МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1992

УДК 532.527

© 1992 г. В. Ф. КОЗЛОВ

МОДЕЛЬ ДВУХМЕРНОГО ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С МЕХАНИЗМОМ ВОВЛЕЧЕНИЯ

Предлагается модель для описания средних по вертикали вихревых движений несжимаемой вязкой жидкости при произвольной вертикальной структуре придонного экмановского пограничного слоя. Использован подход, аналогичный [1]: необходимые для замыкания уравнения вихря вторые моменты отклонений от средних скоростей вычисляются с помощью экмановского решения для градиентных течений, что позволяет учесть интегральный эффект придонного пограничного слоя. В результате указанные слагаемые приводят к специфической форме нелинейного трения с коэффициентом, зависящим от завихренности среднего потока. В частном случае постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена устраняются неточности модели [1].

Полученное обобщенное уравнение вихря имеет решения типа вихревых пятен с однородным распределением завихренности внутри, которые могут быть эффективно исследованы с помощью адекватных вычислительных алгоритмов [2]. На примере эволюции вихревых пятен проиллюстрирован механизм вовлечения на фронте завихренности. Построено точное решение задачи об эволюции эллиптического вихря (обобщенный вихрь Кирхгофа), который в случае достаточно сильной антициклонической завихренности вырождается сначала в прямолинейный отрезок (вихревую пелену), а затем — в точечный вихрь. Построены уравнения, описывающие динамику эллиптического вихревого пятна во внешнем поле с линейной зависимостью скорости от горизонтальных координат и обобщающие классическую модель Чаплыгина — Кида [3, 4].

1. Модель. Рассмотрим движение однородной несжимаемой жидкости в безграничном горизонтальном слое постоянной толщины h, вращающемся вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью $^1/_2 f$ (f — параметр Кориолиса). Исходные уравнения запишем в виде

$$DV + w_z = 0 \tag{1.1}$$

$$V_t + n \times (f + \omega) V + wV_z = -\nabla (p + ½V^2) + \tau_z \tag{1.2}$$

$$DV \equiv u_x + v_y, \quad \omega = RV \equiv v_x - u_y$$

Здесь $V = (u, v)$ — вектор горизонтальной скорости, w — вертикальная скорость, n — вертикальный орт, вектор касательного напряжения τ и давление p нормированы на плотность, ∇ — оператор горизонтального градиента. Граничные условия по вертикали

$$z = 0: \; V = 0, \; w = 0; \quad z = h: \; \tau = 0, \; w = 0 \tag{1.3}$$

означают прилипание на дне и свободное скольжение на поверхности. Будем изучать средние по толщине слоя течения

$$\langle V \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h V \, dz$$

Полагая $V = \langle V \rangle + V'$, $d' = DV'$ и осредняя уравнения (1.1) и (1.2) при условиях (1.3), находим

$$D\langle \mathbf{V}\rangle = 0 \tag{1.4}$$

$$\langle \mathbf{V}\rangle_t + \mathbf{n}\times[(f+\langle\omega\rangle)\langle\mathbf{V}\rangle + \langle\omega'\mathbf{V}'\rangle] + \langle d'\mathbf{V}'\rangle + \frac{\tau_0}{h} = -\nabla\langle p + \tfrac{1}{2}\mathbf{V}^2\rangle$$

Применяя к последнему соотношению оператор R, получаем уравнение вихря

$$R\left(\langle\mathbf{V}\rangle_t + \langle d'\mathbf{V}'\rangle + \frac{\tau_0}{h}\right) + D(\langle\omega\rangle\langle\mathbf{V}\rangle + \langle\omega'\mathbf{V}'\rangle) = 0 \tag{1.5}$$

Для замыкания системы (1.4), (1.5) примем

$$\tau_0 = \mu\mathbf{V}_z'\big|_{z=0},\quad u' + iv' = K(z)\langle u + iv\rangle \tag{1.6}$$

Смысл первого соотношения очевиден, а второе можно рассматривать как асимптотическую форму отношения $(u'+iv')/\langle u+iv\rangle$ при $\varepsilon = h/L \to 0$, где L — характерный горизонтальный масштаб изменения поля скорости. Комплекснозначная функция K следует из решения задачи Экмана о градиентных течениях. Например, при параметризации внутреннего трения в виде (1.6) с постоянным μ имеем

$$K = \frac{A}{\langle A\rangle} - 1,\quad A = 1 - \frac{\operatorname{ch} k(h-z)}{\operatorname{ch} kh},\quad k = \frac{1+i}{h_E} = \frac{1+i}{\sqrt{2\mu/f}} \tag{1.7}$$

где h_E — экмановский вертикальный масштаб. Из (1.6) следуют выражения

$$\omega' - id' = K\langle\omega\rangle,\quad R\tau_0 = \mu_0\langle\omega\rangle\operatorname{Re}K_z(0)$$

подстановка которых в (1.5) окончательно дает

$$\omega_t + (1+\alpha)D\omega\mathbf{V} + \beta R(\omega_* + \omega)\mathbf{V} = 0 \tag{1.8}$$

$$\alpha - i\beta = \langle K^2\rangle,\quad \omega_* = \frac{\mu_0}{\beta h}\operatorname{Re}K_z(0)$$

где для простоты снят знак < > в уравнении вихря.

В случае (1.7) и $h_E/h \ll 1$ (глубокое море) асимптотически имеем $\alpha = \beta = h_E/4h$, $\omega_* = 2f$. Если, пренебрегая боковым трением, уравнение (6) работы [1] записать в форме (1.8), то окажется $\alpha = -6h_E/h$, $\beta = -2h_E/h$, $\omega_* = -f/4$. Принципиальное значение имеет допущенная в [1] ошибка в знаках, так как это меняет все характерные для (1.8) свойства циклон-антициклонной асимметрии на противоположные.

Уравнения (1.4) и (1.8) при заданных коэффициентах α, β, ω_* образуют замкнутую систему и полностью определяют рассматриваемую модель. В дальнейшем предполагается, что зависимость внутреннего трения τ от вертикальной структуры скорости такова, что все перечисленные коэффициенты положительны при $f > 0$.

Дифференциальные уравнения характеристик уравнения (1.8) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U} \equiv (1+\alpha)\mathbf{V} + \beta\mathbf{V}\times\mathbf{n} \tag{1.9}$$

где «характеристическая» скорость $\mathbf{U}$ удовлетворяет условиям $D\mathbf{U} = \beta\omega$, $R\mathbf{U} = (1+\alpha)\omega$, по величине пропорциональна скорости $\mathbf{V}$ и повернута по отношению к последней вправо на угол δ, причем $\operatorname{tg}\delta = \beta/(1+\alpha)$. На характеристиках (1.9) уравнение (1.8) преобразуется в $d\omega/dt + \beta(\omega_* + \omega)\omega = 0$ и интегрируется при начальном условии $\omega\,|_{t=0} = \omega_0$

$$\omega = \omega_0 \frac{1-\tau}{1+(\omega_0/\omega_*)}, \quad \tau = 1 - e^{-\beta\omega_* t} \tag{1.10}$$

Пусть $\delta S(t)$ — площадь мгновенного сечения бесконечно тонкой характеристической трубки в пространстве x, y, t. С учетом дивергентности поля U имеем $d\delta S/dt = \beta\omega\delta S$, откуда с помощью (1.10) находим

$$\delta S = \delta S_0\,[1 + (\omega_0/\omega_*)\,\tau] \tag{1.11}$$

Для вихревой интенсивности (циркуляции) произвольной характеристической трубки из (1.10) и (1.11) получаем

$$\Gamma = \int \omega\, dS = \Gamma_0\,(1-\tau) \tag{1.12}$$

Из (1.10) следует, что при $\omega_0/\omega_* < -1$ на соответствующей характеристике при $\tau = -\,\omega_*/\omega_0 < 1$ завихренность обращается в $-\infty$, а $\delta S = 0$. Многообразие таких точек в пространстве x, y, t представляет некоторую кривую, которая является «начальной» для возникающего разрыва скорости. Благодаря условию несжимаемости (1.4) скачок претерпевает лишь касательная составляющая, т. е. формируется вихревая пелена. Закон ее движения нетрудно получить из имеющего дивергентную форму уравнения (1.8).

2. Вихревые пятна и механизм вовлечения. Рассмотрим в качестве простейшего начального состояния вихревое пятно, представляющее однородно завихренную область S_0 с границей C_0 в покоящейся на бесконечности жидкости. В процессе эволюции свойство горизонтальной однородности сохраняется, причем изменение формы пятна определяется последовательностью временных сечений порождаемой контуром C_0 характеристической трубки. Интенсивность пятна $\Gamma = \omega S$ монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$ с характерным временем релаксации $t_r = 1/\beta\omega_*$ (эффект линейного придонного трения). В отличие от вихревых пятен классической гидродинамики, для которых ω и S являются инвариантами, изменение этих величин в рассматриваемом случае зависит от параметра циклональности $\sigma = \omega_0/\omega_*$. Площадь $S = S_0(1 + \sigma\tau)$ циклонических ($\sigma > 0$) вихревых пятен со временем увеличивается, а антициклонических ($\sigma < 0$) — уменьшается. При $\sigma < -1$ пятно в момент времени $t_* = -\,(1/\beta\omega_*)\ln(1 + 1/\sigma) > 0$ коллапсирует в вихревую пелену или в точечный вихрь. Завихренность $\omega = \omega_0(1-\tau)/(1+\sigma\tau)$ по абсолютной величине убывает при $\sigma > -1$ и растет при $\sigma < -1$, обращаясь в $-\infty$ при $t = t_*$. Особенно наглядно перечисленные свойства проявляются на примере круглого вихревого пятна радиуса $a(t)$ (аналог вихря Рэнкина), когда $S = \pi a^2$. В этом случае $a = a_0\sqrt{1+\sigma\tau}$, причем при $\sigma < -1$ формула верна лишь до $\tau_* = -\,1/\sigma$; для $\tau_* < \tau < 1$ имеем $a \equiv 0$, $\Gamma = \pi a_0^2\omega_0(1-\tau)$, т. е. завихренность имеет дельтообразный характер (точечный вихрь). Если при $\tau = 0$ вихревое пятно представляет точечный циклон с интенсивностью $\Gamma_0 > 0$, то одно из возможных решений

$$a = \sqrt{\Gamma_0\tau/\pi\omega_*}, \quad \omega = \omega^*\,(1-\tau)/\tau$$

Эти примеры демонстрируют эффект вовлечения, проявляющийся в передаче завихренности от одних частиц к другим в поле средней скорости и приводящий к расширению (сжатию) циклонически (антициклонически) завихренных областей. Таким образом, в рассматриваемой модели заключен механизм ослабления циклонических фронтальных зон (сдвиговых слоев) и обострения антициклонических, вплоть до вырождения последних в вихревую пелену. В формуле (1.9) параметры α и β естественно назвать соответственно коэффициентами продольного и поперечного вовлечения.

Индуцируемое вихревым пятном поле скорости допускает представление в виде контурного интеграла, с помощью которого легко находим

$$\mathbf{U} = -\frac{\omega}{2\pi}\oint_C \ln|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|\,[(1+\alpha)\,d\mathbf{r}' + \beta\,(d\mathbf{r}' \times \mathbf{n})] \tag{2.1}$$

Вместе с (1.9) это выражение определяет эволюцию границы C произвольного вихревого пятна, которая в общем случае может быть изучена только численными методами [2]. Ниже рассматриваются случаи, когда соответствующий анализ удается выполнить аналитически или свести его к интегрированию конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Обобщенный вихрь Кирхгофа. Пусть на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ параметрическое уравнение контура $C(t)$ имеет вид $z = z(\zeta, t)$, где удовлетворяющий условию $|\zeta| = 1$ комплексный параметр ζ имеет смысл лагранжевой координаты для отмеченных частиц, перемещающихся в поле характеристической скорости $\mathbf{U}$ по закону (1.9). Принимая во внимание (2.1), имеем

$$z_t(\zeta, t) + \frac{\omega}{2\pi}(1+\alpha-i\beta)\oint_{|\zeta'|=1} \ln|z(\zeta', t) - z(\zeta, t)|\, z_\zeta(\zeta', t)\, d\zeta' = 0$$

или в более компактной форме

$$z_T + \frac{\omega_c}{2\pi}\oint_C \ln|z' - z|\, dz' = 0 \tag{3.1}$$

$$\omega_c = \omega_0(1+\alpha-i\beta), \quad T = \frac{1}{\beta\omega_0}\ln(1+\sigma\tau)$$

Ищем решения уравнения (3.1) вида $z = e^{\theta_c(T)}F(e^{i\theta_c(T)}\zeta)$, где $F(\zeta)$ — некоторая аналитическая в окрестности $|\zeta| = 1$ функция, а $\theta_c = \theta_r + i\theta_i$ — комплексная фаза. Получаем нелинейную спектральную задачу

$$\lambda\frac{d}{d\zeta}[\zeta F(\zeta)] + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=\rho} \ln|F(\zeta') - F(\zeta)|\,\frac{dF}{d\zeta}(\zeta')\, d\zeta' = 0 \tag{3.2}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega_c}\frac{d\theta_c}{dT}, \quad \rho = e^{-\theta_i}$$

Если $F(\zeta)$ и $\lambda(\rho)$ найдены, фаза определяется из уравнения $d\theta_c/dT = \omega\lambda(e^{-\theta_i})$, причем для вещественного $\lambda(\rho)$ эта задача решается в квадратурах

$$\theta_r = -\frac{1+\alpha}{\beta}\theta_i, \quad \int_1^{e^{-\theta_i}}\frac{d\rho}{\rho\lambda(\rho)} = \omega_0\beta T \tag{3.3}$$

где принято $\theta_c(0) = 0$.

Покажем, что задача (3.2) содержательна. Пусть F — функция с вещественными коэффициентами, т. е. $\overline{F(\zeta)} = F(\bar\zeta) = F(\rho^2/\zeta)$, так как $\zeta\bar\zeta = \rho^2$. Учитывая равенство $|F(\zeta') - F(\zeta)|^2 = [F(\zeta') - F(\zeta)]\,[F(\rho^2/\zeta') - F(\rho^2/\zeta)]$ и интегрируя в (3.2) по частям, получаем

$$\lambda\frac{d}{d\zeta}[\zeta F(\zeta)] + \frac{\rho^2}{2\pi i}\int_{|\zeta'|=\rho}\frac{[F(\zeta') - F(\zeta)]\,dF/d\zeta\,(\rho^2/\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'^2\,[F(\rho^2/\zeta') - F(\rho^2/\zeta)]} = 0$$

Примем при вещественных постоянных A и B

$$F(\zeta) = A\zeta + \frac{B}{\zeta}$$

Применяя теорию вычетов, находим при условии $|A/B|\rho^2 > 1$

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{B^2}{A^2\rho^4}\right)$$

Из (3.3) следует

$$e^{-4\theta_i} = \frac{B^2}{A^2} + \left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right) e^{\omega_0\beta T}$$

Полагая $A + B = a_0 \geq B_0 = A - B > 0$, $a = Ae^{-2\theta_i} + B$, $b = Ae^{-2\theta_i} - B$, $\zeta = e^{i\varphi}$, с помощью (3.4) находим форму вихревого пятна

$$z = \tfrac{1}{2}e^{i\theta_r}\left[(a+b)\,e^{i(\theta_r+\varphi)} + (a-b)\,e^{-i(\theta_r+\varphi)}\right] \tag{3.4}$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left[(a_0 + b_0)\,e^{-2\theta_i} + (a_0 - b_0)\right], \quad b = \tfrac{1}{2}\left[(a_0 + b_0)\,e^{-2\theta_i} - (a_0 - b_0)\right]$$

$$e^{-2\theta_i} = \left[1 + \frac{4a_0b_0\sigma\tau}{(a_0 + b_0)^2}\right]^{1/2}$$

Контур C представляет эллипс с полуосями a, b, повернутый на угол θ_r по отношению к оси x.

В пределе

$$\alpha \to 0, \quad \beta \to 0, \quad a \to a_0, \quad b \to b_0, \quad \theta_r \to \frac{a_0b_0\omega_0}{(a_0 + b_0)^2}\,t$$

имеем классическое решение Кирхгофа [5]. В рассматриваемом случае, так как $a - b = a_0 - b_0$ и $\operatorname{sign}(d\theta_i/dt) = -\operatorname{sign}\omega_0$, эллиптические циклоны расширяются и приближаются к круговым, т. е. происходит осесимметризация вихря; антициклоны, наоборот, сжимаются с усилением эллиптичности, причем при $\sigma < -1$ в момент $t = t_*$ эллипс схлопывается в прямолинейный отрезок и формируется вихревая пелена конечной длины $2(a_0 - b_0)$. Нетрудно найти закон дальнейшей эволюции этого отрезка, однако такое решение является, по-видимому, неустойчивым, как и для вихрей Кирхгофа уже при $b_0/a_0 < 1/3$ [6].

4. Вихрь Кирхгофа во внешнем поле. Уравнениям (1.4), (1.8) удовлетворяет поле скорости

$$u^{(\Omega E)} = \tfrac{1}{2}(Ex - \Omega y) + u_0, \quad v^{(\Omega E)} = \tfrac{1}{2}(\Omega x - Ey) + v_0 \tag{4.1}$$

$$\Omega = \Omega_0\frac{1 - \tau}{1 + \sigma_0\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{\Omega_0}{\omega_*}$$

при произвольной зависимости u_0, v_0 и E от времени. Последние слагаемые не имеют принципиального значения, поэтому в дальнейшем принимается $u_0 = v_0 \equiv 0$. Условие $\sigma_0 > -1$ гарантирует ограниченность завихренности Ω со временем. При $E \equiv 0$ имеем твердотельное вращение с угловой скоростью $\Omega/2$, при $\Omega \equiv 0$ — чисто деформационное движение в главных осях, а при $E = \pm\Omega$ — прямолинейное сдвиговое течение вдоль биссектрис первого-третьего и второго-четвертого квадрантов.

В начальный момент времени на фоновое течение (4.1) накладывается вихревое пятно эллиптической формы с завихренностью ω_0, полуосями a_0, b_0 и углом поворота θ_0. Благодаря линейной зависимости фоновых скоростей от координат и результатам предыдущего пункта ясно, что пятно сохранит эллиптическую форму — нужно лишь найти зависимость определяющих его параметров ω, a, b, θ от времени. Согласно (1.10), суммарная завихренность в пятне меняется по закону

$$\omega + \Omega = \frac{(\omega_0 + \Omega_0)(1 - \tau)}{1 + \sigma\tau}, \quad \sigma = \frac{\omega_0 + \Omega_0}{\omega_*}$$

откуда с учетом (4.2) находим

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 - \tau)}{(1 + \sigma_0\tau)(1 + \sigma\tau)} \tag{4.2}$$

В системе координат ξ, η, связанной с главными осями эллипса, уравнение границы пятна запишем в виде

$$H \equiv \tfrac{1}{2}(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2) = 0 \tag{4.3}$$

$$\xi = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

По отношению к фоновому течению вихревое пятно индуцирует дополнительное поле скорости [5]

$$u^{(\omega)} = -\frac{\omega}{a+b}(b\xi\sin\theta + a\eta\cos\theta), \quad v^{(\omega)} = \frac{\omega}{a+b}(b\xi\cos\theta - a\eta\sin\theta)$$

На контуре (4.3) имеем $dH/dt \equiv H_t + H_x(dx/dt) + H_y(dy/dt) = 0$, где производные dx/dt, dy/dt определяются из соотношений (1.9). Учитывая равенство $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(\Omega E)} + \mathbf{V}^{(\omega)}$, получаем выражение для dH/dt в виде квадратичной формы относительно ξ, η, переход в которой к параметрическому представлению $\xi = a\cos\varphi$, $\eta = b\sin\varphi$ и последующее приравнивание нулю коэффициентов при 1, $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ приводит при условии $ab \neq 0$ окончательно к системе уравнений

$$\dot{a} = \beta a\left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\omega b}{a+b} + \frac{E}{2\sin\delta}\cos(2\theta + \delta)\right] \tag{4.4}$$

$$\dot{b} = \beta b\left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\omega a}{a+b} - \frac{E}{2\sin\delta}\cos(2\theta + \delta)\right] \tag{4.5}$$

$$\dot{\theta} = (1 + \alpha)\left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\omega ab}{(a+b)^2}\right] - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\frac{\beta E}{2\sin\delta}\sin(2\theta + \delta) \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.5) следует $a\dot{b} + \dot{a}b = \beta(\omega + \Omega)ab$ с интегралом $ab = a_0b_0(1 + \sigma\tau)$. Для отношения полуосей $\chi = b/a$ и угла θ получается замкнутая система уравнений

$$\dot{\chi} = \beta\chi\left[\frac{1-\chi}{1+\chi}\omega - \frac{E}{\sin\delta}\cos(2\theta + \delta)\right] \tag{4.7}$$

$$\dot{\theta} = (1 + \alpha)\left[\frac{\Omega}{2} + \frac{\omega\chi}{(1+\chi)^2}\right] - \frac{1+\chi^2}{1-\chi^2}\frac{\beta E}{2\sin\delta}\sin(2\theta + \delta)$$

При $\alpha = \beta = 0$ ($\omega \equiv \omega_0$, $\Omega \equiv \Omega_0$) и постоянном E (4.7) переходят в уравнения модели Кида [4], при $E = \pm\,\Omega_0$ — в уравнения Чаплыгина [3]. В общем случае (4.4) — (4.6) или (4.7) должны интегрироваться численно, поэтому ограничимся частными случаями.

При $E \equiv 0$ решение легко находится в элементарных функциях. Для $\sigma > -1$ имеем

$$a = r_+, \ b = r_-, \ \theta = \theta_0 + \frac{1+\alpha}{2\beta} \ln [(1+\sigma_0\tau) g_1(\tau)]$$
$$r_\pm = \tfrac{1}{2} a_0 \sqrt{1+\sigma_0\tau} \ [(1+\chi_0) g_1(\tau) \pm (1-\chi_0)] \qquad (4.8)$$
$$g_1(\tau) = \left[1 + \frac{4\chi_0\tau(\sigma-\sigma_0)}{(1+\chi_0)^2(1+\sigma_0\tau)} \right]^{1/2}$$

При $\sigma_0 = 0$ (фоновое течение отсутствует) (4.8) переходят в (3.4). Для $\sigma_1 = -[1+\chi_0^2 + \sigma_0(1-\chi_0)^2]/2\chi_0 < \sigma < -1$ это решение справедливо лишь на промежутке $0 < \tau < \tau_* = -1/\sigma$, причем при $\tau = \tau_*$ эллипс коллапсирует в прямолинейный отрезок и далее, очевидно, $b \equiv 0$. Простой анализ показывает, что (4.4) при этом сохраняет смысл и при $\tau > \tau_*$ имеем

$$a = a_0(1-\chi_0) g_2(\tau), \ b \equiv 0, \ \theta = \theta_0 + \frac{1+\alpha}{2\beta} \ln \left[\frac{1-\chi_0}{1+\chi_0} g_2^2(\tau) \right] \qquad (4.9)$$
$$g_2(\tau) = \left[1 + \sigma_0\tau + \frac{2\chi_0(1+\sigma\tau)}{(1-\chi_0)^2} \right]^{1/2}$$

Для $\sigma < \sigma_1$ решение (4.9) справедливо до момента

$$\tau = \tau_{**} = -(1+\chi_0^2)/[2\chi_0\sigma + \sigma_0(1-\chi_0)^2] > \tau_*$$

в который происходит сжатие вихревой пелены в точечный вихрь, когда $a = b \equiv 0$, а θ теряет смысл.

Специальным подбором $E(t)$ можно добиться условий, при которых эллипсы сохраняют ориентацию, т. е. $\theta = \theta_* = \text{const}$. Например, если $2\theta_* + \delta = {}^1/_2\,\pi(2n+1)$ (n — целое), то a и b по-прежнему определяются формулами (4.8), (4.9), причем

$$E = (-1)^n \frac{1-\chi^2}{1+\chi^2} \left[\Omega + \frac{2\omega\chi}{(1+\chi)^2} \right] \cos\delta$$

Если

$$2\theta_* + \delta = n\pi, \ m = \sigma(1+\sigma_0\tau)/\sigma_0(1+\sigma\tau) < -1$$

то имеем

$$\chi = -m - \sqrt{m^2-1}, \ E = (-1)^{n+1} \frac{\omega}{\sqrt{m^2-1}} \sin\delta$$

Как показывает структура последнего слагаемого в (1.8), интегральное воздействие переноса в экмановском пограничном слое проявляется в форме эффективного придонного трения, пропорционального $\omega + \omega_*$. Отмеченное обстоятельство не только обусловливает определенную циклон-антициклонную асимметрию, но при достаточно сильной локальной антициклональности ($\omega + \omega_* < 0$) делает эффективное трение «отрицательным», что в свою очередь приводит к формированию за конечное время сингулярностей в поле средней завихренности. Введенный в модель боковой турбулентный обмен (диффузионное слагаемое вида $\nu\Delta\omega$ в правой части (1.8) [1]) ослабляет отрицательное трение, вплоть до его полного блокирования, создавая более благоприятные условия для существования когерентных антициклонических структур по сравнению с циклоническими. Это дает одно из возможных объяснений известному преобладанию антициклонов над циклонами в реальных геофизических системах и в лабораторных экспериментах [7].

Уравнения вида (4.4) — (4.6) применимы для анализа динамики системы из нескольких вихревых пятен в рамках подхода [8], когда каждый вихрь аппроксимируется эллиптическим, а суммарный эффект всех остальных учитывается в линеаризованном относительно горизонтальных координат внешнем поле скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов С. Н., Фрик П. Г.* Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в мелкой воде // ПМТФ. 1991. № 2. С. 49—54.
2. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions // J. Comput. Phys. 1979. V. 30. № 1. P. 96—106.
3. *Чаплыгин С. А.* О пульсирующем цилиндрическом вихре // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 138—154.
4. *Kida S.* Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 10. P. 3517—3520.
5. *Кирхгоф Г.* Механика: Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 402 с.
6. *Love A. E. H.* On the stability of certain vortex motions // Proc. Lond. Math. Soc. 1894. V. 25. P. 18—42.
7. *Незлин М. В., Снежкин Е. Н.* Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990. 238 с.
8. *Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S.* A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Pt 1. Compulational validation of a Hamiltonian elliptical representation // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 95—115.

Владивосток

Поступила в редакцию
22.VIII.1991