$, $\eta = 0,3$, $K = 10$, $N = 10$, $\beta = 100$, $Rm = 100$, $M_0 = 0,1$. При этом необходимая для ускорения потока длина канала составляет 140 калибров (ускорение до скорости звука происходит на $0,9$ длины канала), тогда как в [12] длина канала не превышала $10-15$ калибров.

Таким образом, сформировав на входе в канал необходимой длины поток, отвечающий изложенным здесь требованиям, можно надеяться на решение проблемы ускорения плазмы до сверхзвуковых скоростей, не применяя сопло Лавала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 3—87.
3. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Там же. С. 88—163.

4. Брушлинский К. В., Козлов А. Н., Морозов А. И. Динамика пробных частиц в двумерном потоке плазмы в канале: Препринт № 156. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1980. 24 с.
5. Брушлинский К. В., Калугин Г. А., Козлов А. Н. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале: Препринт № 50. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1982. 28 с.
6. Козлов А. Н. Численное исследование двумерного течения ионизирующегося газа и динамика пробных частиц в коаксиальных каналах: Препринт № 71. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1982. 23 с.
7. Брушлинский К. В., Козлов А. Н. Двумерные холловские течения плазмы конечной проводимости и их исследование методом пробных частиц: Препринт № 72. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1982. 27 с.
8. Куликовский Г. А., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
9. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
10. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и прием качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
11. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.
12. Афанасьев В. П., Блинов И. О., Дричко Д. А. и др. Коаксиальный плазменный инжектор в квазистационарном режиме работы. Ч. 1, 2//Журн. техн. физ. 1991. Т. 61. № 5. С. 15—32.

Москва

Поступила в редакцию
3.II.1992