

УДК 532.51.011

© 1992 г. Ю. Л. ЯКИМОВ

## О КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ БЕЗ «СУЩЕСТВЕННОЙ» ОСОБЕННОСТИ И МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СМЕРЧА<sup>1</sup>

Статья является продолжением работы [1], в которой автор представил известные автомодельные течения несжимаемой жидкости при помощи единой таблицы. В таблицу было отобрано более 50 практически интересных задач. Хотя такое представление никогда не может быть полным, уже сам способ представления оказался полезным, так как указал на наличие интересных не исследованных автомодельных течений, соответствующих «пустым» клеткам таблицы. Например, оказалось что рассмотрена задача о течении безграничной жидкости, возникающем в результате мгновенного выделения в точке конечного импульса, при наличии турбулентной вязкости [2], но не была известна аналогичная постановка для идеальной жидкости, хотя из соображений размерности такое автомодельное течение может существовать. Впоследствии оно было найдено [3].

Ниже рассмотрен более узкий класс автомодельных течений, содержащий более 20 задач, которые можно объединить пятью различными постановками. Эти течения могут иметь «существенную» особенность только в начальный момент времени (например, сильный взрыв), а в дальнейшем особенности типа источников энергии или массы не содержат. Исключены из рассмотрения течения, вызванные движением тел, т. е. рассмотрены случаи, когда поток ограничен либо неподвижными, либо свободными границами с нулевым давлением на последних. При этом для идеальной жидкости допускаются вихревые особенности, на которых не выделяется энергия.

Таким образом, этот класс течений соответствует «самодвижениям» жидкости, возникающим из начального состояния с особенностью. Рассмотрены плоские течения, а также со сферической и осевой симметрией. Подробно рассмотрены течения из этого класса, описывающие всплытие вихревого кольца из первоначально нагретой малой области, и ее возможные обобщения, а также механизм образования смерча.

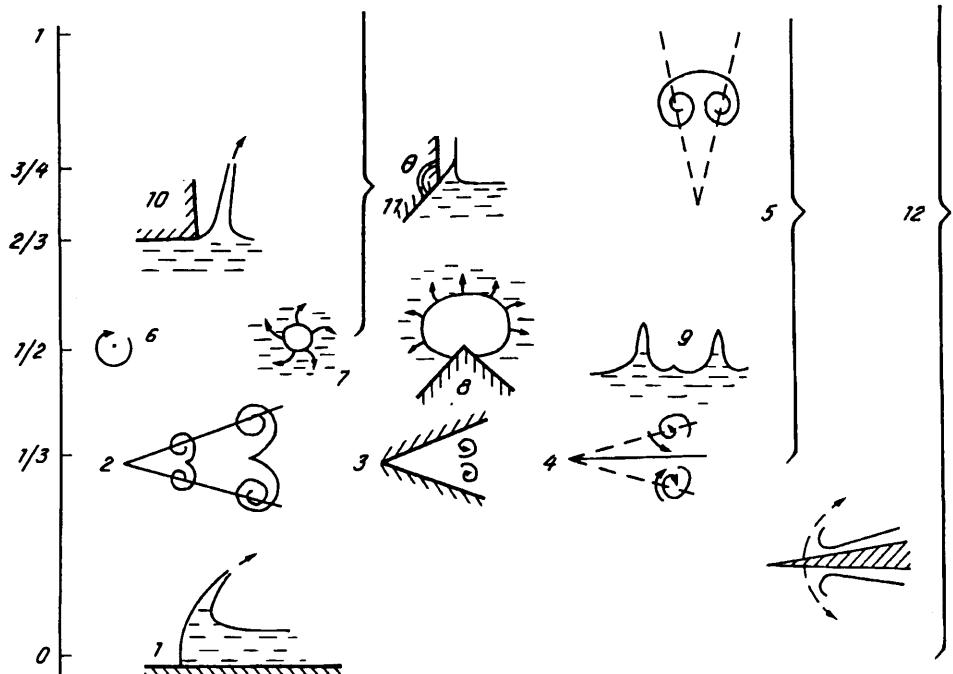
1. Задача автомодельна, если из числа определяющих параметров можно образовать кинематические постоянные только с одной независимой размерностью  $[a] = T^c/L$  [4], тогда независимыми переменными в сферической системе координат будут  $\lambda = ar/t^c, \theta, \psi$ , где постоянные  $T, L$  с размерностью времени и длины. Сокращение числа независимых переменных и, следовательно, автомодельность может быть связана с другими обстоятельствами, например симметрией. Здесь выделены соображения размерности, связанные с физической постановкой задачи.

Рассмотрим сначала плоские задачи. На фиг. 1 по вертикали отложен параметр  $\alpha$ , а по горизонтали автомодельные постановки представлены в виде характерных схем течения напротив соответствующего значения  $\alpha$ .

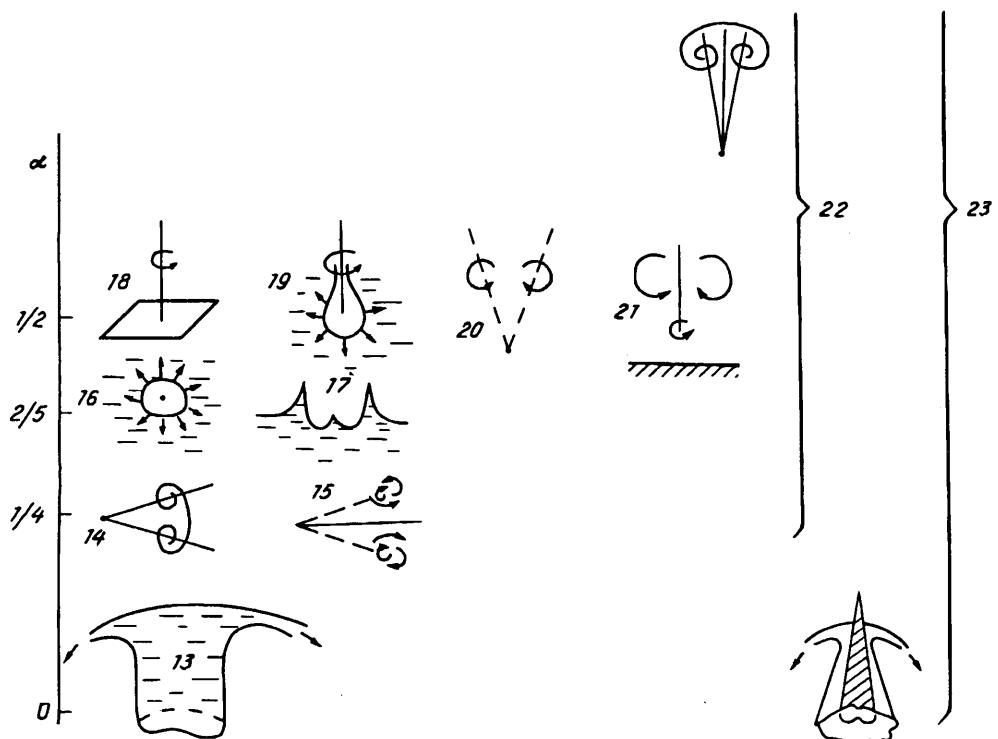
Случаю  $\alpha = 0$  (на фиг. 1, 1) соответствует саморазлет слоя идеальной несжимаемой жидкости, когда жидкость возмущена, например ударом или взрывом. Причем далеко от места возмущения их характер уже не определяет геометрию течения, тогда в задаче только один определяющий параметр с кинематической размерностью — толщина слоя  $H$ . В этом случае скорость движения фронта разлета обратно пропорциональна времени. Эта задача, в том числе и при наличии тел произвольной формы, рассмотрена в [1, 5, 6].

Случаю  $\alpha = 1/3$ , соответствует течение, когда в безграничной идеальной несжимаемой жидкости в точке выделяется на единицу толщины слоя конечный импульс  $I_0$ . Возникает автомодельное движение (фиг. 1, 2) с двумя свертываю-

<sup>1</sup> По материалам доклада, прочитанного на VII съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г. Представлено А. Г. Терентьевым.



Фиг. 1



Фиг. 2

щимися пеленами (контактными разрывами) вокруг двух вихревых особенностей [7]. Эта задача обобщается на случай движения внутри угла [7] (фиг. 1, 3), а также для жидкости, с вязкостью зависящей от времени, которая может быть истолкована как турбулентная вязкость  $\nu_t = at^{-1/3}$  [2] (фиг. 1, 4). В [7] рассмотрены также близкие линеаризованные постановки с произвольными вязкостями, в том числе и постоянной вязкостью.

Задачи (фиг. 1, 2—4) могут быть обобщены на случай  $\alpha > 1/3$ , когда вместо конечного импульса на поток действует внешний импульс  $I(t, \lambda, \theta, \psi)$ , зависящий от времени и безразмерных координат. Практически интересные задачи в аналогичной постановке будут подробно обсуждены ниже для пространственных задач. При этом случаю  $\alpha = 2/3$ , соответствует постоянная сила, а  $\alpha = 2$  соответствует наличию силы тяжести  $g = LT^{-2}$  (фиг. 1, 5).

Случаю  $\alpha = 1/2$  соответствуют постоянные с размерностью вязкости  $\nu$  и циркуляции  $\Gamma$  (фиг. 1, 6). Наиболее известна осесимметричная задача о диффузии вихревой особенности [8], когда начальное поле скоростей индуцировано точечным вихрем с циркуляцией  $\Gamma_0$ . Из-за линейности исходного уравнения для завихренности  $\Omega$  эта задача обобщается на случай осесимметричного течения, когда вязкость — произвольная функция времени  $\nu = \nu(t)$  [7].

При произвольном начальном распределении завихренности возможна линеаризованная постановка, в которой решение осесимметричной задачи используется в качестве фундаментального [8].

Если кроме  $\Gamma_0$  задана в специальном виде зависимость  $\Omega_0(r, \theta) = (\nu/r^2)\omega(\theta)$ , то задача в нелинейной постановке автомодельна. Необходимо наложить некоторые ограничения на безразмерную функцию  $\omega(\theta)$ , например  $\omega(\theta)$  — нечетная, с тем чтобы циркуляция  $\Gamma$  вокруг  $r = 0$  не оказалась равной  $\infty$ . Эта задача не исследована.

При  $\Gamma_0$  и  $\Omega_0 = (\nu/r^2)\omega(\theta)$  задачи могут быть рассмотрены с полостью, расширяющейся по автомодельному закону  $r_1 = \lambda_1(\theta)\sqrt{\nu t}$ , и при отсутствии напряжений на свободной поверхности (фиг. 1, 7). При наличии только циркуляции и полости задача стандартным способом сводится к анализу обыкновенного уравнения третьего порядка. Несколько, существует ли решение при произвольной  $\omega(\theta)$ , так как неясно, можно ли на свободной поверхности одновременно исключить нормальное и касательное напряжения и удовлетворить условиям непротекания за счёт выбора формы свободной поверхности и  $\omega(\theta)$ .

Постановка (фиг. 1, 6, 7) может быть обобщена на случай наличия двух плоских стенок, на которых необходимо выполнить условия прилипания при  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (фиг. 1, 8). Эта задача не исследована. При отсутствии полости имеем только условия прилипания. Тогда  $\omega(\theta)$  произвольна.

Сильный взрыв на поверхности несжимаемой жидкости: жидкость идеальная, а на поверхности в точке выделяется конечная энергия (фиг. 1, 9). Задача поставлена Л. И. Седовым. Решение неизвестно. Постановка может быть усложнена введением плоской поверхности или рассмотрена клинообразная начальная область.

Случаю  $\alpha = 2/3$  соответствует удар плоской пластины или диска, когда на острой кромке образуется брызговая струя (фиг. 1, 10). После удара вдали от кромки, но на расстояниях, много меньших размера тела, потенциал  $W(z) = 2a\sqrt{Z}$ , для диска  $a = V_0 R^{1/2} \sqrt{2}/\pi$ , для полосы  $a = V_0/R$ , где  $R$  — радиус диска или полуширина полосы,  $V_0$  — скорость погружения. В этой постановке имеется в виду, что  $R \rightarrow \infty$ , а  $V_0 \rightarrow 0$ , так что  $a$  конечна и в пределе твердая граница неподвижна. Задача обобщается на случай движения двух жидкостей разной плотности выше и ниже начальной горизонтальной поверхности [9].

Для  $1/2 < \alpha < 3/4$  имеет место постановка, аналогичная задаче (фиг. 1, 10), соответствующая удару плавающего тела, когда  $0 < \theta < \pi$  (фиг. 1, 11).

Течениям (фиг. 1, 12)  $0 < \alpha$  соответствует саморазлет клиновидных слоев жидкости. Эти течения являются прямым обобщением случая (фиг. 1, 1).

Рассмотрим пространственные задачи.

При  $\alpha = 0$  имеет место саморазлет цилиндра (не обязательно круглого) идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 2, 13). Постановка аналогична (фиг. 1, 1) [1, 5].

Случаю  $\alpha = 1/4$  соответствует постановка, аналогичная фиг. 1, 2. Когда в пространстве, заполненном идеальной несжимаемой жидкостью, в точке мгновенно выделяется конечный импульс (фиг. 2, 14). Возникает вихревая особенность в виде расширяющегося кольца со свертывающейся вихревой пеленой. В задаче исследована только асимптотика вблизи вихревой особенности [3]. Возможно обобщение для жидкости переменной вязкости, которая пропорциональна размеру кольца и может быть истолкована как турбулентная вязкость. Эта задача решена в линеаризованной постановке в [2] (фиг. 2, 15).

Случай  $\alpha = 2/5$  имеет место, когда в точке мгновенно выделяется конечная энергия  $E_0$  и образуется сферическая полость (фиг. 2, 16). Задача обобщается на случай наличия конечного давления при  $p_0$  далеко от центра взрыва [4], а также на случай вязкой жидкости. Для закона расширения полости  $R(t)$  с этими дополнениями имеем

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{4}{2\pi} \left( \frac{E_0}{2\pi\rho} \right) \frac{1}{R^3} - \frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} - \frac{8\nu}{R}}$$

Кроме того, можно рассмотреть задачу о сильном взрыве на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 2, 17). Задача поставлена Л. И. Седовым, решение неизвестно.

Случаю  $\alpha = 1/2$  соответствует диффузия вихревой особенности, расположенной на луче, вблизи плоскости или конической поверхности (фиг. 2, 18). Аналогично плоской задаче можно ввести конические поверхности с условием прилипания и вектор начальной завихренности, имеющий компоненту только вдоль окружностей, перпендикулярных оси симметрии  $\Omega_\psi = \nu/r^2\omega_\psi(\theta)$ . Представляет интерес в качестве начальных данных использовать стационарное решение для конических течений [4, 10]. Возможна и более общая постановка с  $\Omega = \nu/r^2\omega(\lambda, \theta, \psi)$ .

Нестационарная задача о диффузии вихря вблизи плоскости с начальными данными  $\Gamma_0$  и  $\omega_\psi \equiv 0$  рассмотрена в [11].

Эти задачи могут быть обобщены на случай наличия полости, расширяющейся по закону  $r_0 = \sqrt{\nu t} \lambda_0(\theta)$  (фиг. 2, 19). Тогда для трех граничных условий на поверхности полости имеем только две дополнительные функции:  $\lambda_0(\theta)$  и  $\omega(\theta)$ . И вопрос о существовании решения неясен.

Так как вязкость  $\nu$ , теплопроводность  $\kappa$  и  $(F/\rho)^{1/2}$ , где  $F$  — сила, имеют одинаковые размерности, то задачи с этими постоянными автомодельны. Ниже, в разд. 2, более подробно рассмотрена задача этого типа, описывающая всплытие вихревого кольца в первоначально покоящейся теплопроводной жидкости (фиг. 2, 20).

В постановках, представленных на фиг. 2, 18—20, в качестве начальных данных могут быть использованы стационарные конические или другие течения, зависящие от величин с размерностью  $\Gamma_0$  и  $\theta_0$  — мощности плоского источника, при наличии конических поверхностей (фиг. 2, 21).

При  $\alpha > 1/4$  (фиг. 2, 22) возможны течения, когда внешний импульс зависит от времени и пространственных безразмерных координат. Задачам (фиг. 2, 20) соответствует линейное по времени возрастание импульса, а его распределение по координатам определяется теплопередачей.

Случай  $\alpha = 2$  будет рассмотрен ниже в связи с возможным механизмом образования смерча, ему соответствует учет силы тяжести  $[g] = L/T^2$ .

Рассмотрим саморазлет жидкости, заключенный между произвольной твердой конической поверхностью и имевшей в начальный момент также произвольную коническую поверхность. Можно заметить, что все рассмотренные выше течения, как плоские, так и пространственные, формально являются частным случаем (фиг. 2, 23), имеющим различные начальные данные и различное положение границ, а случай  $\alpha = 0$  является предельным к представленному на фиг. 2, 23. Следует заметить, что  $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ , соответствуют бесконечные начальные энергии и импульсы. Поэтому эти течения могут существовать только при наличии свободных струй, через которые вытекает энергия и импульс. В этом смысле течения (фиг. 2, 23) представляют при  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$  единственную возможную независимую постановку.

2. Рассмотрим более подробно задачи о всплытии вихревых колец в постановках (фиг. 2, 20; 21). Многочисленные наблюдения показывают, что если в начальный момент выделяется в малой области конечное количество тепла  $Q$ , то нагретая жидкость всплывает в виде вихревого кольца, например при атомном взрыве или при всплытии термиков от нагретой поверхности.

Рассмотрим постановку  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Под  $\nu$  можно понимать как молекулярную, так и турбулентную вязкость, а под  $x$  — коэффициент теплопроводности или диффузорного переноса нагретой жидкости или частиц, обладающих плавучестью, например пузырьков газа. Сделаем следующие предположения: из-за относительно малых изменений плотности при нагреве, в уравнениях движения жидкость будем считать несжимаемой с плотностью  $\rho$ ,  $a$ . Изменение плотности, связанное с нагревом, учтем только в силе плавучести. Предполагая изменения температуры малыми, примем  $\Delta\rho = k\Delta T$ , а теплоемкость жидкости  $C_p = \text{const}$ . Выделением тепла за счет вязкой диссиляции энергии пренебрежем. Из этих предположений следует, что сила плавучести  $F$ , зависящая от количества тепла  $Q_0$ , постоянна

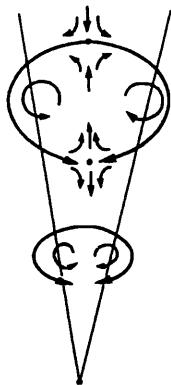
$$F = \int g\Delta dx dy dz = \int gk\Delta T dx dy dz = \frac{gkQ_0}{c_p}$$

Так как из  $\nu$ ,  $x$ ,  $\rho$ ,  $F$  можно образовать только одну независимую кинематическую постоянную с размерностью  $[\nu] = [x] = [F/\rho]^{1/2} = L^2/T$ , то число переменных сокращается, а течение автомодельно. Тогда характерный линейный размер, например радиус тора  $R_0$ , пропорционален  $\sqrt{t}$ , схема течения представлена на фиг. 3, где области радиуса  $r_0$  вблизи оси тора соответствует наиболее нагретая перемещающаяся вместе с тором жидкость. Можно искать решение этой задачи как осесимметричную асимптотику нестационарной задачи для уравнений Навье — Стокса и теплопроводности, зависящую от трех переменных. Это представляет значительные вычислительные трудности и не дополняет понимание механизма явления. Ниже рассмотрен другой путь, основанный на схематизации явления и анализа асимптотик.

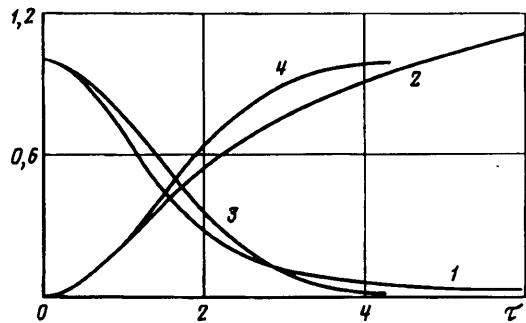
Из схемы фиг. 3 и из соображений размерности следует, что характерная циркуляция, например вычисленная вдоль оси симметрии, постоянна, так как  $[\Gamma] = L^2/T$ . При этом за счет силы плавучести импульс жидкости, движущейся вместе с кольцевым вихрем, возрастает.

Сначала рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть вязкость очень велика. Тогда движения почти нет. Конвективными членами в уравнении теплопроводности можно пренебречь, а тепло будет распространяться по известному автомодельному закону [12]. При этом сила плавучести распределена неравномерно и не имеет потенциала. В результате в области максимальных градиентов силы плавучести вокруг нагретой области возникает слабый кольцевой вихрь. Если теплопроводность  $x$  очень велика, то движение также будет очень слабым, так как тепло рассеется в пространстве. Наоборот, если коэффициент теплопроводности мал, то почти все тепло останется в районе нагретой вихревой области.

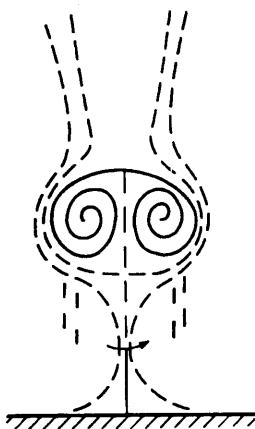
Таким образом, решение, зависящее от  $\nu$ ,  $x$  и  $F/\rho$ , а в безразмерном виде



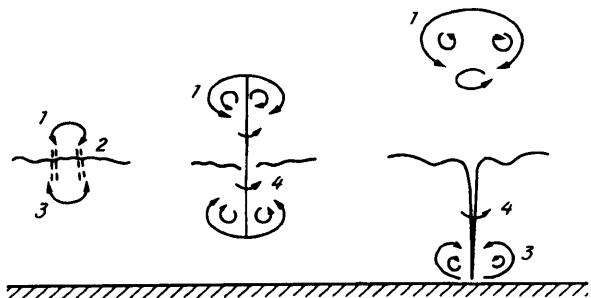
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

и от параметров  $\chi/\nu$  и  $F/(\rho\nu^2)$ , представляет наибольший интерес, если эти параметры одного порядка. Причем при заданных физических свойствах жидкости следует найти решение, зависящее только от одного параметра  $F/(\rho\nu^2)$ . Отсюда следует, что кроме свойств жидкости течение зависит только от силы плавучести, т. е. от начального количества тепла. Ниже на основе анализа асимптотик будет показано, как в некоторых случаях оценить параметры движения.

Вблизи оси вихря частицы в пределе движутся в плоскости, перпендикулярной оси. Поэтому для выяснения асимптотики рассмотрим пространственное течение, которое является прямым обобщением известных задач и диффузии вихревой особенности и диффузии тепла из малой области в плоской задаче. Обе плоские задачи сводятся к уравнению теплопроводности, автомодельное решение которого для температуры и вихря  $\Omega_0$  имеет вид [11]

$$T_0 = \frac{Q_0}{2\pi\chi c_p t} e^{-r^2/4\kappa t}, \quad \Omega_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t} \quad (2.1)$$

где  $r, t$  — радиус и время,  $\Gamma_0$  — начальная циркуляция. Суперпозиция этих решений дает одновременно автомодельное распространение температуры и вихря в слое между двумя неподвижными параллельными плоскостями, на которых отсутствует условие прилипания.

Усложним постановку. Пусть плоскости расходятся так, что расстояние между ними  $h$  меняется по закону  $h = C_1/\sqrt{vt}$ , где  $C_1$  — безразмерная постоянная. Обе задачи снова автомодельны, но течение усложняется. К осесимметричному вращению следует добавить осесимметричное течение, связанное с движением плоскостей. Потенциал  $\varphi$  и скорости  $V_r$  и  $V_z$  этого течения можно, не нарушая общности, представить в виде<sup>2</sup>

$$\varphi = -\frac{1}{4} \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right), \quad V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{4} r, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} z \quad (2.2)$$

При наличии только одной компоненты  $\Omega = \Omega_z$  вихря и дополнительного течения (2.2) уравнение Гельмгольца для вихря и температуры имеют вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{r}{2t} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{1}{2t} \Omega + \nu \Delta \Omega \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{r}{2t} \frac{\partial T}{\partial r} = \chi \Delta T \quad (2.4)$$

Решение (2.3) и (2.4) будем искать в виде

$$\Omega = \frac{C_2}{t} e^{f_1(\lambda_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{r}{\sqrt{vt}}, \quad T = \frac{C_3}{t^2} e^{f_2(\lambda_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{\sqrt{\chi t}} \quad (2.5)$$

где  $C_2$  и  $C_3$  — некоторые постоянные. После подстановки (2.5) в (2.3) и (2.4), несмотря на различие уравнений для безразмерной функции  $f_1$  и  $f_2$ , имеем одно и то же уравнение

$$f_i + (f'_i)^2 + [1/\lambda_i + \lambda_i] f'_i + 3/2 = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.6)$$

Из условия симметрии на оси имеем<sup>3</sup>

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_{r=0} = f'_i(0) = 0$$

При этом  $f_i$  определится с точностью до постоянной, которая уже представлена постоянными  $C_2$  и  $C_3$ . Так что можно положить  $f(0) = 1$ . Для циркуляции и количества тепла, заключенного между плоскостями, имеем

$$\Gamma(r, t) = \int_0^r \Omega 2\pi r dr = C_2 \nu 2\pi \int_0^{\lambda_1} e^{f_1(\lambda_1)} \lambda_1 d\lambda_1 = \Gamma(\lambda_1) \quad (2.7)$$

$$Q(r, t) = h(t) \int_0^r \rho C_p T 2\pi r dr = C_3 C_p \nu^2 \chi C_p 2\pi \int_0^{\lambda_2} e^{f_2(\lambda_2)} \lambda_2 d\lambda_2 \quad (2.8)$$

На фиг. 4 представлены безразмерные функции  $f(\lambda)$  и  $I_i(\lambda)$ , полученные в результате численного решения (2.6) (кривые 1, 2) и для сравнения  $e^{-\nu \lambda^2}$  и  $I_2(\lambda)$  (кривые 3, 4), соответствующие решению (2.1), где

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda f(\lambda) \lambda d\lambda, \quad I_2(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda e^{-\nu \lambda^2} \lambda d\lambda = 1 - e^{-\nu \lambda^2}$$

<sup>2</sup> Этот прием уже использован в [3] для другой задачи. Следует исправить там опечатку, не существенную для результата. На с. 80 выражение потенциал  $\Phi_h$  этого течения должно быть  $\Phi_h = p_0^{1/2} C_0 h [z^2 - 1/2 (x^2 + y^2)]$ .

<sup>3</sup> В исходной задаче симметрии на оси вихря нет,  $\nabla f_i(\lambda, \theta)$  зависит от уже введенных постоянных,

Решение (2.5) является асимптотикой вблизи оси при малых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , кольцевого вихря радиуса  $R_0$ . При этом  $2\pi R_0(t) = h = C_1 \sqrt{\nu t}$ .

Кроме (2.5) существует трехпараметрический ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) класс аналогичных решений вида

$$h = C_1 t^\alpha, \quad \Omega = C_2 t^\beta e^{\gamma t(\lambda_1)}, \quad T = C_2 t^\gamma e^{\gamma t(\lambda_2)}$$

который может быть использован в других задачах.

Рассмотрим теперь далекую асимптотику при  $r \rightarrow \infty$  исходной пространственной задачи в сферических координатах. Опустив при  $V \rightarrow 0$  квадратичные конвективные члены в уравнении теплопроводности для задачи о распространении тепла из малой области, имеем известное автомодельное решение [11]  $T = C_3 t^{-3/2} e^{-Vt/2}$ .

С другой стороны, при движении вихревого кольца возникают замкнутые поверхности тока, движущиеся вместе с кольцом, что эквивалентно движению тела. При этом при  $r \rightarrow \infty$  имеем диполь с потенциалом  $\Phi = C_5 \cos \theta / 2r^2$ . Потенциал  $\Phi$  дает главную асимптотику поля скоростей при  $r \rightarrow \infty$ , так как вихревая компонента скорости даже для плоского вихря затухает по экспоненте (2.5).

В решение и его различные асимптотики входят пять постоянных:  $C_1 - C_5$ . Две последние, связанные с асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$ , не являются произвольными, так как зависят от решения в ограниченной области. Постоянная  $C_3$  пропорциональна начальному количеству тепла и может быть задана произвольно, при этом сила будет определена. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  следует определить в процессе решения. Например, если вязкость мала, то диффузия вихря замедлена и  $r \ll R_0$ . При этом можно воспользоваться картинами течения, представленными в [3]. Так, если вихревая область находится в малой окрестности  $r_0/R_0 \leq 0,01$  оси вихревого кольца и завихренность постоянна, то для скорости жидкости на оси вихря можно воспользоваться формулой [2]

$$V_0 = \frac{\Gamma(r_0)}{4\pi R_0} \left( \ln \frac{8R_0}{r_0} - \frac{1}{4} \right) \quad (2.9)$$

В рассматриваемом случае используем схему для приближенной оценки. Положив  $\lambda_1 = r_0/\sqrt{\nu t} \sim 1$ ,  $2\pi R_0 = C_1 \sqrt{\nu t}$ ,  $\Gamma(1) = C_2 4\pi\nu$ , из (2.9) получим

$$V_0 = \frac{\sqrt{\nu} C_2}{C_1 \sqrt{t}} \left( \ln 8C_1 - \frac{1}{4} \right) \quad (2.10)$$

Скорость (2.10) при отсутствии внешних сил соответствовала бы скорости движения вихря. В рассматриваемом случае при наличии силы плавучести вихрь в соответствии с теоремой Жуковского должен иметь дополнительную скорость, перпендикулярную и пропорциональную внешней силе,

$$\rho \Gamma(1) \frac{dR_0}{dt} = \frac{F}{2\pi R_0}, \quad \frac{F}{\rho V^2} = C_2 C_1^2 \quad (2.11)$$

С другой стороны, для количества движения жидкости  $I$  имеем  $I = m \rho R_0^3 V_0$ , где  $m$  — сумма массы жидкости в объеме вихря и присоединенная масса этого «тела». Отсюда, если для оценки предположить, что это тело мало отличается от сферы,  $m \sim 4/3\pi + 2/3\pi = 2\pi$ .

Используя закон сохранения импульса, получим

$$\frac{F}{\nu^2 \rho} = m \frac{C_1^2 C_2}{8\pi^3} \left( \ln 8C_1 - \frac{1}{4} \right) \quad (2.12)$$

Так как  $F$  пропорционально произвольной постоянной  $C_3$  (2.8), то (2.11) и (2.12) дают уравнения для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  от  $C_3$ . Этот пример

соответствует случаю относительно малой вязкости. Наоборот, при большой вязкости  $r_0 \sim R_0$ , течение имеет характерную грибовидную форму. При очень больших масштабах и распространение тепла и завихренности связан с турбулентным перемешиванием  $\lambda_1 = \lambda_2$ , а границы нагретой и завихренной областей совпадают. Аналогичные течения могут иметь место при опускании на дно тяжелой фракции, например песка или холодной жидкости, а также всплытии пузырей или опилок и т. д. Можно ожидать, что если локально насыпать песок на поверхность водоема, то он ляжет на дне в виде кольца. Наоборот, при мощном выделении тепла, например при подводном извержении, теплая вода и газы поднимутся на поверхность тоже в виде кольца.

Рассмотрим теперь частный случай (фиг. 2, 22), соответствующий  $\alpha = 2$ , когда размерность кинематической постоянной совпадает с размерностью ускорения силы тяжести  $[g] = L^2/T$ . Тогда из соображений размерности для суммарной внешней силы имеем  $F = \rho g R_0^3 C_1$ , где  $C_1 \sim 1$ . В отличие от предыдущего случая здесь сила пропорциональна характерному объему. Для характерного размера  $R_0$  имеем  $R_0 = C_2 g^2$ .

Таким образом, постановка задачи соответствует всплытию вихревой зоны из легкой жидкости в пространстве, заполненном тяжелой жидкостью, или наоборот.

Не нарушая автомодельности, можно положить, что  $\rho = \rho_0 \mu(\lambda_1, \theta, \psi)$ , и ввести переменную турбулентную вязкость. Изменение плотности может быть связано с разогревом или выпадением тяжелой фракции. В природе эти механизмы имеют место: например, когда идет дождь, тогда одновременно имеет место выпадение тяжелой фракции — воды — и разогрев вследствие конденсации. Наоборот, при сходе снежной лавины полукольцевой вихрь захватывает снег со склона и плотность увеличивается. Для описываемых течений характерно, что в отличие от течения с постоянной внешней силой интенсивность вихря в этом течении быстро нарастает. Для решения задач этого типа нужны дополнительные соображения для определения  $\mu$ . В случае постановки (фиг. 2, 20) этим дополнительным соотношением являлось уравнение теплопроводности.

3. Рассмотрим возможный механизм образования смерча. При движении любого нестационарного кольцевого вихря частицы, которые были на оси или вблизи нее окажутся внутри завихренной области. Так, для автомодельного течения из-за отсутствия линейного размера все частицы, которые попадут внутрь вихревой области в начальный момент времени, могут быть расположены только на конической поверхности  $\theta_1 \neq 0$ .

Если атмосфера не покоялась, а имела циркуляцию, например,  $\Gamma(r, \theta) \neq 0$  при  $\theta \neq 0$  и  $\Gamma(r, 0) = 0$ , так что на оси в начальный момент особенности нет, то в следе за кольцевым вихрем, если пренебречь диссиляцией, неизбежно возникает особенность  $\Gamma \neq 0$ , так как на оси окажутся частицы, находившиеся первоначально вне окрестности оси и имевшие  $\Gamma \neq 0$ . Механизм образования первоначальной циркуляции может быть различным, например из-за обтекания горы или в грозовом фронте [12]. Вихревая особенность возникает как при опускании холодных влажных масс воздуха, так и при всплытии горячего воздуха. И тот и другой механизмы образования смерча не противоречат наблюдениям в природе. Большое разнообразие автомодельных задач, описывающих этот механизм, содержится в постановке (фиг. 2, 21). Описанный выше механизм образования вихревой особенности — смерча — проиллюстрируем на примере автомодельного движения.

Максимально упростим задачу. Из-за огромных масштабов явления даже турбулентное число Рейнольдса очень велико:  $10^4 - 10^5$  [10]. Поэтому жидкость вне пограничных слоев вблизи земли и вблизи оси смерча можно считать идеальной. Далее предположим, что  $\mu$  принимает только два значения, соответствующие плотности  $\rho_1$  вне вихревой зоны и  $\rho_2$  внутри вихревой зоны и в следе (фиг. 5). Влажные частицы при подходе к вихревой области приобретают

дополнительные скорости, связанные с ее обтеканием и увеличением скорости вращения при подходе к оси. В результате понижается давление, падает температура и происходит конденсация. Тот же результат будет и вследствие подъема вихревой области в зону меньших давлений.

Положим, что на фронте конденсации, совпадающей с границей вихревой области, капли дождя  $\rho_3$  устраняются из потока, унося массу и импульс, где  $\rho_3$  — отношение массы капель на объем, в котором они находятся.

Предполагая, что на фронте конденсации отсутствуют напряжения, а имеет место только скачок плотности и величины скорости жидкости, а направление скорости сохраняется, из закона сохранения массы и импульса имеем

$$\rho_1 (V_1 - D) = \rho_2 (V_2 - D) + \rho_3 (V_3 - D)$$

$$\rho_1 (V_1 - D) V_1 = \rho_2 (V_2 - D) V_2 + \rho_3 (V_3 - D) V_3$$

где  $V_1, V_2, V_3$  — скорости жидкостей и капель дождя,  $D$  — скорость границы. Если считать заданными  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$ , а также  $V_1$ , то на границе определяется скачок скорости  $V_1 - V_2, V_3$ . (Могут быть приняты и другие модели.)

В этой модели плотности считаются заранее заданными, например их можно определить из термодинамических соотношений, учитывающих теплоту конденсации и изменение температуры газа для среднего в области давления.

Начальное поле скоростей можно взять в виде чистого вращения вокруг оси симметрии с циркуляцией  $\Gamma = \sqrt{g} r^2 \gamma(\theta)$ . Если еще положить, что произвольная функция  $\gamma(\theta) \neq 0$ , за исключением  $\gamma(0) = 0$ , то начальное поле скоростей не имеет особенностей. Так как аддитивная постоянная давления несущественна для несжимаемой жидкости (например, при  $r = 0, p = 0$ ), а начальное поле давления слагается из гидростатического  $p_1 = \rho_0 g r \cos \theta$  и поля давления от вихрей, то задача автомодельна. Поскольку линейного размера в определяющих параметрах нет, то частицы, которые находились внутри конуса  $0 < \theta < \theta_1$ , перейдут в вихревую зону, частицы между  $\theta_1 < \theta < \theta_2 \leq \pi/2$  перейдут со временем в след. А частицы конуса  $\theta_1$  или  $\theta = \pi/2$  — на ось следа и вихревой области. У этих частиц была начальная циркуляция  $\Gamma(\theta_1)$ . Следовательно, на оси  $r = 0$  до вершины вихревой области образуется вихревая особенность

$$\Gamma_0 = k\Gamma(\theta) = k \sqrt{g} r^2 \gamma(\theta)$$

где  $k(\theta) = V_2/V_1$ ,  $\theta = \theta_1$  иди  $\theta = \pi/2$ .

Если жидкость идеальна, то вихревая зона будет содержать множество торообразных контактных разрывов, подобных тем, что рассмотрены в [3]. В зоне вблизи начала координат вязкостью пренебречь уже нельзя, а характерная циркуляция, как следует из решения, вдоль вертикальной оси возрастает по степенному закону. В этом случае может существовать непрерывное стационарное автомодельное течение типа смерча, но [9] с переменной турбулентной вязкостью  $\nu$ , без особенности на оси.

Рассмотрим еще аналогичную (фиг. 5) схему течения, но с постоянной вязкостью  $\nu$  и постоянной силой всплытия (фиг. 2, 22). Тогда автомодельность будет иметь место, если начальное распределение циркуляции имеет вид  $\Gamma(\theta) = \nu\gamma(\theta)$ ,  $\gamma(0) = 0$ . Хотя особенности нет, но в начале координат в начальный момент скорость не определена.

В этом случае существует стационарное решение типа смерча со слабыми разрывами и внешним моментом на нем, причем интенсивность разрыва стремится к нулю при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности [9]. Если теперь в этом решении [9] снять очень малый внешний момент, то оно будет разрушаться крайне медленно. Следовательно, в рассматриваемом случае за всплывающим вихрем может возникнуть при подходящих начальных данных  $\gamma(\theta)$  течение почти стационарное и без особенностей.

В задаче о нестационарной диффузии вихревой особенности (фиг. 2, 18) около плоскости при  $\gamma(\theta) = \text{const}$  зону отрыва на плоскости, расширяющуюся по автомодельному закону  $r_i = k \sqrt{\nu} t^{1/2}$ , можно трактовать как радиус воронки смерча [10]. Очевидно, что  $k$  зависит от  $\gamma(\theta)$ . Если  $\gamma(\theta)$  соответствует почти стационарным течениям [5], то  $k$  может быть значительно меньше, чем в [10].

Из этих двух примеров следует, что за всплывающим над плоскостью вихрем может возникнуть стационарное или почти стационарное решение типа смерча.

Рассмотренный механизм образования смерча, по-видимому, соответствует смерчам типа «роторное облако», песчаным смерчам [12], смерчам, возникающим в результате извержения или взрыва с выделением тепла. Основная же масса описаний смерчей связана с грозовыми дождями. При этом начальная врачающаяся видимая воронка смерча зарождается на нижней поверхности тучи [12]. Рассмотренный выше механизм образования смерча, связанный с подъемом теплого воздуха, может быть изменен на противоположный процесс, связанный с опусканием тяжелого холодного воздуха. Действительно, можно представить себе следующую схему (фиг. 6). Под теплой дождевой тучей находится сухой холодный воздух, так что граница раздела находится в равновесии. Если теперь в некоторой точке границы возникло возмущение и начался процесс подъема вихря (фиг. 6, 1) с выделением осадков (фиг. 6, 2) по схеме, рассмотренной выше, то осадки, попав в прилегающий к туче сухой воздух, будут поглощены, а соответствующая масса воздуха остынет еще больше и, увеличив свой вес еще за счет влаги, устремится вниз, образуя вихрь (фиг. 6, 3). В следе за обоими вихрями, если имела место начальная циркуляция, образуется смерчевая вихревая особенность (фиг. 6, 4). Описание этого течения, за исключением процесса соударения вихря с землей, может быть выполнено в рамках описанных выше автомодельных постановок. Кроме многочисленных описаний [12], не противоречащих описанным механизмам, смерч сопровождает почти всегда «каскад» смерча, который по описаниям поразительно похож на кольцевой вихрь, порождающий смерч. Кроме того, наблюдается также [12] вдавливание травы и предметов в грунт в месте возникновения смерча, что, возможно, связано с соударением вихревого кольцевого вихря (каскада) с землей.

В обзоре автомодельных течений (разд. 1), описывающих самодвижения жидкости, не включены некоторые задачи, автомодельные вследствие линеаризации, например задача о волнах на поверхности тяжелой жидкости. Список задач можно было бы расширить, если допустить постановки, связанные с расширением свойств жидкости. В задаче (фиг. 1, 4 и 2, 15), где вводится турбулентная вязкость, одинаковая для всего пространства, можно было бы ввести ее еще зависящей не только от времени, но и от безразмерной координаты, что, безусловно, лучше соответствует изучаемому явлению.

Возможно, некоторые задачи пропущены или их постановки еще не известны. Однако автор надеется, что их либо нет, либо их число мало. В то же время список задач искусственно расширен с целью простоты изложения. В действительности их можно объединить в пять существенно разных постановок.

Во-первых, задача о саморазлете жидкого цилиндра или конуса. Эта задача может быть поставлена для газа. Задача о разлете цилиндрической массы холодного газа, когда сначала движется ударная волна, а затем газ растекается во все стороны, возможно, может иметь значение в астрономии при описании саморазлета тонких одномерных структур из холодного газа. Во-вторых, задача о мгновенном выделении в точке конечного импульса, и описанные здесь постановки с импульсом, зависящим от времени, приводящие к вихревым течениям. В-третьих, задача о сильном взрыве внутри и на поверхности жидкости. В-четвертых, задача о брызговой струе при ударе по плавающему телу. В-пятых, обширный класс задач, соответствующих размерности  $\nu, x, \Gamma, F/\rho$ . Как уже было отмечено в конце разд. 1, формально все описанные течения являются частным случаем

разлета жидкости, находящейся в произвольной конической области, с различными свойствами, различными начальными данными и различными массовыми силами.

Большинство перечисленных постановок не только не решены, но и не исследованы. Оправданием их публикации может быть желание обратить внимание на необходимость их исследования, в том числе численного, что облегчено в связи с сокращением числа переменных. Кроме того, автомодельная постановка позволяет выделить главный параметр, определяющий течение, и это, по-видимому, наиболее существенно, так как связано с пониманием явлений природы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. М.: Наука, 1987. С. 7—25.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. С. 335—341.
3. Якимов Ю. Л. Автомодельная «диффузия» импульса в идеальной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С.73—83.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. С. 103—111; 275—279.
5. Якимов Ю. Л. Поступательные струйные автомодельные течения несжимаемой жидкости//Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 5. С. 1074—1078.
6. Якимов Ю. Л. Предельные автомодельные движения и гравитационные волны в мелких бассейнах при сильном возмущении//Пробл. математики и механики, Новосибирск: Наука, 1983. С. 214—224.
7. Коchin Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. С. 343—357.
8. Якимов Ю. Л. Влияние атмосферы при падении тел на воду//Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 5. С. 3—6.
9. Якимов Ю. Л. Смерч и особое предельное решение уравнений Навье — Стокса//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 23—33.
10. Сычев В. В. Вязкое взаимодействие нестационарного вихря с твердой поверхностью//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 72—84.
11. Ландау Л. Д., Либниц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 282.
12. Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. Л.: Наука, 1969. С. 151—152, 192, 247, 275, 342, 367.

Москва

Поступила в редакцию  
18.II.1992