

УДК 532.59

© 1992 г. А. В. МАРЧЕНКО

О РАСЧЕТЕ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИКРОМОЧНОЙ ЗОНЕ МОРСКОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

В работе изучаются стационарные ветровые течения в океане вблизи кромки ледяного покрова, моделирующего твердой крышкой. Характерные горизонтальные масштабы задачи — несколько десятков километров. В этом случае в зависимости от глубины и вязкости жидкости влияние силы Кориолиса на ее движение может быть сравнимо с влиянием касательных ветровых напряжений, приложенных к свободной ото льда поверхности жидкости. Учет силы Кориолиса приводит к формированию спиральной структуры течений в вертикальном направлении.

Граничные условия на поверхности жидкости имеют скачок в точке, соответствующей кромке льда, поэтому для построения аналитического решения задачи используется метод Винера — Хопфа [1]. Основная трудность при реализации метода заключается в факторизации матрицы 2×2 , состоящей из коэффициентов в Фурье-интегралах от напряжений и скоростей на поверхности жидкости. В двух асимптотических случаях, соответствующих глубокой и мелкой жидкостям, факторизацию удастся провести и решение получается в аналитической форме. Найденные решения согласуются с основными положениями теории Экмана [2].

1. Рассматривается слой вязкой жидкости глубины H , находящийся на вращающейся с частотой f горизонтальной плоскости. Линеаризованные уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности для стационарных движений, зависящих от вертикальной координаты z и горизонтальной координаты x , записываются в виде [3]

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (1.1)$$

$$fu = \nu \Delta v, \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Здесь u , v и w — горизонтальные и вертикальная составляющие скорости частиц жидкости соответственно, p и ρ — давление и плотность жидкости, ν — коэффициент вязкости.

Предполагается, что часть поверхности жидкости Ω_i находится под вращающейся с частотой f твердой крышкой, моделирующей ледяной покров. Движение жидкости вызывается ветровыми напряжениями на свободной ото льда поверхности жидкости Ω_w .

Расположим начало координат на дне. Граничные условия для (1.1) записываются в виде [4]

$$u = v = w = 0, \quad z = 0; \quad w = 0, \quad z = H \quad (1.2)$$

$$u = v = 0, \quad z = H, \quad x \in \Omega_i \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= C_w \rho_a V V_x, \quad \sigma_{yz} = C_w \rho_a V V_y, \quad z = H, \quad x \in \Omega_w \\ \sigma_{zz} &= -p_a = \text{const}, \quad z = H, \quad x \in \Omega_w \\ \sigma_{zz} &= -p_a - \rho_l h = \text{const}, \quad z = H, \quad x \in \Omega_l\end{aligned}\tag{1.4}$$

Здесь $V = (V_x, V_y)$ — скорость ветра, C_w и ρ_a — коэффициент турбулентного трения ветра о воду и плотность воздуха, p_a — атмосферное давление, ρ_l и h — плотность ледяного покрова и его толщина. Компоненты напряжений при $z = H$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \rho v \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma_{yz} = \rho v \frac{\partial v}{\partial z} \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\rho v \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Исключая давление из (1.1) и вводя функцию тока, имеем

$$\begin{aligned}\Delta^2 \psi &= -\frac{f}{\nu} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Delta v = \frac{f}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Граничными условиями для (1.6) являются (1.2), (1.3). Условия (1.4) нужны для определения давления после нахождения поля скоростей из (1.2), (1.3), (1.6).

Из (1.2) и уравнения неразрывности следует выражение для расхода жидкости в направлении x

$$Q_x = \int_0^H u dz = \psi|_0^H = \text{const}\tag{1.7}$$

Решения (1.2), (1.3), (1.6), зависящие только от z , имеют вид

$$u + iv = [\sigma \text{sh}(\lambda z) + i\lambda v_0 (\text{ch}(\lambda H) - \text{ch}(\lambda(H-z)))] (\lambda \text{ch} \lambda H)^{-1}\tag{1.8}$$

$$\lambda = e^{\pi/4} h_E^{-1}, \quad h_E = \sqrt{\frac{\nu}{f}}, \quad \sigma = \sigma_x + i\sigma_y,$$

$$\sigma_{x,y}(V) = \frac{C_w \rho_a V}{\rho \nu} V_{x,y}, \quad V_{x,y} = \text{const}$$

$$v_0 = \text{const}$$

Решение (1.8) зависит от произвольной действительной постоянной v_0 . Полагая $Q_x = 0$, из (1.7), (1.8) находим

$$v_0 = -\frac{\text{Re} [\sigma (1 - \text{ch}(\lambda H)) / (\lambda^2 \text{ch}(\lambda H))]}{\text{Re} [i\lambda (\lambda H \text{ch}(\lambda H) - \text{sh}(\lambda H)) / (\lambda^2 \text{ch}(\lambda H))]}\tag{1.9}$$

Решение (1.8), (1.9), как будет видно их дальнейшего, соответствует асимптотике решений (1.2), (1.3), (1.6), описывающих движения жидкости под влиянием постоянного ветра с нулевым расходом вдоль оси x . Такие движения возникают, например, при $\Omega_l = (0, \infty)$, $x \rightarrow -\infty$.

Переходя к пределу $f \rightarrow 0$, из (1.8), (1.9) находим

$$u + iv = i\sigma_y z + \frac{\sigma_x z}{4H} \left(\frac{3z}{H} - 2 \right)$$

$$v_0 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_x y}{fH} \quad (1.10)$$

Формула (1.10) описывает течение в невращающейся жидкости с нулевым расходом Q_x при постоянном напряжении трения (σ_x, σ_y) на свободной поверхности жидкости.

При $v_0 = 0$ выражение (1.8) является известным спиральным решением Экмана [2], которое при $f \rightarrow 0$ переходит в линейный профиль $u + iv = \sigma z$. При $z \rightarrow H$, $H \rightarrow \infty$ выражение (1.8), (1.9) стремится к решению Экмана для бесконечно глубокой жидкости

$$u + iv = \frac{\sigma}{\lambda} e^{\lambda z'}, \quad z' = z - H \ll H$$

При $\varepsilon = H/h_E \ll 1$ вращение жидкости слабо влияет на поле скоростей в ней. Скорость течения на поверхности жидкости при $z = H$ равна

$$u + iv = h_E \sigma (1 + O(\varepsilon^3))$$

При $\varepsilon \gg 1$ вращение сильно влияет на движение жидкости. Характерным пространственным масштабом движения при этом является глубина Экмана h_E . Угол между скоростью ветра и скоростью течения жидкости на ее поверхности равен 45° при $H \rightarrow \infty$.

2. Предположим, что $\varepsilon \ll 1$. Выбирая в качестве характерного масштаба длины H , запишем (1.6) в безразмерной форме

$$\Delta^2 \psi = -\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Delta v = \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.1)$$

Здесь в качестве характерной величины скорости принято $H\sigma/\nu$, где $\sigma = O(\sigma_{x,y})$. Рассмотрим случай, когда при $x > 0$ жидкость находится под ледяным покровом ($\Omega_i = (0, \infty)$). Движение жидкости вызывается экспоненциально затухающим при удалении от кромки льда ветром

$$V_{x,y} = V_{x,y}^0 e^{\beta x/l}, \quad \beta = \frac{H}{l} \quad (2.2)$$

где l — характерный горизонтальный масштаб затухания ветра.

Граничные условия для (2.1) вытекают из (1.2), (1.3), (2.2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = v = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad z = 1 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = v = 0, \quad z = 1, \quad x > 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \alpha_1 e^{\beta x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha_2 e^{\beta x}, \quad z = 1, \quad x < 0$$

$$\alpha_{1,2} = \sigma_{x,y} (V^0) H / (\nu \rho)$$

Решение (2.1), (2.2), (2.4) ищется в приближенной форме

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon^2 \psi_1 + O(\varepsilon^3), \quad v = v_0 + \varepsilon^2 v_1 + O(\varepsilon^3) \quad (2.5)$$

Функции ψ_0, v_0 являются точными решениями линеаризованной задачи о движении невращающейся ($f \equiv 0$) вязкой жидкости под влиянием ветра (2.2) при $\Omega_i = (0, \infty)$.

Подставляя (2.5) в (2.1), находим

$$\Delta^2 \psi_0 = \Delta v_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta^2 \psi_1 = -\frac{\partial v_0}{\partial z}, \quad \Delta v = \frac{\partial \psi_0}{\partial z}$$

Решение (2.3), (2.5), (2.6) представляется в форме интегралов Фурье

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \psi_f(k, z) dk, \quad v = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} v_f(k, z) dk \quad (2.7)$$

$$\psi_f = \psi_1(k) f_1(k, z) + \varepsilon^2 \psi_2(k) f_2(k, z)$$

$$v_f = \psi_2(k) g_2(k, z) + \varepsilon^2 \psi_1(k) g_1(k, z)$$

$$f_1 = FG, \quad f_2 = \frac{z}{8k} F \left(\frac{\text{th}(kz)}{\text{th} k} - z \right)$$

$$g_1 = \frac{z}{4} F \left(G + \frac{k - \text{th} k}{k \text{th} k} \right), \quad g_2 = \frac{\text{sh}(kz)}{\text{ch} k}$$

$$F = \frac{\text{ch}(kz)}{\text{ch} k}, \quad G = \frac{A(k, z)}{\text{sh} k \text{ch}(kz)}$$

$$A = (1 - z) \text{sh} k \text{sh}(kz) - zk \text{sh}(k(1 - z))$$

Из (2.7) следует, что $f_{1,2} = 0$ при $z = 0, 1$. Поэтому из (1.7) вытекает, что $Q_x = 0$. Это справедливо при любых граничных условиях (1.3) и областях Ω_i для движений, затухающих при $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$, если интегралы (2.7) сходятся.

Граничные условия (2.4) удовлетворятся, если положить

$$\alpha \psi = \frac{\gamma}{k + i\beta} \Phi^-, \quad \beta \psi = \Phi^+ \quad (2.8)$$

$$\psi = (\psi_j), \quad \Phi^\pm = (\Phi_j^\pm), \quad \gamma = (\delta_{jl} \gamma_j)$$

$$\alpha = ||\varepsilon^{2|j-l} \alpha_{jl}||, \quad \beta = ||\varepsilon^{2|j-l} \beta_{jl}||$$

$$\gamma_j = -\alpha_j (2\pi i \Phi_j^- (-i\beta))^{-1}$$

$$\alpha_{lj} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial z^2}, \quad \alpha_{2j} = \frac{\partial g_j}{\partial z}, \quad \beta_{lj} = \frac{\partial f_j}{\partial z}, \quad \beta_{2j} = g_j, \quad z = 1$$

Здесь и далее полагается $(j, l) = (1, 2)$.

Функции Φ_j^+ и Φ_j^- аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного k . Из (2.7), (2.8) следует асимптотика при $|k| \rightarrow \infty$

$$|\psi_j| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \delta > 0 \quad (2.9)$$

$$|\Phi_j^-| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \text{Im} k < 0$$

$$|\Phi_j^+| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \text{Im} k > 0$$

Из (2.8) вытекает задача сопряжения [5] для двух функций $\Phi_j(k)$, связанных на действительной оси k соотношениями

$$\lambda \Phi^+ = \frac{\gamma}{k + i\beta} \Phi^- \quad (2.10)$$

$$\lambda = \alpha \beta^{-1}; \quad \Phi_j \rightarrow \Phi_j^\pm, \quad \text{Im} k \rightarrow \pm 0$$

Факторизация матрицы λ проводится с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$\lambda = \lambda^{-\lambda^+}, \quad \lambda^\pm = ||\varepsilon^{2l/l-1}\lambda_{jj}^\pm|| \quad (2.11)$$

$$\lambda_{jj}^\pm(k) = 2^{1-l/2} \sqrt{k \pm i\Delta} e^{\pm i\pi/4} g_j^\pm(k) \\ \text{Im } \Delta = 0, \quad \Delta > 0$$

$$g_j^\pm(k) = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_{jj}(t) 2^{j-2}}{\sqrt{t^2 + \Delta^2}} \right) \frac{dt}{t-k} \right]$$

$$\lambda_{jj}^+ = \Lambda_{jj} \lambda_{jj}^+, \quad \lambda_{jj}^- = -\Lambda_{jj} \lambda_{jj}^-, \quad j \neq l$$

$$\Lambda_{jj}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{jj}(t) \lambda_{jj}^+(t)}{\lambda_{jj}^-(t) \lambda_{jj}^+(t)} \frac{dt}{t-k}$$

Из (2.11) следует

$$|g_j^\pm(k)| = O(1), \quad |k| \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

$$\lambda_{11}^-(0) = \lambda_{11}^+(0) = 2, \quad \lambda_{22}^-(0) = \lambda_{22}^+(0) = 1$$

Подставляя (2.11) в (2.8) и учитывая (2.9), (2.12), по теореме Лиувилля находим

$$(k + i\beta) \lambda^+ \Phi^+ = C, \quad \gamma \Phi^- = \lambda^- C \quad (2.13)$$

$$C = (C_j), \quad C_j = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^2 (\lambda^-(-i\beta))_{jl}^{-1} \alpha_l$$

Подставляя (2.12) в (2.8) и затем в (2.7), получаем

$$\psi_j = \psi_j^0 + \varepsilon^2 \psi_j^1, \quad v_j = v_j^0 + \varepsilon^2 v_j^1 \quad (2.14)$$

$$\psi_j^0 = -\alpha_1 f_1 (\lambda_{11}^+ \beta_{11} r_1)^{-1}$$

$$v_j^0 = -\alpha_2 g_2 (\lambda_{22}^+ \beta_{22} r_2)^{-1}$$

$$\psi_j^1 = \alpha_2 \left[\frac{f_1}{\lambda_{11}^+} (\Lambda_{12} - \Lambda_{12}(-i\beta)) - \frac{\beta_{11} f_2 - \beta_{12} f_1}{\lambda_{22}^+ \beta_{22}} \right] (\beta_{11} r_2)^{-1}$$

$$v_j^1 = \alpha_1 \left[\frac{g_2}{\lambda_{22}^+} (\Lambda_{21} - \Lambda_{21}(-i\beta)) - \frac{\beta_{22} g_1 - \beta_{21} g_2}{\lambda_{11}^+ \beta_{11}} \right] (\beta_{22} r_1)^{-1}$$

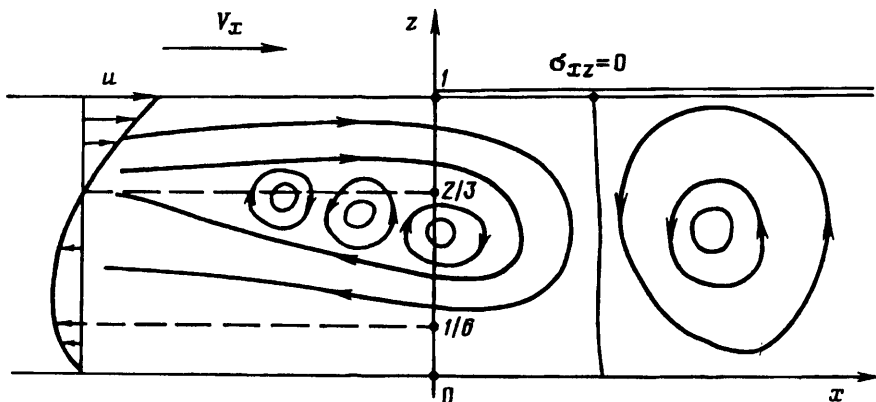
$$r_j = 2\pi i \lambda_{jj}^-(-i\beta) (k + i\beta)$$

Интегралы в (2.7) могут быть вычислены по вычетам выражений (2.14). Функции $\Phi_j^{0,1}$, $v_j^{0,1}$ имеют полюсы в комплексной плоскости k в чисто мнимых точках $k = in\pi$, $i\pi(n + 1/2)$, $-i\beta$ и в комплексных точках $k = \zeta_n$, ξ_n , $\zeta_n/2$. Величины ζ_n и ξ_n являются корнями уравнений $k = \text{sh } k$ и $k = -\text{sh } k$ соответственно.

Часть решения, соответствующая чисто мнимым полюсам, описывает экспоненциально убывающее при $|x| \rightarrow \infty$ течение. Часть решения, соответствующая полюсам ζ_n , ξ_n , $\zeta_n/2$, описывает вихри, интенсивность которых экспоненциально стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Приведем решение при $\varepsilon = 0$

$$\psi = -\frac{\alpha_1}{2\pi i \lambda_{11}^-(-i\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(k, z) e^{\mu x} dk}{\lambda_{11}^+(k) (k^2 - \text{sh}^2 k) (k + i\beta)} \\ v = -\frac{\alpha_2}{2\pi i \lambda_{22}^-(-i\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } k z e^{\mu x} dk}{\lambda_{22}^+(k) \text{sh } K (k + i\beta)}$$



Фиг. 1

Вычисляя интегралы по вычетам и затем переходя к пределу при $\beta \rightarrow 0$, находим

$$\psi = \psi_s^\circ + \alpha_1 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\lambda_{11}^-(\xi_n/2) A(\xi_n/2, z) e^{\xi_n x/2}}{\xi_n^2 (1 - \text{ch } \xi_n)} \quad (2.15)$$

$$v = v_s^\circ - \frac{4\alpha_2}{\pi^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\lambda_{22}^-(i\gamma_n) \sin(\gamma_n z)}{(2n+1)^2} (-1)^n e^{-\gamma_n x}, \quad x < 0$$

$$\psi = \frac{\alpha_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [-B^+(\xi_n, z) e^{\xi_n x} + B^-(\xi_n, z) e^{\xi_n x}] \quad (2.16)$$

$$v = -\frac{\alpha_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\theta_n z)}{\lambda_{22}^+(i\theta_n) n} (-1)^n e^{-\theta_n x}, \quad x > 0$$

$$\psi_s^\circ = \frac{\alpha_1}{4} z^2 (z-1), \quad v_s^\circ = \alpha_2 z, \quad \theta_n = n\pi$$

$$\gamma_n = \theta_n + \frac{\pi}{2}, \quad \text{sign}(n \text{ Im}(\xi_n, \xi_n)) = 1$$

$$B^\pm(k, z) = \frac{(1-z) \text{sh } kz \mp z \text{sh}(k(1-z))}{\lambda_{11}^+(k) k (1 \pm \text{ch}(kz))}$$

Отсюда следует, что

$$\psi = 0, \quad z = 0, 1; \quad \text{sign} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \text{sign } V_x, \quad z = 0, \quad x < 0$$

При $x \rightarrow -\infty$ выполняется $\psi \rightarrow \psi_s^\circ$, $v \rightarrow v_s^\circ$. Функции ψ_s° , v_s° в размерном виде описываются формулами (1.10). Примерный вид линий тока приведен на фиг. 1. Профиль скоростей $u = \partial \psi / \partial z$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет вид (фиг. 1)

$$u = 1/4 \alpha_1 z (3z - 2)$$

Влияние ледяного покрова при $x > 0$ проявляется при $x \rightarrow -\infty$ в том, что скорость жидкости u на поверхности $z=1$ в 4 раза меньше поверхностной скорости течения в жидкости без ледяного покрова при одинаковом ветре. При $z \in (0, 2/3)$ направление течения противоположно направлению ветра, при $z \in (2/3, 1)$ направление ветра и течения совпадает.

Для исследования влияния вращения рассмотрим часть решения (2.7), (2.15),

соответствующую вычету $k = -i\beta$ при $\varepsilon \neq 0$. При $\beta \rightarrow 0$, $x \rightarrow -\infty$ находим асимптотические формулы

$$\psi = \psi_s^\circ + \varepsilon^2 \psi_s^1, \quad v = v_s^\circ + \varepsilon^2 v_s^1$$

$$\psi_s^1 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\alpha_2 \frac{\beta_{11} f_2 - \beta_{12} f_1}{\beta_{11} \beta_{22} \lambda_{22}} \Big|_{k=-i\beta} \right] = -\frac{\alpha_2}{24} z^2 (1-z)^2$$

$$v_s^1 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\alpha_1 \frac{\beta_{22} g_1 - \beta_{21} g_2}{\beta_{11} \beta_{22} \lambda_{11}} \Big|_{k=-i\beta} \right] = \frac{\alpha_1}{48} z (z-1) (1+z-3z^2)$$

При $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ учет вращения приводит к возникновению течения, параллельного кромке льда. Его скорость v_s^1 меняет знак при $z = z_0 = (1 + \sqrt{13})/6$ и обращается в нуль при $z = 0, z_0, 1$. При $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ влияние вращения проявляется в возникновении течения, перпендикулярного к кромке льда. Это течение описывается функцией тока ψ_s^1 , обращается в нуль при $z = 0, 1/2, 1$, имеет максимальную и минимальную скорости при $z = (1 + \sqrt{3})/(2\sqrt{3})$ и $z = (\sqrt{3} - 1)/(2\sqrt{3})$ соответственно.

Исследуем поле напряжений, действующих со стороны жидкости на ледяной покров. Из (1.5), (2.14) находим Фурье-образы $\sigma_{f,xz}$, $\sigma_{f,yz}$ безразмерных величин σ_{xz} , σ_{yz}

$$\sigma_{f,xz} = \sigma_{f,xz}^\circ + \varepsilon^2 \sigma_{f,xz}^1 \quad (2.17)$$

$$\sigma_{f,yz} = \sigma_{f,yz}^\circ + \varepsilon^2 \sigma_{f,yz}^1$$

$$\sigma_{f,xz}^\circ = -\alpha \lambda_{11}^- r_1^{-1}, \quad \sigma_{f,yz}^\circ = -\alpha \lambda_{22}^- r_2^{-1}$$

$$\sigma_{f,xz}^1 = \alpha \lambda_{11}^- (\Lambda_{12} - \Lambda_{12}(-i\beta)) r_1^{-1}$$

$$\sigma_{f,yz}^1 = \alpha \lambda_{22}^- (\Lambda_{21} - \Lambda_{21}(-i\beta)) r_1^{-1}$$

Функции $\sigma_{f,xz}^{0,1}$ и $\sigma_{f,yz}^{0,1}$ имеют при $\text{Im } k > 0$ полюсы в точках ζ_n , ξ_n и *ипл* соответственно. Наличие комплексных полюсов ζ_n , ξ_n приводит к осциллирующему поведению поля напряжения σ_{xz} при $z = 0$, $x > 0$. В точках $\sigma_{xz} = 0$ находятся зоны конвергенции частиц жидкости, где течение стремится собрать лед. Поле напряжений σ_{yz} осцилляций не имеет.

Из (2.16), (2.17) следует, что функция σ_{xz} , σ_{yz} , $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ имеют скачок при $x = 0$, $z = 1$. Поэтому вблизи кромки льда линеаризация уравнений Навье — Стокса теряет смысл и необходимо учитывать нелинейные эффекты.

3. Рассмотрим жидкость большой глубины $H \gg h_E$ ($\varepsilon \gg 1$), находящуюся при $x > 0$ под ледяным покровом. Выберем в качестве характерного масштаба длины h_E и сделаем дополнительное предположение о том, что давление в жидкости мало отличается от гидростатического. Это выполняется, если вторые производные по координатам от вертикальной скорости частиц жидкости малы по сравнению с силой тяжести, т. е. выполняется $\sigma/(gh_E \rho) \ll 1$. Из (1.1) в этом случае следует

$$\Delta u = -v, \quad \Delta v = u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Рассматриваются решения (3.1), затухающие при $z \rightarrow -\infty$. Граничные условия для (3.1) следуют из (1.2), (1.3), (2.2)

$$(u, v) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (3.2)$$

$$u = v = w = 0, \quad z = 0, \quad x > 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_1 e^{\beta z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha_2 e^{\beta z}, \quad x < 0, \quad z = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \sigma_{x,y} (V^0) h_E / (v\rho), \quad \beta = h_E / l$$

Решение (3.1), (3.2) представим в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (u_1 e^{\lambda_1 z} + u_2 e^{\lambda_2 z}) dk \quad (3.4)$$

$$v = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (u_1 e^{\lambda_1 z} - u_2 e^{\lambda_2 z}) dk$$

$$\lambda_j = \alpha_j^+ \alpha_j^-, \quad \alpha_1^\pm = \sqrt{k \mp \exp(-i\frac{\pi}{4})}, \quad \alpha_2^\pm = \sqrt{k \pm \exp(i\frac{\pi}{4})}$$

Функции α_j^+ и α_j^- определены на двухлистной римановой поверхности и аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях k соответственно. Выбирается лист, на котором выполняется $\text{Re } \alpha_j^\pm > 0$ при $\text{Im } k = 0$.

Граничные условия (3.3) удовлетворятся, если положить

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \frac{\gamma_1}{k + i\beta} \Phi_1^- \quad (3.5)$$

$$\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 = \frac{i\gamma_2}{k + i\beta} \Phi_2^-$$

$$u_1 + u_2 = \Phi_1^+, \quad u_1 - u_2 = i\Phi_2^+$$

Здесь γ_j определены в (2.8), функции Φ_j^+ и Φ_j^- аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях k соответственно.

Из условия сходимости интегралов в (3.4) и (3.5) при $|k| \rightarrow \infty$ следует

$$|u_j| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \delta > 0 \quad (3.6)$$

$$|\Phi_j^-| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \text{Im } k < 0; \quad |\Phi_j^+| = O(|k|^{-1-\delta}), \quad \text{Im } k > 0$$

Уравнения (3.5) сводятся к однородным задачам сопряжения на действительной оси

$$(k + i\beta) \lambda_j F_j^+ = F_j^-, \quad j = 1, 2 \quad (3.7)$$

$$F_j^- = \gamma_1 \Phi_1^- - (-1)^j \gamma_2 \Phi_2^-, \quad F_j^+ = \Phi_1^+ - (-1)^j \Phi_2^+$$

Из (3.6), (3.7) по теореме Лиувилля находим

$$(k + i\beta) \alpha_j^+ F_j^+ = C_j, \quad F_j^- = C_j \alpha_j^- \quad (3.8)$$

$$C_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{\alpha_1 - i(-1)^j \alpha_2}{\alpha_j(-i\beta)}$$

Из (3.5), (3.7), (3.8) находим

$$u_j = \frac{C_j}{2\alpha_j(k)(k + i\beta)} \quad (3.9)$$

Поле скоростей находится после подстановки (3.9) в (3.4)

$$u + iv = -\frac{\alpha}{2\pi i \alpha_1^- (-i\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx + \lambda_1(k)z}}{\alpha_1^+(k) (k + i\beta)} dk \quad (3.10)$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$$

Исследуем поля скоростей на поверхности жидкости при $x < 0$ и напряжений, действующих со стороны жидкости на ледяной покров при $x > 0$, в предельном случае $\beta \rightarrow 0$. Из (1.5), (3.10) имеем в безразмерной форме

$$u + iv = \alpha e^{-\pi x/4} - \frac{2\alpha}{\pi} \exp \left[e^{\pi x/4} x - i \frac{\pi}{8} \right] \int_0^{\infty} \frac{e^{t^2 x}}{P(t)} dt \quad x < 0, \quad z = 0 \quad (3.11)$$

$$\sigma_{xx} + i\sigma_{yz} = \frac{2\alpha}{\pi} \exp \left[-e^{\pi x/4} x - i \frac{\pi}{8} \right] \int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{P(t)} dt \quad x > 0, \quad z = 0$$

$$P(t) = t^2 + e^{\pi x/4}$$

Из (3.11) следует, что при $x \rightarrow -\infty$ поле скоростей на поверхности жидкости такое же, как при течении Экмана (1.7). Поле скоростей u, v имеет осциллирующий характер в направлении x . Поле напряжений имеет осциллирующий характер вдоль оси x и экспоненциально затухает при $x \rightarrow \infty$. Период колебаний напряжений и скоростей равен $2\sqrt{2}\pi$. Скорости u, v непрерывны при $z = 0$, производные $\partial u/\partial x, \partial v/\partial x$ имеют скачки при $z = x = 0$. Аналогично разд. 2 линеаризация уравнений Навье — Стокса теряет смысл вблизи кромки льда.

4. Рассмотрим бесконечно глубокую невращающуюся жидкость. Начало координат расположено на поверхности жидкости. Из (1.1), (1.2), (1.3) следует

$$\Delta^2 \psi = \Delta v = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad z = 0, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad x \in \Omega_l, \quad z = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \sigma_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \sigma_y, \quad x \in \Omega_w, \quad z = 0$$

Если выполняется $\partial \psi/\partial z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, то справедливо представление

$$\psi = z\varphi, \quad \Delta \varphi = 0 \quad (4.3)$$

Пусть $\Omega_l = (0, \infty)$ и ветер определяется формулами (2.2), где в размерном виде надо положить $\beta = 1/l$. Решение этой задачи находится аналогично разд. 1, 2 и имеет вид

$$u = -z \frac{\sigma_x(V^0)}{\beta} \Lambda_1(\xi) \quad (4.4)$$

$$v = -\frac{\sigma_y(V^0)}{\beta} \Lambda_1(\xi)$$

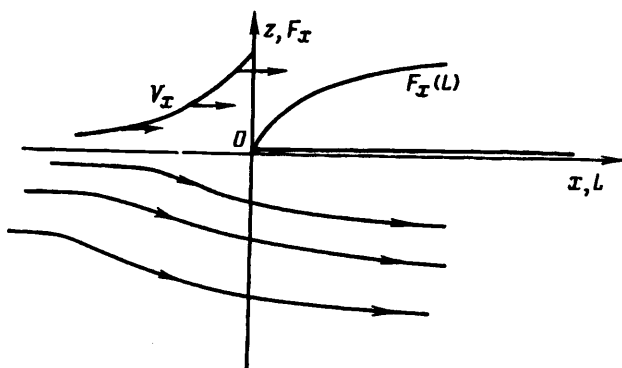
$$\Lambda_1(\xi) = \text{Im} [e^{i\beta} (1 - \Phi(\sqrt{\xi\beta}))]$$

$$\xi = x - iz, \quad \Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

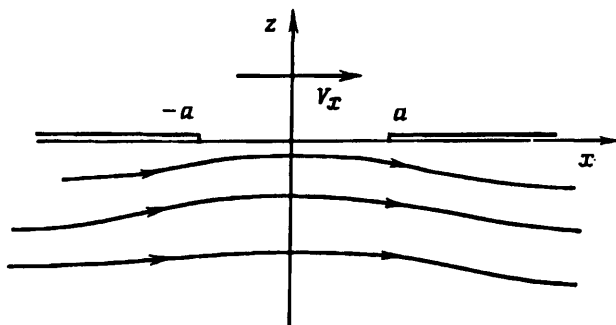
Линии тока ψ представлены на фиг. 2. Используя асимптотические представления для $\Phi(\alpha)$, имеем [6]

$$(u, v) \approx \frac{2\sigma_{xy}(V^0)}{\sqrt{\pi}\beta} \sqrt{|x|}, \quad |\beta x| \ll 1, \quad x < 0, \quad z = 0$$

$$(u, v) \approx \frac{\sigma_{xy}(V^0)}{\beta \sqrt{\pi}\beta |x|}, \quad \beta x \rightarrow -\infty, \quad z = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Сила, действующая со стороны течения на полосу льда $(0, L)$ ширины $L > 0$, равна $F = (F_x, F_y)$

$$F_{x,y}(L) = - \int_0^L (\sigma_{xz}, \sigma_{yz})|_{z=0} dx = \frac{\rho v \sigma_{x,y}(V^0)}{2\beta} [1 - 4e^{\beta L} (1 - \Phi(\sqrt{\beta L}))]$$

$$F_{x,y} \approx \frac{\rho v \sigma_{x,y}(V^0)}{2\beta} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{\pi\beta L}}\right), \beta L \gg 1$$

Отметим, что в данной задаче расход $Q_x = \text{const} \neq 0$.

Пусть $\Omega_w = (-a, a)$ и $V_{x,y} = \text{const}$. В этом случае решение задачи (4.1), (4.2) с учетом (4.3) сводится к решению задачи об ударе пластинки о воду [6] и имеет вид

$$\psi = z \text{Im} [\sigma_x(V) \Lambda_2(\zeta)], \quad v = \text{Im} [\sigma_y(V) \Lambda_2(\zeta)]$$

$$\Lambda_2 = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2}, \quad \zeta = x + iz$$

Распределение скоростей u, v при $z = 0, x \in \Omega_w$ дается формулами

$$(u, v) = \sigma_{x,y}(V) \sqrt{a^2 - x^2}$$

Линии тока ψ представлены на фиг. 3 и имеют при $|x| \rightarrow \infty$ асимптотыку $z = \text{const}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
2. Каменкович В. М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 240 с.
3. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 304 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.