

УДК 532.546

© 1992 г. А. Р. КАСИМОВ

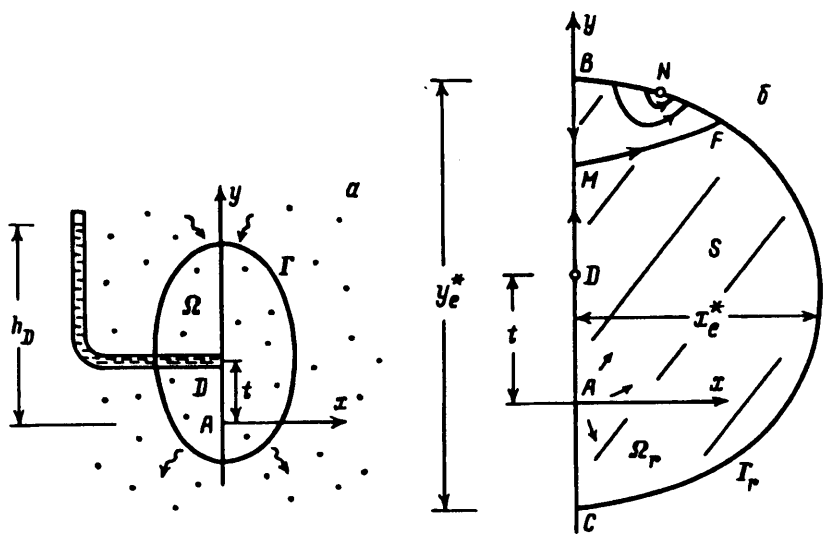
МИНИМАЛЬНЫЙ РАЗМЕР ПУЗЫРЯ ПОЛНОГО НАСЫЩЕНИЯ ВОКРУГ ОДИНОЧНОГО ИСТОЧНИКА

Для исследования насыщенно-ненасыщенных течений грунтовых вод и влаги используются как численные методы решения полных уравнений Ричардса [1, 2], так и аналитические подходы, опирающиеся на допущение о специальных законах влагопроводности, одномерности потока в зоне аэрации, осреднение насыщенной части потока и др. [3]. Для мелиоративной практики представляет интерес вопрос: при каких исходных параметрах (интенсивность полива, геометрия области течения, характер неоднородности грунта и т. д.) возможно появление зоны полного насыщения и каковы ее размеры [4—7]? В широко используемой квазилинейной модели установившихся ненасыщенных течений такие зоны могут иметь вид «лунки» [7], «хвоста» [8], «пузыря» [9]. Свободная граница, т. е. линия, разделяющая область с положительным давлением (уравнение Лапласа относительно напора) и область с отрицательным давлением (уравнение конвективной диффузии относительно потенциала Кирхгофа), аналитически найдена пока лишь для простейших схем течения [10].

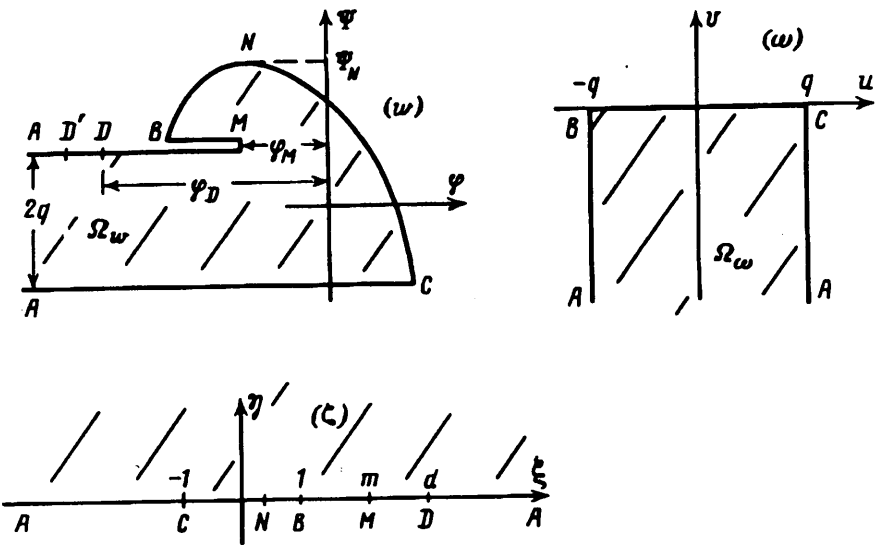
В данной работе исследуется течение в зоне полного насыщения вокруг одиночного источника, когда возникновение такой зоны естественно, поскольку математически источник характеризуется бесконечно большим напором. В известных аналитических решениях область насыщенного потока источника имеет бесконечную протяженность [11], хотя интуитивно ясно, что для некоторых грунтов и величин мощности источника испарение, капиллярные силы, транспирация и т. д. могут привести к образованию зон полного насыщения типа пузырей. Обычным в упомянутых решениях задач о течении в областях полного насыщения является допущение о линейной зависимости притока-оттока с кривой депрессии как функции горизонтальной и (или) вертикальной координаты [11—13]. Практически неравномерный полив [14] и испарение [11] могут подчиняться более сложным зависимостям, что затрудняет использование точных методов в задачах с депрессионными кривыми.

Суть предлагаемого решения состоит в том, что форма депрессионной кривой — изобары находится из условия минимума площади зоны положительного давления, ограниченной этой кривой. При этом закон инфильтрации (испарения) в (из) эту зону через свободную границу нелинейно зависит от координат физической плоскости, является функцией управления (см. [15]) и также находится в процессе решения вариационной задачи. В качестве ограничения фигурирует величина напора в одной точке на оси симметрии потока. Математически задача относится к задачам оптимизации формы, когда состояние системы описывается гармоническим уравнением [16], а для ее решения используется известная техника [17, 18]. В результате в явном виде найден строгий глобальный экстремум площади пузыря полного насыщения с доказательством необходимых и достаточных условий и предъявлением самой экстремали. С практической точки зрения полученный экстремум позволяет дать изопериметрическую оценку [19] интегральной характеристики пузыря через известную мощность источника и данные одного пьезометрического замера.

Рассмотрим плоскую установившуюся фильтрацию по закону Дарси из единичного источника обильности $4q$, помещенного в однородный изотропный грунт (фиг. 1, а). В области Ω давление положительно, на кривой Γ , ограничивающей Ω , давление атмосферное, а в точке A , где помещен источник, давление и напор бесконечно велики. Кривая Γ не является линией тока, интенсивность притока-оттока вдоль Γ подлежит определению. Течение влаги вне Ω , т. е. в зоне аэрации, мы не исследуем и считаем, что сопряжение этой зоны с зоной полного насыщения осуществляется через расходную функцию вдоль Γ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем рассматривать течения, симметричные относительно оси y , и ограничимся рассмотрением правой половины Ω , области Ω (фиг. 1, б). Кривая Γ_r , отрезки AB и AC ограничивают площадь S . Пусть в некоторой точке D на оси y (ордината t) замерен напор h_D . Сформулируем вариационную задачу: при заданных q , t , h_D найти изобару Γ , такую, чтобы площадь S была экстремальна.

В этой задаче максимум вырождается. Ниже это будет показано строго, а один из примеров, когда $S = \infty$, дает решение об одиночном источнике с линейным законом инфильтрации (испарения) [11]. Отметим, что из-за учета гравитации данная постановка задачи отличается от приведенной в [20], где искомая экстремаль являлась изобарой и эквипотенциалью одновременно.

Введем комплексную координату $z = x + iy$, комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ и функцию Жуковского $\omega = u + iv$, $u = x - \psi$, $v = \varphi + y$, где $\varphi - h$ — потенциал скорости, ψ — функция тока, причем все фильтрационные характеристики отнесены к известной величине коэффициента фильтрации грунта. На фиг. 2 показаны области Ω_w и Ω_ω , соответствующие Ω , в плоскостях (w) и (ω) , причем граница BNC в плоскости (w) неизвестна и изображена схематически. Часть BN этой границы соответствует участку притока, а NC — оттока. Вообще говоря, на депрессионной кривой такие

участки могут чередоваться в большом числе, а соответствующие схемы течений хорошо изучены в гидрогеологии [21]. Область Ω_w может содержать разрез BM , который соответствует участку падения напора вдоль оси течения. Линия тока MF при этом отделяет фильтрационный поток источника и поток, питаемый инфильтрацией с участка BN . Таким образом, граница Ω_w может быть достаточно сложной, тогда как область Ω_w имеет вид полуполосы.

Отобразим конформно Ω_w на полуплоскость $\text{Im}\zeta > 0$ (фиг. 2) переменного $\zeta = \xi + i\eta$ функцией

$$\omega = -2q\pi^{-1} \arcsin \zeta \quad (1)$$

$$u = -2q\pi^{-1} \arcsin \xi, \quad |\xi| \leq 1, \quad v = -2q\pi^{-1} \text{arch } |\xi|, \quad |\xi| \geq 1$$

Введем управление границей BC посредством гельдеровской функции $x = x(u)$, причем $x_B = x_C = 0$, $-q \leq u \leq q$. В результате для аналитической функции $z(\zeta)$ получим задачу Дирихле: $x = 0$ на AB и AC , $|\xi| \geq 1$ и $x = x(u(\xi))$ на BC , причем $u(\xi)$ выражается из (1). Согласно [11], выпишем интегральное представление

$$z = -\frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(u(\tau))}{\tau - \zeta} d\tau + y_A \quad (2)$$

где $y_A = 0$ в силу принятой нормировки.

Представив $x(u)$ в виде ряда аналогично [18], переходя в (2) к пределу при $\zeta \rightarrow \xi$ и используя известные представления интеграла Коши в виде рядов, сопряженных с рядами ядра, т. е. $x(u)$, получим уравнение искомой кривой BC

$$x = \sum b_n U_n(\xi), \quad y = \sum b_n T_n(\xi), \quad n = \overline{1, \infty} \quad (3)$$

$$U_n = \sin(n \arccos \xi), \quad T_n = \cos(n \arccos \xi), \quad |\xi| \leq 1$$

и уравнение отрезка AD

$$x = 0, \quad y = \sum b_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n, \quad \xi \geq 1 \quad (4)$$

Из (3) для функционала площади следует

$$S = \int_{-1}^1 x(\xi) y'(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 \quad (5)$$

Выразим ограничения задачи через коэффициенты b_n . Поскольку величины t , q , h_D заданы, то $d = \text{ch}(\pi p_D / 2q)$, где $p_D = -(\varphi_D + t)$ — приведенное давление в точке замера D , является фиксированной постоянной. Тогда из (4) следует

$$t = \sum b_n d_1^n, \quad d_1 = d - \sqrt{d^2 - 1} \quad (6)$$

Следовательно, исходная задача сводится к поиску экстремума квадратичной формы $\Phi = S + \mu(t - \sum b_n d_1^n)$, где μ — множитель Лагранжа, подлежащий определению. Необходимое условие экстремума $d\Phi = 0$ или $\partial\Phi/\partial b_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$, дает

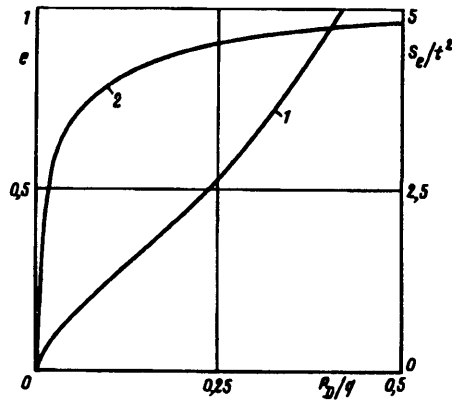
$$b_n = -\frac{\mu d_1^n}{\pi n} \quad (7)$$

Достаточным условием экстремума является знакоопределенность второй вариации $d^2\Phi$. Поскольку $\partial^2\Phi/\partial b_n^2 = \pi n$, $d^2\Phi > 0$ и коэффициенты (7) реализуют строгий минимум. Подставив (7) в (5) и (6), найдем экстремум и постоянную

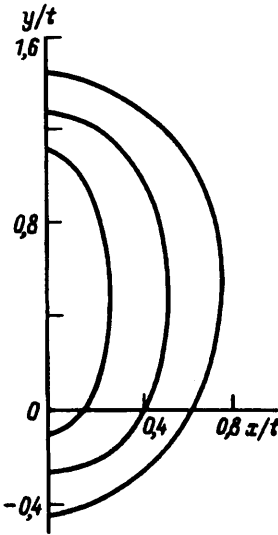
$$S_e = -\frac{\pi t^2}{2 \ln(1 - d_1^2)}, \quad \mu = \frac{\pi t}{\ln(1 - d_1^2)} \quad (8)$$

Подставив (7) в (8) и суммируя ряды, получим уравнение экстремали ($\theta = \arccos \xi$, $\theta \in [0, \pi]$)

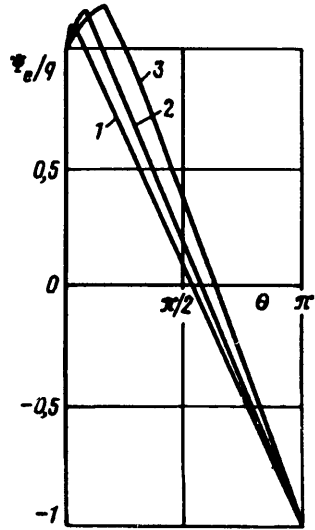
$$x_e = -\frac{\mu}{\pi} \arctg \frac{d_1 \sin \theta}{1 - d_1 \cos \theta}, \quad y_e = \frac{\mu}{\pi} \ln(1 - 2d_1 \cos \theta + d_1^2) \quad (9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Из (1) получим зависимость $\psi(\theta)$ на депрессионной кривой

$$\psi_e = q + x_e - 2q\pi^{-1}\theta, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Из параметрических уравнений (9) находятся характерные размеры и эксцентриситет пузыря. А именно горизонтальный размер x_e^* получается подстановкой корня уравнения $dx_e(\theta)/d\theta = 0$ в первое уравнение (9). Вертикальный размер пузыря Ω , находится из второго уравнения (9) как $y_e^* = y_e(0) - y_e(\pi)$. В результате

$$x_e^* = -\frac{\mu}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{d_1}{\sqrt{1-d_1^2}}, \quad y_e^* = -\frac{\mu}{\pi} \ln \frac{1+d_1}{1-d_1} \quad (10)$$

На фиг. 3 изображены графики зависимости S_e/t^2 (кривая 1) и эксцентриситета $e = 2x_e^*/y_e^*$ (кривая 2) от p_D/q , построенные по (8) и (10), на фиг. 4 — экстремали в системе координат $(x/t, y/t)$ для $p_D/q = 0,001, 0,031, 0,061$ (кривые 1—3 соответственно), а на фиг. 5 — графики расхода вдоль BC в виде $\psi_e(\theta)$ для тех же p_D/q . Вид зависимостей $\psi_e(\theta)$ свидетельствует, что в плоскости (w) (фиг. 2) кривая BC имеет один максимум, т. е. в вершине пузыря имеется участок притока. Кроме того, для экстремального режима имеется точка M с минимальным напором, т. е. в плоскости (w) имеется разрез BM . Максимум φ_M на отрезке ADB находится дифференцированием тождества $\psi(\xi) = \psi(\xi) - y(\xi)$, откуда следует

$$\varphi'(\xi) = -\frac{2q}{\pi\sqrt{\xi^2-1}} + \frac{\sum nb_n(\xi - \sqrt{\xi^2-1})^n}{\sqrt{\xi^2-1}}, \quad \xi \geq 1 \quad (11)$$

Корень m уравнения $\psi'(\xi) = 0$, $\xi \geq 1$, для DB соответствует абсциссе точки M . Подставив (7) в (11), получим, что параметр $m_1 = m - \sqrt{m^2 - 1}$ определяется в виде

$$m_1 = d_1^{-1} - d_1^{-1} \left[\frac{2q}{\pi t} \ln(1 - d_1^2) + 1 \right]^{-1}$$

откуда легко находятся соответствующие значения φ_m и u_m .

В отличие от региональных течений грунтовых вод [20], где перемежаемость участков питания и разгрузки естественна, для исследованной задачи режим с условием одновременного притока и оттока в зону полного насыщения практически мало вероятен в силу небольших размеров пузыря. Следовательно, наиболее существенным результатом является формула (8) и соответствующий график на фиг. 3, по которым для произвольного пузыря строится неравенство $S(q, h_D, t) \geq S_e$, т. е. гарантированная нижняя оценка [19] площади пузыря. Эта оценка может быть усилена, если произвести еще один или несколько замеров напора внутри пузыря, например в точке D_1 , т. е. если в вариационную задачу ввести дополнительные ограничения (h_1 и t_1). Также можно учесть капиллярность грунта по модели Ведерникова [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neuman S. P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements//J. Hydraul. Div. Proc. ASCE, 1973. V. 99. № 12. P. 2233—2250.
2. Fipps G., Skaggs R. W., Nieber J. L. Drains as a boundary condition in finite elements//Water Resour. Res. 1986. V. 22. № 11. P. 1613—1621.
3. Олейник А. Я., Поляков В. Л. Дренаж переувлажненных земель. Киев: Наук. думка, 1987. 279 с.
4. Королева О. А., Королев А. В. Распределение влаги вокруг перфорированной трубы при подпочвенном орошении//Изв. АН СССР. МЖР. 1979. № 4. С. 162—165.
5. Philip J. R. Nonuniform leaching from nonuniform steady infiltration//Soil Sci. Soc. Amer. J. 1984. V. 48. № 4. P. 740—749.
6. Parissopoulos G. A., Wheeler H. S. Numerical study of the effects of layers on unsaturated-saturated two-dimensional flow//Water Res. Manag. 1990. V. 4. № 2. P. 97—122.
7. Warrick A. W., Zhang R. Steady two- and three-dimensional flow from saturated to unsaturated soil//Adv. Water Resour. 1987. V. 10. P. 64—68.
8. Philip J. R. Steady unsaturated seepage above a sloping impermeable base//Water Resour. Res. 1988. V. 24. № 7. P. 1192—1196.
9. Lockington D., Hara M., Hogarth W., Parlange J.-Y. Flow through porous media from a pressurized spherical cavity//Water Resour. Res. 1989. V. 25. № 2. P. 303—309.
10. Philip J. R. What happens near a quasilinear point source?//Water Resour. Res. 1991. 1992. V. 28. № 1. P. 47—52.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
12. Береславский Э. Н., Панасенко Л. А. О линзах пресных вод при фильтрации из оросителей//Изв. АН СССР. МЖР. 1990. № 4. С. 102—106.
13. Капранов Ю. И. О форме линзы пресных вод при линейном законе испарения//ПИММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 497—504.
14. Baty V., Gardner W. R. Steady-state solute convection in two dimensions with nonuniform infiltration//Soil Sci. Soc. Amer. J. 1978. V. 42. № 1. P. 18—22.
15. Касимов А. Р. Оптимизация полива в гидродинамической модели фильтрации//ПИММ. 1981. Т. 55. Вып. 2. С. 338—341.
16. Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. N. Y.: Springer-Verlag, 1984. P. 168.
17. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. The estimation of integral seepage characteristics of hydraulic structures in terms of the theory on inverse boundary-value problems//Z. Angew. Math. Mech. 1992. V. 72. № 2. P. 103—112.
18. Ильинский Н. Б., Касимов А. Р. Оценки уровней подпора и осушения по гидродинамической модели//Изв. АН СССР. МЖР. 1991. № 2. С. 82—90.
19. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
20. Toth J. The role of regional gravity flow in the chemical and thermal evolution of ground water//1st Canadian/American Conf. on Hydrogeology/Ed. B. Hitchon and E. Wallick. Worthington: Publ. Nat. Water Well Assoc. 1984. P. 3—39.
21. Kacimov A. R. Steady two-dimensional flow of ground water to a trench//J. Hydrology. 1991. V. 127. № 1/4. P. 71—83.