

УДК 532.51.031

© 1992 г. Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ, М. В. ЛОТФУЛЛИН,
Д. В. МАКЛАКОВ, А. В. ПОТАШЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ, ОБТЕКАЕМОГО ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД, ПО ЗАДАННОЙ ЭПЮРЕ СКОРОСТЕЙ

В последние годы возросло количество работ, посвященных построению крыловых профилей и профилей лопаток турбомашин, обладающих наперед заданными свойствами (см., например, обзор [1]). Наиболее полно желаемые свойства удается выразить через эпюру скорости $v(s)$, где s — дуговая абсцисса точки искомого контура. Общие методы решения таких задач изложены в монографии [2]. Однако доведение решения до числа сдерживалось трудностями выполнения условий разрешимости: условий замкнутости искомого контура и совпадения величины скорости набегающего потока, определяемой в ходе решения, с заданной. Эффективным способом преодоления этих трудностей является аппарат квазирешений некорректных по Адамару задач. Применение его позволило исследовать большое количество обратных краевых задач аэрогидродинамики для профилей, обтекаемых безграничным потоком. Однако долгое время не удавалось рассмотреть задачи построения профилей вблизи твердой стенки (взлет, посадка) или свободной поверхности (подводное крыло).

В настоящей работе решения для этих режимов находятся как частные случаи более общей обратной задачи обтекания крылового профиля вблизи границы раздела сред. Решение ее основано на модификации итерационного метода, разработанного в [3, 4] для прямой задачи обтекания профиля вблизи границы раздела сред. При этом на каждом шаге итераций применяется аппарат квазирешения. Проведенные расчеты демонстрируют эффективность метода и выявляют влияние линии раздела, твердой стенки и свободной поверхности на геометрические и аэродинамические характеристики искомого профиля.

1. Постановка задачи. В плоскости $z = x + iy$ искомый непроницаемый крыловой профиль L_z обтекается вблизи границы раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей с плотностями ρ^+ и ρ^- и скоростями на бесконечности v_∞^+ и v_∞^- (фиг. 1). Линия раздела l_z является линией тока. Давление при переходе через нее изменяется непрерывно, а скорость терпит тангенциальный разрыв. Из интеграла Бернулли следует, что

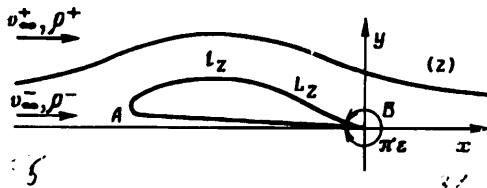
$$\mu \left(\frac{v^+}{v_\infty^+} \right)^2 - \left(\frac{v^-}{v_\infty^-} \right) = \mu - 1, \quad \mu = \frac{\rho^+ (v_\infty^+)^2}{\rho^- (v_\infty^-)^2} \quad (1.1)$$

Здесь v^+ , v^- — граничные значения скорости при подходе к l_z сверху и снизу соответственно, μ — отношение скоростных напоров потоков на бесконечности.

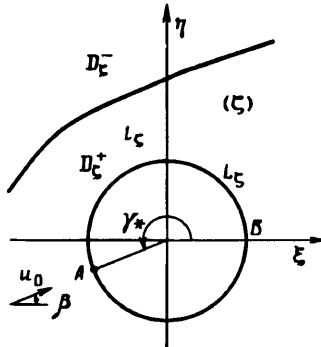
Будем считать, что профиль L_z находится в жидкости с плотностью ρ^- . Пусть L — периметр профиля, s — его дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки схода потока по часовой стрелке, $\sigma = s/L$ — безразмерная дуговая абсцисса. Известна также кусочно-гладкая непрерывная функция $f(\sigma)$, задающая эпюру скоростей на профиле

$$\frac{v(\sigma)}{v_\infty^-} = f(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (1.2)$$

где v — скорость на контуре профиля. Поскольку на профиле имеется всего лишь одна точка разветвления потока A , функция $f(\sigma)$ во внутренних точках интервала $(0, 1)$ обращается в нуль в единственной точке σ_* . В силу выбранного направления обхода профиля $f(\sigma) > 0$ при $\sigma_* < \sigma < 1$, $f(\sigma) < 0$ при $0 < \sigma < \sigma_*$. Поведение $f(\sigma)$



Фиг. 1



Фиг. 2

вблизи задней кромки определяется величиной $\pi \epsilon$ внешнего к профилю угла в точке B . При $\epsilon = 2$ имеем $f(1) = -f(0) > 0$, а при $1 \leq \epsilon < 2$ функция $f(\sigma)$ имеет вид $f(\sigma) \sim -C|\sigma^\circ|^{2/\epsilon}/\sigma^\circ$, где $\sigma^\circ = \sigma$ в окрестности $\sigma = 0$, $\sigma^\circ = \sigma - 1$ в окрестности $\sigma = 1$, $C = \text{const} > 0$.

2. Краевая задача в параметрической плоскости. В плоскости z выберем начало координат в точке схода потока B . Пусть $z = z(\zeta)$ — конформное отображение внешности единичного круга в параметрической плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на внешность профиля, такое, что $z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$ (фиг. 2).

Линии раздела l_z в плоскости ζ соответствует некоторая неизвестная линия l_{ζ} . Обозначим через D_{ζ} область в плоскости ζ , внешнюю к кругу единичного радиуса, а через D_{ζ}^+ и D_{ζ}^- — части области D_{ζ} , лежащие выше и ниже l_{ζ} соответственно. Для фиксации положения профиля по отношению к линии раздела примем, что l_{ζ} проходит через заданную точку $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$.

Введем кусочно-аналитическую в плоскости ζ функцию $\Omega(\zeta)$, терпящую разрыв на l_{ζ} и связанную с комплексным потенциалом течения $w = \varphi + i\psi$ соотношением

$$\frac{dw}{d\zeta} = kv_{\infty}^+ e^{-i\beta} f_0(\zeta) \exp[-\Omega(\zeta)], \quad \zeta \in D_{\zeta}^+ \quad (2.1)$$

$$f_0(\zeta) = [\zeta - \exp(i\gamma_*)] (\zeta - 1) \zeta^{-2}, \quad \beta = \frac{\gamma_* - \pi}{2}, \quad k = |z'(\infty)|$$

где $e^{i\gamma_*}$ — образ точки разветвления потока A . Значения k и γ_* заранее неизвестны и должны определиться в ходе решения задачи.

Учитывая поведение функции $z(\zeta)$ в окрестности угловой точки B ($\zeta = 1$), функцию $dz/d\zeta$ будем искать в виде

$$\frac{dz}{d\zeta} = kf_1(\zeta) e^{-x(\zeta)}, \quad f_1(\zeta) = \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{\epsilon-1} \quad (2.2)$$

Здесь $\chi(\zeta)$ — аналитическая в области D_ζ функция, непрерывная вплоть до границы.

Поставим краевую задачу для определения кусочно-аналитической функции $\Omega(\zeta)$, аналитической функции $\chi(\zeta)$, линии l_ζ и параметров γ, k .

Из условия непротекания контура профиля

$$\operatorname{Re} \left(\zeta \frac{dw}{d\zeta} \right) \Big|_{|\zeta|=1} = 0$$

и (2.1) следует, что

$$\operatorname{Im} \Omega(\zeta) = 0 \text{ при } |\zeta| = 1 \quad (2.3)$$

Условия на бесконечности

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz}(\zeta) = v_\infty^*, \quad \zeta \in D_\zeta^*$$

приводят к равенствам

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\operatorname{Re} \Omega(\zeta)] = 0 \quad (2.4)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\operatorname{Re} \chi(\zeta)] = 0 \quad (2.5)$$

$$\beta + \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\operatorname{Im} \Omega(\zeta)] = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\operatorname{Im} \chi(\zeta)] \quad (2.6)$$

Пусть $q(\gamma) = \operatorname{Re} \Omega(e^{i\gamma})$. Сопоставляя значения φ на контуре как функции аргументов σ и γ , получим

$$\int_{\sigma_*}^{\sigma} f(\sigma) d\sigma = 4 \frac{k}{L} \int_{\gamma_*}^{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma - \gamma_*}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) e^{-q(\gamma)} d\gamma \quad (2.7)$$

Правая часть равенства (2.7) — заданная функция γ . Если предположить, что $q(\gamma)$ известна, то (2.7) определяет зависимость $\sigma(\gamma)$. Поскольку $\sigma(0) = 1, \sigma(2\pi) = 0$, имеем два условия для определения k и γ .

$$\int_{\gamma_*}^0 \sin \left(\frac{\gamma - \gamma_*}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) e^{-q(\gamma)} d\gamma = \frac{\varphi_B^+ 2\pi}{\varphi_B^-} \int_{\gamma_*}^{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma - \gamma_*}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) e^{-q(\gamma)} d\gamma \quad (2.8)$$

$$\frac{4k}{L} \int_{\gamma_*}^0 \sin \left(\frac{\gamma - \gamma_*}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) e^{-q(\gamma)} d\gamma = \varphi_B^+$$

$$\varphi_B^+ = \int_{\sigma_*}^1 f(\sigma) d\sigma, \quad \varphi_B^- = \int_{\sigma}^0 f(\sigma) d\sigma$$

Вводя обозначения $S(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma})$ и используя равенство $\ln dz/d\zeta = \ln dw/d\zeta - \ln dw/dz$, из (2.1), (2.2) и (1.2) получим

$$S(\gamma) = \ln \left\{ \frac{f[\sigma(\gamma)]}{[\sin(\gamma - \gamma_*)/2] [\sin(\gamma/2)]^{2-\epsilon}} \right\} + q(\gamma) \quad (2.9)$$

Условие (2.9) есть условие задачи Шварца в области D_ζ для аналитической функции $\chi(\zeta)$ и, следовательно, $\chi(\zeta)$ можно восстановить по формуле

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau) \frac{\zeta + e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} d\tau + iD \quad (2.10)$$

где D — действительная постоянная.

При отсутствии линии раздела имеем $q(\gamma) = 0$ и тогда формулы (2.10), (2.2) дают известное аналитическое решение задачи о построении крылового профиля в однородном потоке по заданной эпюре скоростей $v(s)$ (см., например, [5]). Функция $q(\gamma) = \operatorname{Re} \Omega(e^{\gamma})$, таким образом, определяет «влияние» линии раздела на решение.

Для отыскания $\Omega(\zeta)$ имеем три дополнительных соотношения на линии скачка l_{ζ}

$$\operatorname{Im} [\Omega^+(t) - \Omega^-(t)] = 0 \quad (2.11)$$

$$\theta = \operatorname{Im} \Omega^-(t) \quad (2.12)$$

$$\mu e^{-2 \operatorname{Re} \Omega^+(t)} - e^{-2 \operatorname{Re} \Omega^-(t)} = (\mu - 1) e^{-2\chi(t)} \left| \frac{f_1(t)}{f_0(t)} \right|^2 \quad (2.13)$$

Здесь $t = \zeta \in l_{\zeta}$; Ω^+ , Ω^- — граничные значения Ω при подходе к l_{ζ} сверху и снизу соответственно, θ — угол наклона касательной к l_{ζ} . Соотношение (2.13) эквивалентно (1.1), условия (2.11), (2.12) отражают тот факт, что l_{ζ} является линией тока.

3. Квазирешение вспомогательной краевой задачи. Сформулируем вспомогательную краевую задачу, решение которой послужит основой построения итерационного процесса для определения l_{ζ} , $\Omega(\zeta)$, $\chi(\zeta)$, k и γ , по краевым условиям (2.3)—(2.9), (2.11)—(2.13).

Пусть l_{ζ} — известный бесконечный контур в области D_{ζ} , переходящий в простой замкнутый контур при преобразовании $\bar{\zeta} = 1/\zeta$. На l_{ζ} задана действительная функция $\lambda(t)$, ($t = \zeta \in l_{\zeta}$), такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$. Требуется определить $\Omega(\zeta)$, $\chi(\zeta)$, k , γ , по краевым условиям (2.3)—(2.9) и соотношению

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \lambda(t), \quad t \in l_{\zeta} \quad (3.1)$$

так, чтобы построенный с использованием формулы (2.2) профиль был ограничен замкнутым контуром.

Отметим, что требование замкнутости контура профиля продиктовано физическими соображениями и весьма существенно для дальнейших рассуждений.

Из (3.1), (2.3), и (2.4) вытекает, что

$$\Omega(\zeta) = \Omega_+(\zeta) + \overline{\Omega_+(1/\bar{\zeta})} - \operatorname{Re} \Omega_+(0) \quad (3.2)$$

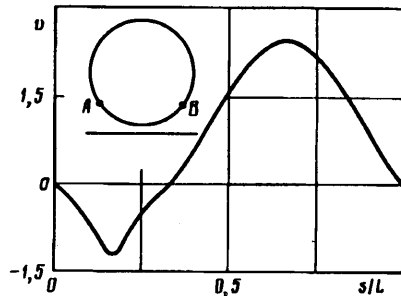
$$\Omega_+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{\zeta}} \frac{\lambda(t) dt}{\zeta - t} \quad (3.3)$$

Таким образом, если $\lambda(t)$, l_{ζ} известны, то $q(\gamma) = \operatorname{Re} \Omega(e^{\gamma})$ — также известная функция. Из (2.7), (2.10) находим γ_* , k , $\sigma(\gamma)$, $\chi(\zeta)$. Действительная постоянная D в (2.10) определяется из условия (2.6)

$$D = \beta - \operatorname{Im} \Omega_+(0) \quad (3.4)$$

Формулы (3.2)—(3.4), (2.10) решают поставленную вспомогательную задачу, однако построенный по (2.2) контур не обязательно будет замкнутым. Кроме того, не выполненным остается условие (2.5), отвечающее за величины скоростей в набегающих потоках. Условия замкнутости

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{dz} (e^{\gamma}) e^{\gamma} d\gamma = 0$$



Фиг. 3

и (2.5) эквивалентны соотношениям

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = (1 - \varepsilon) \pi \quad (3.5)$$

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma = 0 \quad (3.6)$$

которые переопределяют поставленную вспомогательную задачу. Для преодоления этой трудности воспользуемся методом квазирешений обратных краевых задач. Его суть состоит в отыскании функции $S^*(\gamma)$, в определенном смысле максимально близкой к $S(\gamma)$, но такой, что условия (3.5), (3.6) будут выполнены. Функция $S(\gamma)$ заменяется на $S^*(\gamma)$ в формуле (2.10). Тем самым достигается своеобразный компромисс: вытекающие из физических соображений условия (3.5), (3.6) выполнены, а распределение скоростей на профиле близко к заданному. Процедура определения функции $S^*(\gamma)$ описана в [5].

4. Схема итерационного процесса. В построенном решении вспомогательной задачи $\lambda(t)$ и l_ζ полагались произвольными. В силу того, что $\lambda(t)$ действительна, функция $\Omega(t)$ удовлетворяет (2.11). Таким образом, при решении вспомогательной задачи остались неиспользованными условия (2.12), (2.13) общей постановки (2.3)–(2.9), (2.11)–(2.13), которые служат для определения $\lambda(t)$ и l_ζ .

Условие (2.13) запишем в виде

$$\lambda(t) = \Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{\mu} + \frac{\mu - 1}{\mu} e^{2 \operatorname{Re} \Omega^-(t)} F(t) \right], & \mu \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \ln [\mu + (1 - \mu) e^{2 \operatorname{Re} \Omega^+(t)} F(t)], & \mu < 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

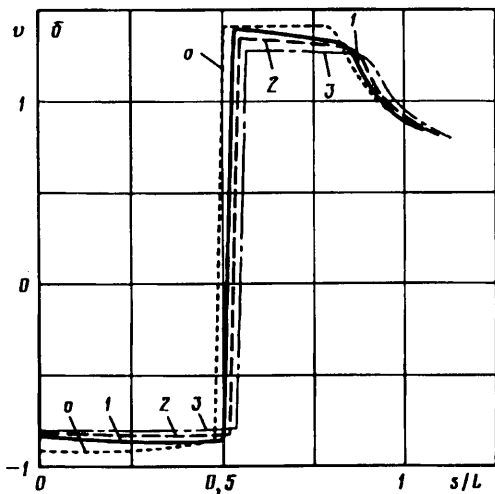
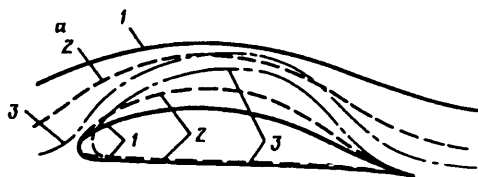
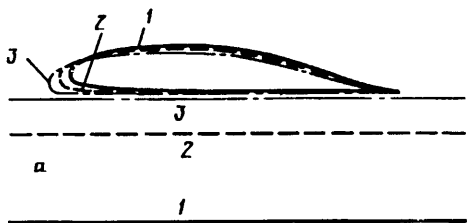
$$F(t) = \left| \frac{f_1(t)}{f_0(t)} \right|^2 e^{2\chi(t)}$$

Выражения под знаком логарифма в (4.1) всегда положительны.

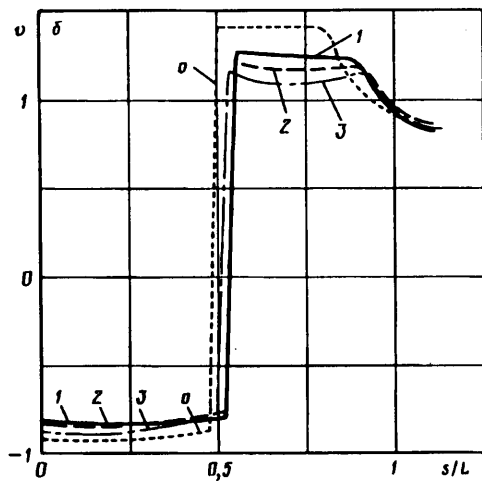
Итерационный процесс для отыскания $\lambda(t)$, l_ζ организуем следующим образом. Зададим функции $\lambda(s)$, $\theta(s)$ ($-\infty < s \leq \infty$, $\lambda(\pm\infty) = 0$), где s — дуговая абсцисса контура l_ζ , отсчитываемая от точки ζ_0 . При этом однозначно определяется контур l_ζ

$$t(s) = \int_0^s e^{\theta(s)} ds + \zeta_0, \quad t \in l_\zeta$$

и функция $\lambda(t)$ на этом контуре. Решая вспомогательную краевую задачу, находим $\Omega(\zeta)$, $\chi(\zeta)$. Подставляя $\Omega^\pm(s) = \Omega^\pm[t(s)]$, $\chi^\pm(s) = \chi^\pm[t(s)]$ в (4.1), (2.12),



Фиг. 4



Фиг. 5

определяем новые функции $\lambda(s), \theta(s)$ и т. д. За нулевое приближение можно взять $\lambda^{(0)}(s) = \theta^{(0)}(s) = 0$.

В результате итерационного процесса будут найдены функции $\Omega(\zeta), \chi(\zeta)$, удовлетворяющие условиям (2.12), (2.13) с любой наперед заданной степенью точности, и, следовательно, построено течение около замкнутого профиля, движущегося вблизи границы раздела сред, распределение скорости на котором близко к заданному.

Важно отметить два частных случая, вытекающих из изложенного: решение задач о нахождении формы контура профиля, движущегося под свободной поверхностью невесомой жидкости, и при движении профиля над прямолинейной твердой стенкой. Первый случай соответствует $\mu = 0$, второй — $\mu = \infty$.

5. Результаты численных расчетов. Предложенное решение было реализовано в виде вычислительного алгоритма и программы на языке FORTRAN для ЭВМ серии ЕС и типа PC/AT. Для проверки работоспособности программы был проведен тестовый расчет, состоящий в следующем. В качестве функции $f(\sigma)$ бралось рассчитанное по аналитическим формулам распределение скорости (фиг. 3) на контуре окружности радиуса r при циркуляционном обтекании ее потоком жидкости над горизонтальной стенкой, расположенной на расстоянии $1,1r$ от центра окружности (фиг. 3). Положение точки ζ_0 на линии l_ζ задавалось в виде $\zeta_0 = 1,1ie^{i\beta}$, где $\beta = -\pi/6$ — заданная угловая координата точки B в плоскости z . Построенные в результате расчетов контур и твердая стенка совпали соответственно с окружностью и горизонтальной прямой. Максимальная погрешность в вычислении координат контура и стенки не превысила 0,3% радиуса r .

Целью следующих расчетов ставилось исследование влияния положения линии

N	η_0	T/L	$t', \%$	α°	C_y
$\mu = \infty$					
1	2,0	0,199	13,10	3,28	0,784
2	1,25	0,062	12,79	2,65	0,754
3	1,03125	0,009	11,32	1,78	0,725
$\mu = 0$					
1	1,5	0,126	16,58	5,20	0,631
2	1,25	0,063	21,62	5,98	0,517
3	1,125	0,027	29,39	6,42	0,369

раздела при различных значениях μ на форму искомого профиля, получаемого при одном и том же распределении $v(s)$. При $0 < \mu < 1$ полученные результаты занимают промежуточное положение между результатами для $\mu = 0$ (свободная поверхность) и $\mu = 1$ (однородный поток), а для $\mu > 1$ — между $\mu = 1$ и $\mu = \infty$ (твердая стенка). Поэтому приведем лишь результаты для предельных значений ($\mu = 0$ и ∞) как наиболее характерные.

На фиг. 4 и в таблице представлены результаты расчетов при наличии горизонтальной стенки ($\mu = \infty$). В качестве исходного бралось распределение скорости, изображенное кривой o на фиг. 4, б. Положение точки ξ_0 в плоскости ξ задавалось в виде $\xi_0 = i\eta_0$. На фиг. 4, а показаны профили и соответствующие им стенки (кривые 1—3), полученные при $\eta_0 = 2, 1,25$ и $1,03125$. Так как в процессе решения для выполнения условий (3.5), (3.6) применялся метод квази-решений, то распределения скоростей на полученных профилях (кривые 1—3 на фиг. 4, б) изменились по сравнению с заданным.

Геометрические и аэродинамические характеристики представлены в таблице, где T — расстояние от задней кромки профиля до стенки, t' — относительная толщина профиля, α — угол атаки, C_y — коэффициент подъемной силы.

Из анализа полученных результатов видно, что при приближении профиля к стенке происходит уменьшение его толщины и увеличение хорды, за счет чего C_y несколько убывает. Угол атаки также уменьшается.

На фиг. 5 и в таблице приведены результаты расчетов в случае движения профиля под свободной поверхностью ($\mu = 0$), причем исходное распределение скорости бралось таким же, как и в расчетах с $\mu = \infty$ (кривая o на фиг. 4, б и 5, б).

Из результатов расчетов видно, что наличие свободной поверхности оказывает более сильное влияние на форму профиля, чем наличие твердой стенки. При уменьшении T (здесь под T понимается расстояние по вертикали от задней кромки профиля до свободной поверхности) происходит значительное утолщение профиля с одновременным понижением уровня скорости на верхней поверхности, что приводит к значительному понижению величины C_y . Угол атаки при этом растет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. Т. 23. М., 1989. С. 3—115.
2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
3. Маклаков Д. В. Нелинейная задача о движении профиля произвольной формы вблизи границы раздела двух сред разной плотности // Тр. семинара по краев. задачам. Вып. 21. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1984. С. 126—133.
4. Маклаков Д. В. О существовании решения задачи о движении профиля произвольной формы в потоке двухслойной жидкости // Изв. вузов. Математика. 1985. № 6. С. 30—36.
5. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крыловых профилей методом квази-решений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 5—13.