

УДК 532.517.3

© 1992 г. С. М. ДРОЗДОВ

ХАОТИЧЕСКИЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ КАНАЛЕ

Со времен работы [1] существует гипотеза, что при переходе к турбулентности число эффективно возбуждаемых степеней свободы гидродинамической системы невелико [2, 3]. Например, система Лоренца, имеющая трехмерное фазовое пространство, при определенных значениях параметров обнаруживает хаотическое, турбулентноподобное поведение своих решений. Принято считать, что турбулентность неизбежно возникает в гидродинамической системе при уменьшении диссипации [1—4]. Именно на уменьшении диссипативных параметров (например, вязкости) основаны все сценарии перехода к турбулентности и хаосу. Однако уменьшение диссипации может приводить и к рождению новых видов движения систем, в частности устойчивых периодических течений, предсказуемых на любой промежуток времени [2].

В данной работе доказывается существование и приведено исследование точных периодических решений нелинейной диссипативной системы, описывающей конвекцию вязкой и теплопроводной жидкости в замкнутом канале. Исследуется вопрос взаимного существования стационарных, хаотических и периодических решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим замкнутый канал — трубку (фиг. 1), ось которой образует окружность радиуса R . Трубка расположена вертикально в поле тяжести в среде с постоянной температурой T_0 и заполнена жидкостью. Предположим, что жидкость несжимаема, зависимость плотности от температуры учитывается только при расчете сил плавучести (приближение Обербека — Бусинеска)

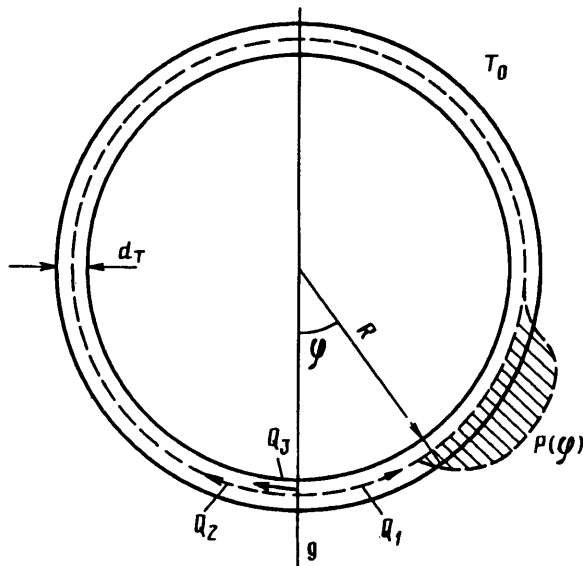
$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)], \quad \alpha \ll 1$$

Температура жидкости в любой точке поперечного сечения трубки мало отличается от средней температуры в этом сечении — $T(x, t)$, где x — координата вдоль оси трубки, t — время. Течение жидкости в трубке ламинарно. Сила сопротивления пропорциональна вязкости μ и объемному расходу Q . Жидкость теплопроводна, коэффициент теплопроводности $\lambda = \text{const}$. С боковой поверхности трубки происходит теплоотдача по закону $q = -\beta [T(x, t) - T_0]$. Тепло к жидкости подводится произвольно распределенными по x источниками суммарной мощности

$$N = \int_0^{2\pi R} P(x, t) dx$$

где $P(x, t)$ — плотность распределения мощности источников тепла. Стенки трубки имеют теплоемкость $c = \text{const}$.

В рамках сделанных предположений конвекция жидкости в круговом канале описывается следующей системой нелинейных интегродифференциальных уравнений, записанной в безразмерном виде. Масштабы, по которым проводилось обезразмеривание, составлены по характерным данным задачи и никакой роли в дальнейшем изложении не играют. Подробный вывод



Фиг. 1

системы (1.1) с обоснованием сделанных выше предположений содержится в [5]

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi - \xi Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{Q(t)}{(1+c)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + B_0 T = P(\varphi, t) \quad (1.1)$$

$$Q(0) = Q_0; \quad T(\varphi, 0) = \chi(\varphi); \quad T(\varphi, t) = T(\varphi + 2\pi, t)$$

Здесь $\varphi = x/R$, Λ — безразмерный коэффициент теплопроводности, пропорциональный λ , ξ — безразмерный коэффициент диссипации механической энергии, пропорциональный μ , B_0 — безразмерный коэффициент теплоотдачи в среду, c — безразмерная теплоемкость стенок трубки. Безразмерная плотность распределения мощности источников тепла $P(\varphi, t)$ в данном случае считается не зависящей от времени и с помощью выбора масштабов удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi) d\varphi = 1$$

Введем следующие параметры и функции:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\psi) \cos \psi d\psi, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\psi) \sin \psi d\psi \quad (1.2)$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi$$

Эволюция во времени функций $a(t)$, $F(t)$ (сила конвекции) и $Q(t)$ (расход жидкости) описывается следующей, полученной из (1.1) системой [5]:

$$\frac{da}{dt} = f_1 - Ba(t) - \frac{Q(t)F(t)}{1+c}, \quad \frac{dF}{dt} = f_2 - BF(t) + \frac{Q(t)a(t)}{1+c} \quad (1.3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = F(t) - \xi Q$$

$$Q(0) = Q_0; \quad a(0) = a_0; \quad F(0) = F_0; \quad B = B_0 + \Lambda$$

Система (1.3) по своему виду близка к системе Лоренца [1], но более точно отражает физику процесса конвекции в трубке.

2. Свойства решений (1.3). Система (1.3) обладает свойствами, характерными для многих, значительно более сложных нелинейных систем с диссипацией энергии. Во-первых, это неединственность стационарных решений. Если распределение источников тепла $P(\varphi)$ задано, то стационарные решения (1.3) зависят от параметра $\sqrt{\xi} B$. В расчетах, результаты которых приведены ниже, рассматривался случай сосредоточенного подвода тепла, где

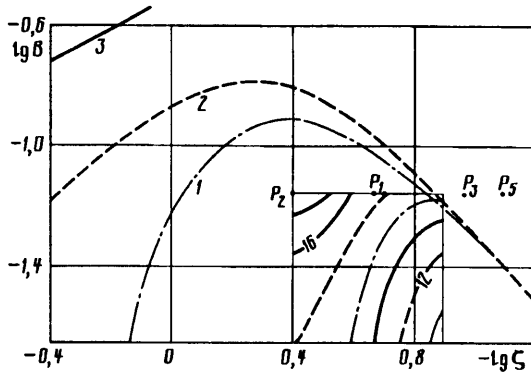
$$P(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi_0); \quad f_1 = \frac{\cos \varphi_0}{2\pi}; \quad f_2 = \frac{\sin \varphi_0}{2\pi}$$

Расчеты для случая подвода тепла источниками, равномерно распределенными на дуге $\Delta\varphi$, дают результаты, мало отличающиеся от случая с сосредоточенным источником при $\Delta\varphi \leq 60^\circ$.

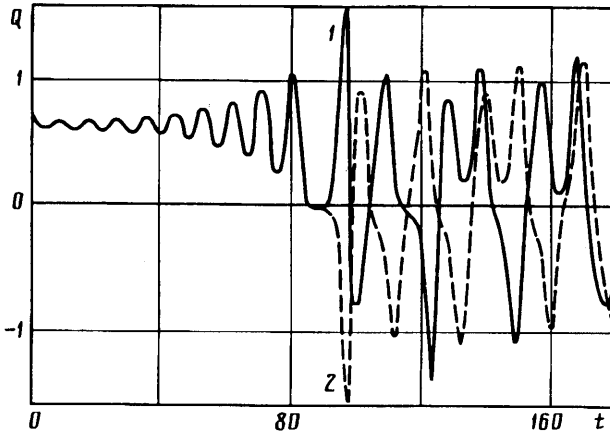
Если диссипация велика $\sqrt{\xi} B > d_1$, то система (1.3) имеет единственное стационарное решение Q_1 (фиг. 1) с конвекцией в сторону точки подвода тепла. При некотором, зависящем от φ_0 и c значении $d_1 = \sqrt{\xi} B$ происходит бифуркация и появляется еще одно стационарное решение с конвекцией в противоположном направлении, которое при дальнейшем уменьшении $\sqrt{\xi} B < d_1$ сразу распадается на два стационарных решения с большей Q_2 и меньшей Q_3 отрицательной скоростью конвекции (фиг. 1). Если $\varphi_0 = 0$ — подогрев в нижней точке, то $d_1 = (2\pi(1+c))^{-1}$.

Второе характерное свойство (1.3) — потеря устойчивости стационарных решений при уменьшении диссипации. До точки первой бифуркации единственное стационарное решение Q_1 устойчиво. Эволюция системы из всех исследованных начальных условий в конечном итоге приводит ее в это решение. После того как $\sqrt{\xi} B < d_1$, решение Q_1 остается устойчивым, а из появившихся новых стационарных решений Q_2 и Q_3 устойчиво лишь решение с большей отрицательной скоростью Q_2 (фиг. 1). При дальнейшем уменьшении параметров тепловой B и механической ξ диссипации происходит последовательная потеря устойчивости сначала решения Q_2 , а потом и Q_1 . На фиг. 2 в плоскости параметров $\lg B$ и $-\lg \xi$ показаны области различного поведения решений системы (1.3) при $\varphi_0 = 10^\circ$, $c = 0$. Кривая 3 на этом рисунке — линия первой бифуркации. Она разделяет области, где существуют одно и три стационарных решения. Кривая 2 является линией потери устойчивости решения Q_2 по отношению к малым возмущениям. Кривая 1 — линия потери устойчивости решения Q_1 . В области между кривыми 1 и 2 (фиг. 2) устойчиво только решение Q_1 . В области под кривой 1 устойчивых стационарных решений нет.

Наличие нестационарных и даже случайных решений при стационарных внешних условиях и силах — важнейшее свойство системы (1.3). Оно было обнаружено в работах [1, 4] для системы Лоренца. Как показывают численные решения задачи Коши для (1.3), в области под кривой 1 (фиг. 2), после разрушения стационарных решений, система выходит на хаотическое не затухающее по времени решение. Характерное свойство таких решений — сильная чувствительность к изменению начальных условий и любых других параметров задачи. Пример численного расчета в типичной хаотической точке P_2 : $\xi = 0,4$, $B = 0,07$ (фиг. 2) дан на фиг. 3. Там же проиллюстрировано свойство чувствительности решений к возмущениям начальных условий. Кривые 1 и 2



Фиг. 2



Фиг. 3

(фиг. 3) представляют два эволюционных процесса, которые при $t = 0$ различались только величинами $Q_0 = 0,7$ и $0,7002$ соответственно.

3. Периодические решения. Хаос не безраздельно господствует в области неустойчивости стационарных решений. По соседству с хаотическими численные расчеты дают решения, похожие на периодические. Упоминание о периодических решениях для системы Лоренца содержится, например, в [3]. Для системы (1.3) численное интегрирование задачи Коши в точке P_1 : $\xi = 0,2$, $B = 0,07$ (фиг. 2) дает решение с периодом $\tau \approx 15,5$. Однако численное решение эволюционной задачи не может служить доказательством существования точных периодических решений.

Коротко изложим метод нахождения точных периодических решений нелинейного дифференциального оператора типа (1.3), не связанный с решением задачи Коши.

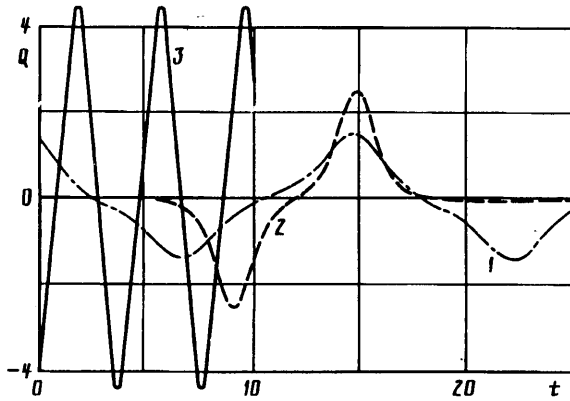
Пусть периодическое решение (1.3) существует, тогда оно представимо в виде разложения в ряд Фурье

$$\Phi(t) = (a, F, Q)^T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega n t}$$

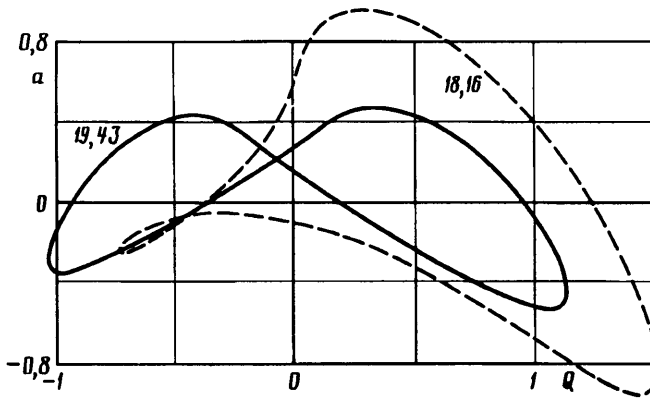
$$C_n = (C_n^1, C_n^2, C_n^3)^T = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Phi(t) e^{-i\omega n t} dt$$

$$\omega = 2\pi/\tau$$

От функций $a(t)$, $F(t)$, $Q(t)$ требуется лишь, чтобы они удовлетворяли системе



Фиг. 4



Фиг. 5

(1.3) и были периодическими. Само же значение периода τ , по которому производится разложение (3.1), заранее неизвестно и должно быть получено вместе с получением решения (3.1).

Подстановка рядов (3.1) в (1.3) дает бесконечную нелинейную алгебраическую систему относительно коэффициентов Фурье C_n и неизвестного действительного параметра ω

$$C_n^1 (B + i\omega n) + (\zeta + \frac{1}{2} i\omega n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^3 C_{n-k}^3 = \begin{cases} f_1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$C_n^3 (B + i\omega n) (\zeta + i\omega n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^3 C_{n-k}^1 = \begin{cases} f_2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$C_n^2 = (\zeta + i\omega n) C_n^3$$

Теплоемкость стенок трубки — параметр c системы (1.3) — принципиальной роли не играет, поэтому в (3.2) и далее для упрощения формул примем $C = 0$. Очевидно, что решение (3.1) должно быть по меньшей мере непрерывным. Тогда, по известному свойству, коэффициенты Фурье должны убывать не медленнее чем $1/n^2$ и систему (3.2) можно было бы решать со сколь угодно высокой точностью, ограничиваясь конечным числом N гармоник. Однако в исходном виде (3.2) решение системы невозможно из-за параметра ω , который делает ее незамкнутой. Физически незамкнутость системы (3.2) является следствием свободы выбора начальной фазы любого решения (1.3), в том числе и периодического

Точка	τ	$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7
P_1	15,3	0,011	0,58	0,45	0,13	0,017	0,024	$5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
P_6	3,9	$2 \cdot 10^{-4}$	1,96	$2 \cdot 10^{-3}$	0,252	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$
P_2	19,43	0,026	0,418	0,04	0,1	0,015	0,018	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	18,16	0,073	0,317	0,243	0,106	0,048	0,028	0,016	$8 \cdot 10^{-3}$
P_5	20,35	0,011	0,44	0,47	0,177	0,097	0,178	0,11	0,013
		$n = 8$	9	10	11	12	13	14	15
P_5	20,35	0,043	0,043	0,018	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$

решения (3.1). Фиксация начальной фазы налагает последнее условие, необходимое для разрешимости системы (3.2). Математическая сторона проблемы выглядит так: пусть S_n — вектор решения системы (3.2). Тогда нетрудно убедиться, что вектор

$$C_n = Z^n S_n \quad (3.3)$$

где $Z = |Z| e^{i\psi}$ — любое комплексное число, тоже является решением (3.2). Если $|Z| = 1$, то преобразование (3.3) есть преобразование сдвига фазы. Если же $|Z| \neq 1$, то с помощью (3.3) задается бесконечное множество периодических решений (1.3) с одинаковыми периодом τ или частотой ω . Конечно, главным образом это будут комплексные решения (1.3), у которых $C_n \neq \bar{C}_{-n}$.

Условие (3.3) позволяет заранее задать один из действительных параметров решения (3.1). В частности, это может быть фаза одного из коэффициентов Фурье (кроме нулевого), например можно положить C_1^i действительным числом. Или можно задать начальное значение одной из компонент решения $a(t)$, $F(t)$, $Q(t)$, например Q_0 . Однако на основании (3.3) ничего нельзя сказать о неизвестном ω , поэтому его априорная фиксация недопустима.

Так как система (3.2) нелинейна, то с ее замыканием решение не заканчивается. Более того, все сказанное выше обеспечивает лишь корректную постановку линейной задачи, построенной по некоторому нулевому приближению C_n , ω . Вопрос получения хорошего нулевого приближения для запуска итерационной процедуры, дающей точное решение, требует отдельного рассмотрения. В связи с нелинейностью (1.3) и (3.2) следует ожидать и неединственности периодических решений, что и было получено в расчетах.

4. Результаты расчетов. Вначале была исследована точка P_1 ($\zeta = 0,2$, $B = 0,07$, фиг. 2), где численное интегрирование задачи Коши для (1.3) дает решение, подозрительное на периодичность. Это решение и послужило нулевым приближением для процедуры поиска точного периодического решения. На фиг. 4, кривая 1 представлен график скорости $Q(t)$ периодической конвекции, а в таблице — его спектр (строка соответствующая точке P_1). Точное значение периода оказалось равным $\tau = 15,3048$. Тот факт, что интегрирование задачи Коши для (1.3) из всех исследованных начальных условий приводит систему в периодическое решение, говорит о его сильной устойчивости. По сути это аттрактор в фазовом пространстве системы (1.3), имеющий форму замкнутой гладкой линии.

В дальнейшем, варьируя параметры ζ и B , удалось найти периодические решения во многих точках как внутри, так и вне области неустойчивости стационарных решений (область под кривой 1, фиг. 2). Они сильно отличаются друг от друга как периодом, так и спектром (фиг. 4, таблица). Устойчивость периодических решений исследовалась численно, по чувствительности к возмущениям. На фиг. 2 показана область, где периодические решения были найдены в каждой точке мелкой сетки 51×71 . Изолинии, проведенные через 1, отражают зависимость периода τ от параметров диссипации ζ и B . Отметим, что периодические решения существуют и в области устойчивости стационарных решений,

например в точках P_3 и P_5 (фиг. 2). В точке P_3 одновременно существуют два устойчивых стационарных решения и устойчивое периодическое $\tau = 14,42$ решение. Интересно решение в точке P_5 ($\zeta = 0,008$, $B = 0,063$), представленное на фиг. 4, кривая 2. Оно характеризуется длинным спектром (таблица).

Периодические решения были найдены и в области хаоса, например в точке P_2 (фиг. 2), где решение задачи Коши ничего подобного не дает (фиг. 3). Более того, в одной и той же точке P_2 получено два различных по периоду и спектру точных периодических решения (таблица, точка P_2). На фиг. 5 показано, как эти решения выглядят в проекции на плоскость (a, Q) фазового пространства (a, F, Q) системы (1.3). Оба эти решения неустойчивы и поэтому не могут быть получены интегрированием задачи Коши для (1.3). Даже очень малое $\sim 10^{-5}$ возмущение приводит к тому, что, сделав 5—7 оборотов на периодической траектории, фазовая точка срывается с нее и уходит на странный аттрактор, отвечающий за состояние хаоса в системе (1.3).

Проведенные исследования показывают, что нелинейный дифференциальный оператор типа (1.3), описывающий эволюцию системы с диссипацией энергии, может иметь собственные нелинейные периодические решения. Их главное отличие от линейных гармонических решений — взаимозависимость спектра S_n решения и главного периода τ или частоты ω , которые выступают как обычные неизвестные величины в системе (3.2). После замыкания с помощью фиксации начальной фазы система (3.2) полностью определяется и возможная неединственность ее решений связана только с нелинейностью (3.2).

Периодические решения (1.3) имеют свою область существования и область устойчивости, не связанные напрямую с областями существования и устойчивости стационарных решений. В области хаоса периодические решения неустойчивы. Остается невыясненным вопрос: принадлежат ли периодические траектории странному аттрактору? Можно утверждать только то, что, когда одна из периодических траекторий становится притягивающей, странный аттрактор исчезает. Интересно, что самоорганизация системы в периодическое решение происходит при меньшем значении параметров диссипации, чем эволюция ее к хаосу. Притягивающее периодическое решение обнаружено, например, в точке $\zeta = 0,02$, $B = 0,001$, период 3,898 (фиг. 4, кривая 3, таблица, точка P_6), где коэффициенты диссипации ζ и B соответственно в 20 и 70 раз меньше, чем в точке P_2 типичного хаотического решения (фиг. 3).

В заключение отметим, что изложенный метод поиска периодических решений не опирается на конкретные особенности данной задачи. Он представляет собой лишь наиболее общее применение принципа периодичности решений и содержит в себе случай малых нейтральных гармонических колебаний, где связь между ω и S_n теряется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130—141.
2. Беляев Ю. Н., Яворская И. М. Сферическое течение Куэтта — переходы и возникновение хаоса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 10—18.
3. Суинни Х., Голлаб Дж. и др. // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344 с.
4. Saltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19. № 4. P. 329—342.
5. Дроздов С. М. Ламинарная конвекция вязкой и теплопроводной жидкости в замкнутом канале // Уч. зап. ЦАГИ. 1992. Т. 23.