

УДК 532.526.2+536.242

© 1992 г. А. А. ШУГАЙ

ВЫСОКОСКОРОСТНОЕ ПРОПЛАВЛЕНИЕ ТОНКИМ ТЕЛОМ ТВЕРДОГО ВЕЩЕСТВА

При трении твердых тел с высокой относительной скоростью возможен переход материала тел в зоне фрикционного контакта в пластическое и жидкое состояние. В работе рассмотрен режим трения с образованием развитого жидкого слоя, когда пластической деформацией трущихся тел можно пренебречь. Соответствующая задача тепло- и массопереноса с фазовым переходом достаточно сложна для прямого аналитического и численного исследований. Известен подход, основанный на методе интегральных соотношений теории пограничного слоя с использованием квадратичных профилей и позволяющий достаточно точно определять интегральные характеристики задачи [1, 2]. В [3] изучена автомоделная задача о проникании пластины в плавящуюся среду. Малость значения автомоделной переменной, соответствующего границе слоя расплава, позволяет провести асимптотический анализ.

В настоящей работе рассмотрено высокоскоростное проплавление теплоизолированным тонким телом твердого вещества. При некоторых ограничениях на безразмерные параметры проплавления течение в слое расплава описывается в рамках теории смазки. Угол наклона тела и слоя расплава по отношению к скорости движения считается малым и учитывается в линейном приближении. Отток тепла в твердое вещество находится при моделировании тела и слоя расплава отрезком с распределенными источниками тепла. В рамках данной простой постановки построено замкнутое решение задачи о зоне расплава вокруг движущегося тонкого тела. Интерес представляет зависимость формы слоя расплава, структуры полей температуры и продольной скорости в слое от формы тела и других определяющих параметров задачи. Полученные результаты дают также решение задачи о плавлении движущегося с высокой скоростью твердого вещества при трении его о теплоизолированную шероховатую подложку, когда характерная высота шероховатости порядка толщины слоя, а характерная длина — порядка длины контакта.

Рассмотрим плоскую задачу о высокоскоростном проникании тонкого тела в плавящуюся среду, когда необходимое для образования слоя расплава тепло выделяется в области фрикционного контакта вследствие трения (фиг. 1).

Считая движение стационарным в системе координат, связанной с телом, примем, что всюду вне малой окрестности лобовой точки течение расплава описывается уравнениями пограничного слоя со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

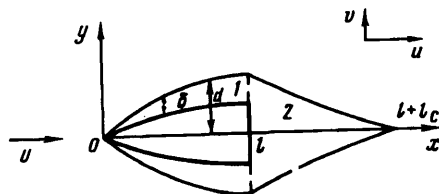
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\rho c_v \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2$$

$$y = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad u = 0$$

$$y = \delta(x): \quad \rho UL (\delta' + \alpha(x)) = \left[-k \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=\delta+0}^{y=\delta-0}, \quad T = T_m \quad (2)$$

$$u = U, \quad v = -U (\delta' + \alpha(x))$$



Фиг. 1

Здесь ρ, μ, k, c_v — постоянные коэффициенты плотности, динамической вязкости, теплопроводности, теплоемкости (для простоты эти величины для расплава и твердого вещества принимаются равными, учет их различия в рамках данной постановки не составляет труда), L — удельная теплота плавления вещества, $\delta(x)$ — толщина слоя расплава, $\alpha(x)$ — местный угол наклона поверхности тела. Принимается, что $\alpha \sim \delta' \ll 1$, следовательно, перенос слоя расплава с поверхности тела на ось x вносит в уравнения и граничные условия погрешность второго по сравнению с δ' порядка малости.

Оценим члены в уравнениях (1). Поверхность тела считается теплоизолированной, поэтому, как будет показано, основной баланс в уравнении притока тепла происходит между членами в правой части (теплопроводность и выделение тепла из-за вязкой диссипации). С учетом условия Стефана имеем следующие оценки:

$$\frac{\delta}{l} \sim \sqrt{\frac{Ec}{Re}}, \quad Ste = \frac{c_v(T - T_m)}{L} \sim Pr Ec, \quad Ec = \frac{U^2}{L}, \quad Re = \frac{Ul}{\nu}, \quad Pr = \frac{c_v \mu}{k}$$

Таким образом, роль числа Стефана, характеризующего в задачах с плавлением вклад конвективного теплопереноса в общий баланс тепла в слое, играет произведение $Ec Pr$. Если $Ec Pr \ll 1$, то предположение о балансе членов в уравнении притока тепла оправдано. Зависимость δ и v от числа Re соответствует необходимой для отбрасывания членов $\sim 1/\sqrt{Re}$, как это делается при выводе уравнений пограничного слоя из уравнений Навье — Стокса. Из уравнения импульсов: $p \sim \rho L \Rightarrow \rho U^2 / \rho \sim Ec$. Следовательно, при ограничении $Re \gg 1, Ec \ll 1, Ec Pr \ll 1, \alpha \sim \sqrt{Ec/Re}$ конвективными членами в уравнениях Прандтля можно пренебречь и течение в пленке расплава описывается уравнениями типа уравнений смазки и граничными условиями (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2$$

Интегрируя последовательно 2 раза уравнение притока тепла в системе (3) от y до δ , получим

$$k \frac{\partial T}{\partial y} + [\rho UL (\delta' + \alpha(x)) + q(x)] = \int_y^{\delta(x)} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 dy = \Phi(x, y) \quad (4)$$

$$-k(T(x, y) - T_m) = [\rho UL (\delta' + \alpha(x)) + q(x)](y - \delta) + \int_y^{\delta(x)} \Phi(x, y) dy$$

Здесь $q(x)$ — отток тепла в твердое вещество. Последнее соотношение после определения профиля скорости дает температуру в слое расплава. Подставляя в (4) $y=0$, получим уравнение для $\delta(x)$

$$\rho UL (\delta' + \alpha(x)) + q(x) = \int_0^{\delta(x)} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 dy \quad (5)$$

Интегрируя уравнение импульсов системы (3) с учетом уравнения неразрывности, найдем профиль скорости и градиент давления в слое

$$\frac{u}{U} = \eta + \frac{\delta^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \eta (\eta - 1)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu [C - U(\delta + 2A(x))]}{\delta^3}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad A(x) = \int_0^x \alpha(x) dx \quad (6)$$

Здесь $A(x)$ — уравнение поверхности тела; константа C определяется по значению расхода в сечении $x=0$, в частности, если $\delta(0) = 0$, то $C=0$. Окончательно система уравнений в безразмерных переменных, описывающая течение расплава, имеет вид

$$\delta_1' + \beta\alpha(x_1) + \beta q_1(x_1) = \frac{1}{\delta_1^3} [\delta_1^2 + 3(B - \delta_1 - 2\beta A_1(x_1))^2] \quad (7)$$

$$p_1' = \frac{6}{\delta_1^3} [B - (\delta_1 + 2\beta A_1(x_1))]$$

$$\delta_1 = \frac{\beta\delta}{l}, \quad x_1 = \frac{x}{l}, \quad p_1 = \frac{p}{\rho L}, \quad A_1 = \frac{A(x)}{l}, \quad q_1 = \frac{q(x)}{\rho UL},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\text{Re}}{\text{Ec}}}, \quad B = \frac{\beta C}{Ul}, \quad ()' = \frac{d}{dx_1}$$

Уравнение для определения $\delta(x)$ допускает очевидную асимптотику: $(q(x) \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty) \Rightarrow (\delta' + \alpha(x) \rightarrow 0)$, т. е. общий наклон слоя расплава по отношению к вектору скорости U стремится к нулю.

Зная профили скорости и температуры в слое, нетрудно определить максимальные значения (для $C=0$)

$$\frac{u_{\max}}{U} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(3\theta + \frac{1}{3\theta} \right), \quad \theta = 1 + \frac{2A(x)}{\delta}$$

$$T_{\max} - T_m = Pr \frac{U^2}{c_v} \left[\frac{1}{2} + \theta + \frac{3}{2} \theta^2 \right]$$

Так как $\theta \geq 1$, то $u_{\max} \geq 4/3 U$ и $T_{\max} - T_m \geq 3 Pr U^2 / c_v$, причем знак равенства соответствует пластине: $\alpha \equiv 0$. Профиль температуры является многочленом 4-й степени по вертикальной координате в слое

$$T - T_m = \frac{1}{2} Pr \left(\frac{U^2}{c_v} \right) (a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4)$$

$$a_0 = 1 + 2\theta + 3\theta^2, \quad a_1 = -(2 + 12\theta + 18\theta^2), \quad a_2 = 1 + 18\theta + 45\theta^2$$

$$a_3 = -(8\theta + 48\theta^2), \quad a_4 = 18\theta^2$$

В случае пластины коэффициенты в профиле температуры явно от координаты x не зависят: $a_0 = 6, a_1 = -32, a_2 = 64, a_3 = -56, a_4 = 18$. Это означает, в частности, что форма изотерм совпадает с формой внешней границы слоя расплава.

Аналогично рассматривается задача о смыкании каверны расплава, образующейся за движущимся в плавящейся среде телом. Единственное отличие состоит в том, что вместо условия прилипания при $y=0$ ставится условие $\partial u / \partial y = 0$ (здесь и далее для простоты считаем тело симметричным относительно оси x). Соответствующие уравнения

$$\delta_1' + \beta q_1(x_1) = 12B^2 / \delta_1^3, \quad p_1' = 6B / \delta_1^3 \quad (8)$$

Константа B отлична от константы для фронта плавления. Таким образом, системы уравнений для фронта плавления и фронта отвердевания имеют свободу в три константы каждая: B и два начальных условия. При проплавлении твердого вещества теплоизолированным тонким телом естественным является предположение: $\delta(0) = 0 \Rightarrow B = 0$. Давление вблизи передней кромки при этом имеет логарифмическую особенность

$$p_1 = -3/4 \ln(x_1), \quad \delta_1 = \sqrt{8x_1} \quad (9)$$

Если теперь сращивать решение задачи о фронте отвердевания с решением задачи о фронте расплава, то при допущении непрерывности фронта фазового перехода и расхода жидкости при $x = l$ найдем значение константы B для фронта отвердевания: $B = 0$. Следовательно, течение в области следа в случае тонкого тела характеризуется постоянной скоростью $u(x, y) \equiv U$. Длина следа l_c определяется из уравнения

$$\rho ULd(l) = \int_0^{l_c} q(x) dx \quad (10)$$

Здесь $d(l)$ — общая толщина тела и слоя расплава, вычисляемая по решению в зоне l (фиг. 1). Если допустить непрерывность давления при $x = l$, то совместная задача о каверне расплава вокруг тела в данной постановке будет полностью замкнута (давление в каверне определяется с точностью до несущественной в случае абсолютно твердого материала аддитивной постоянной). Зная профиль компоненты скорости вдоль поверхности тела и распределение давления на теле, нетрудно определить силы, действующие со стороны расплава на тело. Приведем только оценку для силы сопротивления движению тела

$$X = 2pl\alpha + 2\mu Ul/\delta \sim 2pl(L\alpha + \sqrt{\nu UL/l})$$

Первый член — это затраты на плавление материала, соответствующего толщине проникаемого тела, второе слагаемое связано с образованием слоя расплава около тела.

Все приведенные выше оценки справедливы независимо от конкретной формулы для величины оттока тепла в твердое вещество $q(x)$, если

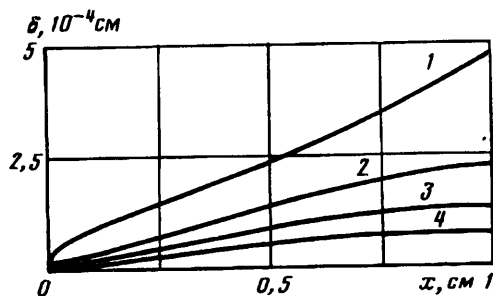
$$q_1 = q(x)/\rho UL < \delta' + \alpha(x) \quad (11)$$

Для определения величины оттока тепла $q(x)$ тело и каверну расплава можно моделировать движущейся линией с распределенными источниками тепла. Интенсивность источников $2q(x)$ должна определяться из условия равенства температуры на линии температуре на внешней границе каверны расплава — температуре плавления T_m . При движении с высокой скоростью линейного источника тепла в полосе твердого вещества вблизи линии возникает температурный пограничный слой толщиной $\delta_T \sim l/\sqrt{\text{Re Pr}}$ и вне этого слоя поле температуры можно считать невозмущенным, а геометрию твердого вещества несущественной. Толщиной (геометрией) тела и каверны при определении оттока тепла в вещество можно пренебречь если: $\delta \ll \delta_T \Leftrightarrow \sqrt{\text{Ec Pr}} \ll 1$. Малость величины Ec Pr была уже использована выше.

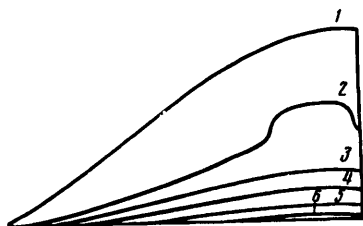
Опуская выкладки, приведем конечный результат — связь интенсивности источников $2q(x)$ и перепада температур $T_m - T_0$ при $\text{Re Pr} \gg 1$

$$q(x) = 1/4 \sqrt{\pi} \text{Ste}_w \rho UL, \quad \text{Ste}_w = c_v (T_m - T_0)/L \quad (12)$$

Здесь T_0 — невозмущенная температура твердого вещества. Нахождением этой зависимости полностью определяется решение задачи о высокоскоростном проплавлении тонким телом твердого вещества. То, что величина оттока тепла с внешней границы зоны расплава в данном приближении не зависит от координаты



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

x , позволяет сразу получить формулу для длины каверны за телом: $l_c = 4d(l)/\sqrt{\pi Ste_w}$.

Для справедливости приведенных ранее оценок необходимо, согласно (11), чтобы $1/4\sqrt{\pi Ste_w} < \delta' + \alpha(x)$. В противном случае масштаб теплового потока в слое определяется оттоком тепла в твердое вещество и характерные значения толщины слоя δ и компоненты скорости v равны

$$\frac{v}{U} \sim \frac{\delta}{l} \sim \frac{4\nu U}{\sqrt{\pi} c_v (T_m - T_0) l} = \frac{4 Ec}{\sqrt{\pi} Re Ste_w}$$

При этом по-прежнему течение описывается уравнениями в приближении смазки, а для оттока тепла в окружающую твердую среду справедлива формула (12). При $x=0$, согласно (9), $\delta' = \infty$, следовательно, вблизи лобовой точки тела неравенство (11) всегда выполнено и определяющую роль при образовании слоя расплава играют затраты на плавление, а не внешний теплоотвод.

В рамках изложенной модели проведены расчеты высокоскоростного проникания в лёд. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений находилось численно по методу Дормана — Принса 5-го порядка с автоматическим выбором шага. Для выхода из особой точки использовалась асимптотика (9) (численное решение определялось на отрезке $[\epsilon l, l]$ $\epsilon = 10^{-4}$). На фиг. 2 показана форма слоя расплава, который образуется на теле с уравнением поверхности $y = 0,0002(1 - \cos(x/0,3))$. Длина тела $l = 1$ см, скорость движения $U = 2000$ см/с. Кривые 1—4 соответствуют температуре льда $T_0 = 0, -0,5, -2, -10^\circ \text{C}$. На фиг. 3, 4 приведены изолинии полей температуры и компоненты скорости u в слое расплава на том же теле при $T_0 = -1^\circ \text{C}$ и $U = 1000$ см/с (изотермы 1—6 соответствуют значениям температуры 0, 2, 4, 8, 14, 20 ($^\circ \text{C}$); изотахи 1—5 — значениям скорости 1, 2,6, 4,2, 5,3, 5,8 (10^3 см/с); максимальная толщина слоя расплава $1,33 \cdot 10^{-4}$ см).

На основании расчетов можно сделать следующие выводы. С понижением температуры окружающего твердого вещества T_0 толщина слоя, особенно вниз по потоку, где слой толще, уменьшается, давление и сила сопротивления движению тела возрастают. Изотермы в основной части слоя расплава могут иметь точку или точки перегиба и быть немонотонными. Такая форма изотерм соответствует форме изотак, которые могут быть замкнуты. Этот эффект существенно связан

с учетом в рамках данной постановки толщины профиля. Давление в приближении теории смазки является монотонно убывающей вниз по потоку функцией, существование области или областей торможения связано с притоком массы, управляемым формой тела и слоя расплава. Выпуклость поверхности тела (или форма поверхности с точкой перегиба) и повышение температуры на бесконечности способствует образованию замкнутых изотер и, следовательно, изотерм с точками перегиба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный Г. Г. Движение плавящегося твердого тела между двумя упругими полупространствами//Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 813—818.
2. Шугай А. А. Задача о проплавлении твердого полупространства вращающимся нагретым диском и кольцом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 30—34.
3. Черный Г. Г. Движение пластины в твердой плавящейся среде//ПММ. 1991. Т. 55. № 3. С. 355—367.

Москва

Поступила в редакцию
17.I.1992