

УДК 532.546

© 1992 г. М. Б. ПАНФИЛОВ

СТРУКТУРНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ¹

Рассматривается проблема построения макроскопических аналогов для уравнений, описывающих процессы в неоднородных пористых средах. Классические результаты теории относятся к случаю, когда процедура осреднения приводит к сглаживанию коэффициентов, описывающих неоднородность, без изменения структуры уравнений процесса. Такое осреднение естественно назвать *коэффициентным*. В данной работе исследуется иное направление — *структурное осреднение*, при котором изменяется тип самих уравнений или их качественная структура. В подавляющем большинстве случаев такие системы содержат наряду с малым масштабом неоднородности еще один или несколько малых (больших) параметров, отражающих существенные различия в свойствах отдельных составляющих среды, либо физических составляющих самого процесса переноса. Исследуется типичный пример задач структурного осреднения, которые порождают процессы в средах с сильной неоднородностью, а также процессы с неэквивалентным диффузионным и конвективным переносом.

Используются методы асимптотического осреднения [1, 2]. Процессы в сильно неоднородных средах исследовались в [3—6]. Осреднению конвективно-диффузионных систем посвящены работы [4, 8, 9].

1. Постановка задачи осреднения поля давлений в сильно неоднородной среде. Рассмотрим линейное уравнение теории упругого режима фильтрации: пласт слабдеформируем, жидкость слабосжимаема и движется по закону Дарси

$$L_{\varepsilon}^{\omega, \nu} p \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}; \omega \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - b \left(\frac{x}{\varepsilon}; \nu \right) \frac{\partial p}{\partial t} = -f(x, \tau; \omega) \quad (1.1)$$

$$\tau > 0, \quad x \in \Omega/\Gamma, \quad \Omega \subset R^s, \quad s \geq 2$$

$$p(x, 0) = p^0(x), \quad [p]_{\Gamma} = 0, \quad [a \partial p / \partial n]_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \cup \partial \Omega_i^{(0)}$$

$$a(x/\varepsilon, \omega) = a_*(x/\varepsilon) \chi(\omega), \quad b = b_*(x/\varepsilon) \chi(\nu), \quad f = f_* \chi(\omega)$$

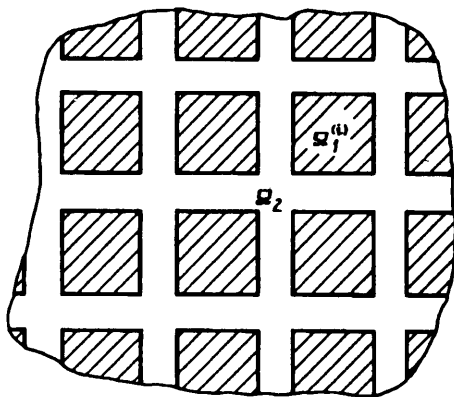
$$\chi(\alpha) = \alpha, \quad x \in \Omega_1 = \cup \Omega_i^{(0)}; \quad \chi(\alpha) = 1, \quad x \in \Omega_2 = \Omega/\Omega_1, \quad \alpha = \nu, \quad \omega$$

$$0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

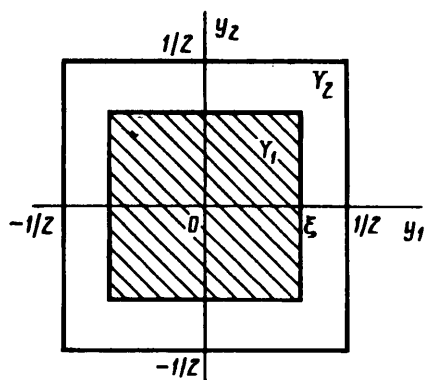
Здесь p — давление. Область Ω изображена на фиг. 1. Функции a, b периодичны. Разбиение Ω таково, что подобласть Ω_2 связна (трещины), а система N непесекающихся подобластей $\Omega_i^{(0)}$ (блоки) имеет периодическую структуру, Γ — граница между Ω_1 и Ω_2 , n — нормаль к границе, $[]$ — символ скачка. Коэффициенты $a, b > 0$ и терпят разрыв первого рода на Γ . Под трещиной понимается обычная пористая среда повышенной проводимости.

Наряду с областью Ω будем рассматривать отображение $y = x/\varepsilon$ ее отдельного периодического элемента на ячейку $Y = \{-1/2 < y_i < 1/2, i = 1, \dots, s\}$, которая разбивается замкнутой кусочно-гладкой поверхностью $S = \partial Y_i$ на две подобласти:

¹ По материалам доклада, прочитанного на VII съезде по теоретической и прикладной механике, Москва, август 1991 г. Представлено В. Н. Николаевским.



Фиг. 1



Фиг. 2

Y_1 (блок) и Y_2 (трещина), причем $S \cap \partial Y = \emptyset$ (фиг. 2). Коэффициенты $a(y)$, $b(y)$ терпят разрыв на S .

Требуется получить осредненное уравнение, что эквивалентно построению асимптотики задачи (1.1) при $\epsilon \rightarrow 0$.

Сильно неоднородной будем называть среду, для которой выполняется условие малости хотя бы одного из параметров: ω (неоднородность по проницаемости), ν (неоднородность по пористости), либо их отношения $\gamma = \omega/\nu$ (неоднородность по пьезопроводности). Далее принимается, что $\omega \ll 1$.

Существенным для дальнейшего анализа оказывается неэквивалентность ограничений на вариации пористости и проницаемости. Обычно полагают $\nu \sim \omega$ [2], что приводит к случаю простого коэффициентного осреднения. На практике небольшие изменения пористости, как правило, сопровождаются значительными осцилляциями проницаемости. Так, для известного месторождения Тенгиз при вариации пористости в 2—3 раза проницаемость меняется на 2—4 порядка. Таким образом, для ν принимается: $\omega \ll \nu \leq 1$.

Далее исследуется асимптотика задачи (1.1) при $\epsilon, \omega \rightarrow 0$.

2. Классификация сред и структурная неоднородность. Введем параметр $\epsilon_p = \epsilon^2/\gamma = \epsilon^2\nu/\omega$, который является мерой степени интенсивности охвата возмущением отдельного блока. При принятых условиях на ϵ, ω, ν параметр ϵ_p может меняться в диапазоне от 0 до ∞ . Соответственно этому будут меняться характер асимптотических при $\epsilon, \omega \rightarrow 0$ разложений и осредненные модели. Предлагается следующая классификация сред [5].

1. $\gamma \sim 1$ ($\epsilon_p \sim \epsilon^2$): среды сквозного типа или χ -однородные. Пьезопроводности одинаковы и $\omega \sim \nu$. Данная задача относится к коэффициентно-осредняемой и здесь не рассматривается.

По характеру поля давлений такие среды ведут себя как однородные, несмотря на сильную неоднородность по проницаемости и пористости. Через блоки наблюдается только сквозное течение. Разность давлений в блоках и трещинах ΔP имеет порядок ϵ^2 . В осредненной модели порядка $O(\epsilon^2)$ можно получить обменный член, такого же вида, как в классической модели [7], но порядка ϵ^2 . Через блоки наблюдается только сквозное течение.

2. $\epsilon^2 \ll \gamma \ll 1$ ($1 \gg \epsilon_p \gg \epsilon^2$): среды источниково-сквозного типа или слабо χ -неоднородные. В среде возникает запаздывание в охвате блока возмущением. В результате разница давлений ΔP достигает величин $\sim \epsilon_p$. В процессе выделяется несколько характерных стадий, в течение которых блоки работают в разном режиме.

3. $\gamma \sim \epsilon^2$ ($\epsilon_p \sim 1$): среды источникового типа (χ -неоднородные). Пьезопроводность блоков существенно ниже, чем у трещин. Охват возмущением блока сильно

запаздывает, из-за чего разность ΔP достигает по окончании нестационарных процессов больших величин ~ 1 . Процесс на блоке всегда нестационарен, а на трещине — квазистационарен.

4. $\gamma \ll \varepsilon^2$ ($\varepsilon_p \gg 1$): сильно x -неоднородные среды. На блоке процесс всегда нестационарен. В окрестности границы блока возникает пространственный пограничный слой с линейным размером $\sim \sqrt{\varepsilon_p}$, в пределах которого локализуется возмущение.

Из рассмотренных случаев лишь 2-й и 3-й относятся к структурно-осредняемым. В случае 2 параболическое уравнение (1.1) переходит после осреднения в эллиптическое с появлением второй производной по времени, а в случае 3 уравнение (1.1) переходит в интегродифференциальное. Для этих случаев характерно наличие умеренной неоднородности по пьезопроводности. Если же неоднородность по пьезопроводности предельная ($\gamma \rightarrow 0$, либо $\gamma \rightarrow \infty$), то задача осредняется коэффицентно.

Условие принадлежности задачи к структурно-осредняемой заключается в следующем: в исходном уравнении процесса переменный параметр, являющийся отношением коэффициентов при разных членах уравнения (обозначим его через $\pi(x)$), является умеренно осциллирующей функцией, не обуславливающей вырождения уравнения, т. е.

$$0 < \gamma_x = \pi_{\min}/\pi_{\max} < 1 \quad (2.1)$$

Наряду с γ_x иногда удобнее ввести параметр ε_x , например, как $\varepsilon_x = \varepsilon^2/\gamma_x$, который при выполнении (2.1) и (1.2) изменяется в пределах от 0 до ∞ .

Коэффициенты γ_x или ε_x будем называть параметрами структурной неоднородности. В рассмотренном случае в их качестве выступают соответственно γ и ε_p .

3. Техника построения асимптотических разложений. Технику построения разложений проиллюстрируем на примере сред типа 3. Основной их особенностью является принципиальное различие характера процессов в составляющих композита: в трещинах система эллиптическая, в блоках — параболическая. Их взаимодействие порождает наследственные эффекты, описываемые нелокальными операторами.

Вводится расширенная функция $\tilde{p}(x, y, \tau)$ так, чтобы ее сужение при $y = x/\varepsilon$ совпадало с $p(x, \tau)$. В дальнейшем волна над \tilde{p} опускается. Для расширенной функции система (1.1) примет вид

$$L\tilde{p} \equiv L_0^{(1)}\tilde{p} + \varepsilon L_1\tilde{p} + \varepsilon^2 (L_2^{(1)}\tilde{p} + f_*) = 0, \quad y \in Y_1 \quad (3.1)$$

$$L\tilde{p} \equiv L_0^{(2)}\tilde{p} + \varepsilon L_1\tilde{p} + \varepsilon^2 (L_2^{(2)}\tilde{p} + f_*) = 0, \quad y \in Y_2$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x), \quad [p]_s = 0$$

$$a_*(y) \left(\frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_i \Big|_s = \frac{\nu \varepsilon^2}{\varepsilon_p} a_*(y) \left(\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_i \Big|_s$$

$$L_0^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_*(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_*(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_*(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

$$L_2^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(a_*(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad L_2^{(1)} \equiv L_2^{(2)} - b_* \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad L_0^{(1)} \equiv L_0^{(2)} - \varepsilon_p b_* \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Здесь n — вектор нормали к поверхности S на ячейке Y (для определенности — в направлении из Y_1 в Y_2), $p^{(i)} \equiv p$ при $y \in Y_i$. Дополнительно принимается условие 1-периодичности по y функции $p(x, y, \tau)$.

Введем также интегральное соотношение, являющееся необходимым условием существования 1-периодического по y решения системы (3.1), для чего умножим первое уравнение в (3.1) на ω , проинтегрируем его по Y_1 , второе — по Y_2 и результаты сложим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle a_* \frac{\partial p}{\partial y_i} \right\rangle_2 + \varepsilon \left[\left\langle L_2^{(2)} p + f_* \right\rangle_2 - \nu \frac{\partial}{\partial \tau} \langle b_* p \rangle_1 \right] + \varepsilon^2 \frac{\nu}{\varepsilon_p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle a_* \frac{\partial p}{\partial y_i} \right\rangle_1 + \varepsilon^3 \frac{\nu}{\varepsilon_p} \langle L_2^{(1)} p + f_* \rangle_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$L_0 \equiv L_0^{(0)}, \quad L_2 \equiv L_2^{(0)}, \quad y \in Y_1$$

Символ $\langle \rangle_1$ означает интеграл по подобласти Y_1 , $\langle \chi(\omega) f \rangle$ — неравномерное среднее [5]: $\langle \chi(\omega) f \rangle = \langle f \rangle_2 + \omega \langle f \rangle_1$.

Поскольку ω жестко связан с ε , разложение $\varepsilon, \omega \rightarrow 0$ сводится к однопараметрическому ($\varepsilon \rightarrow 0$) и ищется в виде

$$p(x, y, \tau; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x, y, \tau) \quad (3.3)$$

$$p_k(x, y, \tau) = p_{k0}(x, \tau) + p_{k1}(x, y, \tau), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{k0}(x, \tau) = \langle \chi(\omega) p \rangle$$

Таким образом, в отличие от результатов классических методов неосциллирующая составляющая $p_{00}(x, \tau)$ является неравномерным средним (с точностью $O(\varepsilon)$) [5].

Дальнейшая техника традиционна: разложение (3.3) подставляется в (3.1), (3.2), выделяются члены одного порядка по ε и т. д.

Для p_0 можно получить

$$p_0 = p_0(x, \tau) \equiv p_{00}(x, \tau), \quad y \in Y_2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_* \frac{\partial p_0}{\partial y_i} \right) \right) - \varepsilon_p b_* \frac{\partial p_0}{\partial \tau} = 0, \quad y \in Y_1; \quad p_0|_{\tau=0} = p^*, \quad p_0|_s = p_{00}(x, \tau) \quad (3.4)$$

Решение (3.4) можно представить через функцию Грина $G(y, \tau, \xi, \theta)$

$$p_0(y, \tau; x) = p_{00}(x, \tau) - \int_0^{\tau} \int_{Y_1} G(y, \tau; \xi, \theta) \frac{\partial p_{00}(x, \theta)}{\partial \theta} d\xi d\theta, \quad y \in Y_1$$

Если функции a, b кусочно-постоянные, то

$$p_0(x, y, \tau) = p_{00}(x, \tau) - \int_0^{\tau} \frac{\partial p_{00}(x, \theta)}{\partial \theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle R_k \rangle_1^2}{\langle R_k \rangle_1} \exp \left\{ -\frac{\mu_k(\tau - \theta)}{\lambda_0'} \right\} d\theta \quad (3.5)$$

где $\lambda_0' = \varepsilon_p b_* / a_*$, Δ_{yy} — лапласиан в переменных y , $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные функции и $\{\mu_k\}$ — собственные числа оператора $L^* \equiv -\Delta_{yy}$ в Y_1 , т. е. $-\Delta_{yy} R_k = \mu_k R_k$, $y \in Y_1$, $R_k|_s = 0$, $\forall k \geq 1$, где r — радиальная координата на ячейке.

На подобласти Y_2 можно получить

$$p_1(x, y, \tau) = \psi_k(y) \frac{\partial p_{00}}{\partial x_k} + p_{10}(x, \tau)$$

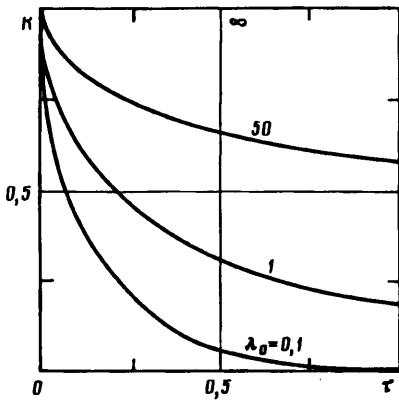
$$L_0^{(2)} \psi_k = -\frac{\partial a_*}{\partial y}, \quad y \in Y_2; \quad \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) n_i|_s = 0, \quad \langle \psi_k \rangle_2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$A_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 p_{00}}{\partial x_i \partial x_j} - B^{(2)} \frac{\partial p_{00}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial}{\partial \tau} \langle b_* p_0 \rangle_1 - \langle f_* \rangle_2 \quad (3.6)$$

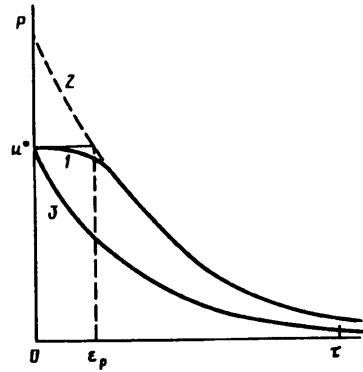
$$A_{ij}^{(2)} \equiv \left\langle a_* (y) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} + \delta_{ij} \right) \right\rangle_2, \quad B^{(2)} = \langle b_* (y) \rangle_2$$

Функции на ячейке $\Phi_k(y)$ — 1-периодичны.

4. Осредненная модель для сред источникового типа. Осредненные уравнения фильтрации получаются следующим образом. Введем давления, осредненные по подобластям: $P_1 = \langle p \rangle_1 / \alpha$, $P_2 = \langle p \rangle_2 / (1 - \alpha)$, где α — объемная доля блоков в системе.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из предыдущих результатов следует, что $P_1 = \alpha^{-1} \langle p_0 \rangle_1 + O(\epsilon)$, $P_2 = p_{00} + O(\epsilon)$. Тогда из соотношений для p_0 на Y_1 (3.5) и p_{00} (3.6) можно получить с точностью до членов порядка ϵ

$$P_1(x, \tau) = P_2(x, \tau) - \int_0^\tau \frac{\partial P_2(x, \theta)}{\partial \theta} K(\tau - \theta) d\theta \quad (4.1)$$

$$A_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_i \partial x_j} - B^2 \frac{\partial P_2}{\partial \tau} = B^{(1)} - \frac{\partial P_1}{\partial \tau} \langle f_* \rangle_2, \quad B^{(1)} \equiv \langle b \rangle_1 = \nu \langle b_* \rangle_1$$

$$K(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle R_k \rangle_1^2}{\langle R_k^2 \rangle_1} \exp \left\{ -\frac{\mu_k \tau}{\lambda_0} \right\} d\tau \quad (4.2)$$

с условием $P_1(x, 0) = p^0(x)$. Обменное ядро $K(\tau)$ изображено на фиг. 3.

Систему (4.1) можно свести к одному интегродифференциальному уравнению относительно давления в трещинах P_2

$$A_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_i \partial x_j} - B^{(2)} \frac{\partial P_2}{\partial \tau} = -B^{(1)} \int_0^\tau \frac{\partial P_2}{\partial \theta} K_*(\tau - \theta) d\theta - \langle f_* \rangle_2, \quad K_*(\tau) \equiv \frac{dK}{d\tau} \quad (4.3)$$

Интегродифференциальный оператор описывает процесс массообмена между блоками и трещинами.

В рассмотренном случае блок работает только как нестационарный источник с равной интенсивностью по всем направлениям, независимо от наличия макроскопического градиента давления.

5. Осредненная модель для сред источниково-сквозного типа. В случае сред со слабой пьезонеоднородностью, в которых $\epsilon^2 \ll \epsilon_p \ll 1$, или $\nu \sim 1$, $\epsilon^2 \ll \omega \ll 1$, осредненная модель имеет качественно иной вид, причем оказывается различной на разных стадиях процесса. Выделяются две стадии: на первой ($0 \leq \tau \leq \epsilon_p$) происходит охват блока возмущением, блок работает только как нестационарный источник; на второй стадии ($\tau > \epsilon_p$) решение регулярно зависит от ϵ_p , в блоке наряду с продолжающимся источниковым течением возникает и сквозное протекание в направлении макроскопического градиента давления.

На первой стадии вводится новое время $\theta = \tau / \epsilon_p$, порядок которого единица. Осредненные уравнения совпадают с (4.1) (с заменой τ на θ), но с порядком отброшенных членов ($\epsilon + \epsilon_p^2$).

На второй стадии с точностью $O(\epsilon + \epsilon_p^2)$ получаем

На второй стадии с точностью $O(\varepsilon + \varepsilon^2)$ получаем

$$P_1(x, \tau) = P_2(x, \tau) - \tau_* \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \quad (5.1)$$

$$(A_{ij}^{(2)} + A_{ij}^{(1)}) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_i \partial x_j} - B \frac{\partial P_2}{\partial \tau} = -\lambda_* \frac{\partial^2 P_2}{\partial \tau^2} - \langle f_* \rangle_2$$

$$\tau_* \equiv \frac{\varepsilon_p}{\alpha} \int_{Y_1} \int_{Y_1} G_1(y, \xi) b_*(\xi) d\xi dy, \quad \lambda_* \equiv \nu \varepsilon_p \int_{Y_1} \int_{Y_1} G_1(y, \xi) b_*(\xi) b_*(y) d\xi dy$$

$$B = B^{(1)} + B^{(2)}, \quad A_{ij}^{(1)} \equiv \omega \left[\langle \alpha_* (y) \left(\frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial y_j} + \delta_{ij} \right) \rangle_1 + \langle \alpha_* (y) \frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial y_j} \rangle_2 \right]$$

$$A_{ij}^{(2)} \equiv \langle \alpha_* (y) \left(\frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial y_j} + \delta_{ij} \right) \rangle_2, \quad B^{(1)} \equiv \nu \langle b_* \rangle_1, \quad B^{(2)} \equiv \langle b_* \rangle_2$$

Здесь $G_1(y, \xi)$ — функция Грина 1-й краевой задачи для оператора $L_0^{(2)}$ в Y_1

$$L_0^{(2)} G_1 \equiv \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\alpha_* (y) \frac{\partial G_1}{\partial y_i} \right) = -\delta(y - \xi), \quad G_1|_{y \in S} = 0 \quad (5.2)$$

Функции на ячейке $\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, \varphi_i^{(2)}$ определяются из задач

$$L_0^{(2)} \psi_k^{(2)} = -\partial \alpha_* / \partial y_k, \quad y \in Y_2; \quad \langle \psi_k \rangle_2^{(2)} = 0; \quad (\partial \psi_k^{(2)} / \partial y_i + \delta_{ik}) n_i|_s = 0 \quad (5.3)$$

$$L_0^{(2)} \psi_k^{(1)} = -\partial \alpha_* / \partial y_k, \quad y \in Y_1; \quad \psi_k^{(1)}|_s = \psi_k^{(2)}|_s, \quad (5.4)$$

$$L_0^{(2)} \varphi_k^{(2)} = 0, \quad y \in Y_2; \quad \langle \varphi_k \rangle_2^{(2)} = -\langle \psi_k^{(1)} \rangle_1$$

$$(\partial \varphi_k^{(2)} / \partial y_i) n_i|_s = (\partial \psi_k^{(1)} / \partial y_i + \delta_{ik}) n_i|_s, \quad (5.5)$$

Если $b_* = \text{const}$, то $\lambda_* = b_* \tau_* \nu / \alpha$.

Асимптотические разложения для первой стадии и для второй автоматически сращиваются в переходной области. Характер точного решения его внутренней и внешней асимптотик показан на фиг. 4.

Второе уравнение в (5.1) содержит вторую временную производную и является эллиптическим, так как $\lambda_* > 0$, а матрицы $A_{ij}^{(2)}$ и $A_{ij}^{(1)}$ положительно определены. Начальная задача $P_2(x, 0) = p^\circ$ для него является некорректной, так как имеет не единственное решение. Существенно, что второе, естественное условие вида $P_1(x, 0) = p^\circ$ для него недопустимо, так как

$$P_1(x, 0) \equiv P_2(x, 0) - \tau_* \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = p^\circ - \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \neq p^\circ \quad \left(\frac{\partial P_2}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \neq 0 \right)$$

Это видно из фиг. 4, где показан характер изменения давлений P_1 и P_2 при истощении пласта с постоянным темпом.

Необходимым вторым условием является условие ограниченности решения: $|P_2| < \infty, \forall \tau \geq 0$.

Строгие результаты на эту тему получены сравнительно недавно. Так, в [10] доказано следующее: задача

$$Lp \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in R^n, \quad p(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

с положительно определенной матрицей a_{ij} имеет единственное решение, если $|p| \leq K < +\infty$ и $\varphi(x \rightarrow \infty) = \varphi_0, |\varphi_0| < +\infty$, причем $p(x \rightarrow \infty) \rightarrow \varphi_0$.

Таким образом, начальная задача $P_2(x, 0) = p^*$ для (5.1) имеет единственное решение в R^3 , если функция $p^*(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow \infty$. Поведение функции источников $\langle f_*(x, \tau) \rangle$ в (5.1) при этом также лимитируется: она должна быть либо финитной по τ , либо стремиться к нулю быстрее любой степени τ при $\tau \rightarrow \infty$.

6. Декомпозиция течений в средах источниково-сквозного типа. Из результатов асимптотического разложения для давления на блоках и трещинах для пульсационных составляющих $z_i \equiv p(x, y, \tau) - P_i(x, \tau)$ имеет место с точностью $O(\varepsilon^2 + \varepsilon_p^2 + \varepsilon\varepsilon_p)$

$$z_1(x, y, \tau) \equiv p(x, y, \tau) - P_1(x, \tau) = \left[\varepsilon \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \psi_i^{(1)}(y) + \varepsilon_p \frac{\partial p_0}{\partial \tau} \Phi^{(1)}(y) \right], \quad y \in Y_1$$

$$z_2(x, y, \tau) \equiv p(x, y, \tau) - P_2(x, \tau) = \varepsilon \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \psi_i^{(2)}(y), \quad y \in Y_2$$

где $\Phi^{(1)}(y) = G_1(y, y)$, $G_1(y, \xi)$ — функция Грина вида (5.2).

Откуда вытекает следующее свойство для сред рассматриваемого типа (принцип декомпозиции течений).

Декомпозиция течения в блоке. Общее течение в блоке является простой суперпозицией двух независимых течений: источникового течения, описываемого функцией $\Phi^{(1)}(y)$, и сквозным протеканием, описываемым функцией $\psi_i^{(1)}(y)$ из (5.4). Эти составляющие течения входят в общее выражение для давления на блоке аддитивно.

В осредненной модели (5.1) источниковое течение порождает обменный член, интенсивность которого пропорциональна $\partial^2 P_2 / \partial \tau^2$, имеет порядок величины λ_* и не дает вклада в эффективную проводимость системы трещин, а сквозное протекание порождает добавку $A^{(1)}$ к эффективному коэффициенту проводимости системы трещин и не влияет на обменный член.

Декомпозиция сквозного течения в ячейке. Общее сквозное течение на ячейке расщепляется на три составляющих, иерархически зависящих друг от друга: первичное течение в трещине — доминантная независимая составляющая $\psi_i^{(2)}(y)$, описывающая обтекание по трещине непроницаемого блока; сквозное течение в блоке — составляющая $\psi_i^{(1)}(y)$, описывающая поток, вызванный течением $\psi_i^{(2)}(y)$; вторичное течение в трещине — составляющая $\varphi_i^{(2)}(y)$, описывающая вторичный поток в трещине, вызванный течением в блоке $\varphi_i^{(1)}(y)$.

Принцип декомпозиции позволяет получить для составляющих течения и, как следствие, для эффективных коэффициентов аналитические результаты.

7. Вычисление эффективных коэффициентов и обменных ядер. Модели (4.1) или (4.3), (5.1) характеризуются тремя скалярными коэффициентами: $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ и τ_* (или λ_*), двумя постоянными тензорами $A_{ij}^{(2)}$, $A_{ij}^{(1)}$, а также ядром обменного оператора $K(\tau)$. Из них коэффициенты $B^{(i)}$ определяются элементарно, а остальные величины — краевыми задачами на ячейке.

Конкретизируя форму блока, из (4.3) можно получить для шара безразмерного радиуса ξ (отнесенного к стороне ячейки)

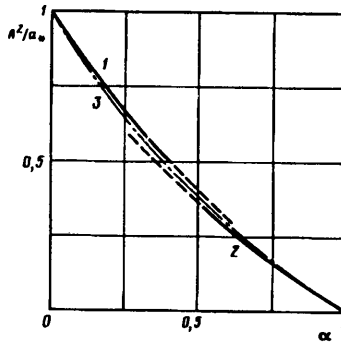
$$K(\tau) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp(-\pi^2 k^2 \tau / \lambda_0), \quad \lambda_0 \equiv \varepsilon_p \xi^2 b_* / a_*, \quad \xi = (3\alpha / 4\pi)^{1/3}$$

где α — объемная доля блоков; для параллелепипеда $h_1 \times h_2 \times h_3$

$$K(\tau) = \frac{8^3}{\pi^6} \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{2k+1}{h_1/h} \right)^2 + \left(\frac{2m+1}{h_2/h} \right)^2 + \left(\frac{2n+1}{h_3/h} \right)^2 \right] \frac{\pi^2 \tau}{\lambda_0'} \right\} \times$$

$$\times [(2k+1)(2m+1)(2n+1)]^{-2}$$

$$\lambda_0' = \varepsilon_p h^2 b_* / a_*, \quad h^3 = \alpha = h_1 h_2 h_3 \leq 1, \quad h_i \leq 1, \quad \forall i$$



Фиг. 5

Расхождение кривых $K(\tau)$ для равновеликих шара и параллелепипеда не более 5%, если отношение сторон параллелепипеда не превышает 5 : 1, поэтому для инженерных расчетов вполне достаточной оказывается аппроксимация блока шаром.

Время запаздывания перетоков τ_* и коэффициент интенсивности перетоков λ_* определяются явно для шара радиуса ξ и параллелепипеда

$$\tau_* = \frac{6l_0}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\lambda_0}{15} \quad (r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \xi)$$

$$\tau_* = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \frac{\lambda_0'}{\pi^2} \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2k+1}{h_1/h}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{h_2/h}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{h_3/h}\right)^2 \right]^{-1} \times$$

$$\times [(2k+1)(2m+1)(2n+1)]^{-2} \quad (0 \leq y_i \leq h_i, \quad i = 1, 2, 3)$$

В сильно неоднородных средах вычисление эффективных коэффициентов $A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}$ сводится к определению локальных функций $\psi_k^{(2)}(y)$.

Если блоки Y_i обладают центральной симметрией (макроизотропия), то достаточно вычислить функцию $\psi(y) \equiv \psi_1^{(2)}(y)$. Задача для нее описывает распределение потенциала поля скоростей $\Psi(y) \equiv \psi_1^{(2)}(y) + y_1$ на ячейке при обтекании твердого непроницаемого тела (блока) с поверхностью S , помещенного внутрь куба Y с четырьмя непроницаемыми гранями и постоянными значениями потенциала на двух оставшихся противоположных гранях ($\Psi = \pm U$).

Если S — сфера радиуса ξ , то приближенное решение задачи ищется в форме, аналогичной решению задачи потенциального обтекания твердой сферы безграничным потоком несжимаемой жидкости

$$\Psi(y) = \frac{C_0 y_1}{r^3} + C_1 y_1, \quad r \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

Эта функция точно удовлетворяет уравнению Лапласа и необходимым условиям симметрии. Константы C_0, C_1 можно выбрать так, чтобы выполнялось условие на сфере S точно, а условие первого рода на двух противоположных гранях куба Y выполнялось в среднем. Тогда

$$\Psi(y) \simeq \frac{y_1}{2 + \alpha} \left[2 + \left(\frac{\xi}{r}\right)^3 \right] \quad (7.1)$$

Условиям второго рода (непротекания) на оставшихся внешних гранях функция (7.1) не удовлетворяет.

При центральной симметрии формы блока тензор $A_{ij}^{(2)}$ сворачивается в скаляр $A^{(2)} = a_* \langle \partial \Psi / \partial y_i \rangle_2$, для которого нетрудно получить $A^{(2)} = a_* (1 - \alpha)(1 + \alpha/2)^{-1}$. Точность этого соотношения уменьшается по мере увеличения α .

При $\alpha \rightarrow 1$ величину $A^{(2)}$ можно рассчитать, используя принцип расщепления осредненного оператора [2] и обобщая его на 3-мерный случай: $A^{(2)} \simeq a_* (1 - \alpha^{2/3}), \alpha \rightarrow 1$.

На фиг. 5 показан характер функций $A^{(2)}$ и точного решения (пунктиром) для кубических блоков.

8. Осреднение процессов конвективно-диффузионного переноса. Процессы конвективно-диффузионного переноса дают еще один типичный пример задач структурного осреднения. Рассмотрим течение в пористой среде однофазного флюида, состоящего из различных компонентов. Вязкость смеси не зависит от состава смеси, начальное распределение компонентов в системе заведомо неравномерно и порождает процессы их перемешивания. Процесс может быть описан следующей системой уравнений для безразмерного давления $p(x, t)$ и концентрации $c(x, t)$ отдельного компонента:

$$b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial \tau} - a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \quad (8.1)$$

$$\beta b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right); \quad x \in \Omega \subseteq R^s, \quad s \geq 2, \quad \tau > 0$$

$$[p]_{\Gamma} = 0, \quad \left[a \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad [c]_{\Gamma} = 0, \quad \left[D \frac{\partial c}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad D \frac{\partial c}{\partial n} \equiv \sum_{i,j=1}^s D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_i} n_j$$

Здесь скаляр $a > 0$, а матрица D_{ij} положительно определена. Рассматривается начальная задача: $p|_{\tau=0} = p^0(x)$, $c|_{\tau=0} = c^0(x)$.

Коэффициент диффузии D и проводимость a являются быстроосциллирующими функциями координат с периодом ε . Число Пекле Pe есть отношение скорости фильтрации жидкости к скорости диффузионного переноса волны концентрации: $\text{Pe} = \langle a \rangle / \langle D \rangle$, символ $\langle \rangle$ означает среднее по области Ω .

В зависимости от соотношений между параметрами ε и Pe выделяется три типа систем с разными осредненными моделями: CD -системы, $\text{Pe} \sim 1$ — равновесие между диффузией и конвекцией; C -системы, $\text{Pe} \geq \varepsilon^{-1}$ — конвективный перенос доминирует; D -системы, $\text{Pe} \leq \varepsilon$ — доминирует дисперсия.

Разложение задачи строится в виде

$$c(x, \tau) = c_0(x, \tau; \text{Pe}) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k c_k(x, y, \tau; \text{Pe}) \quad (8.2)$$

Дальнейшая техника близка к изложенной выше.

Очевидно, роль параметра структурной неоднородности γ_x из (1.3) в данной задаче выполняет Pe либо Pe^{-1} . Поэтому случай структурного осреднения мы получим, если $0 < \text{Pe} < 1$ либо $0 < \text{Pe}^{-1} < 1$.

9. Осредненное уравнение переноса для CD -систем. Приведем конечный результат. CD -система является коэффициентно осредняемой, т. е. осредненное уравнение имеет такой же вид, как исходное

$$B \frac{\partial C}{\partial \tau} - R_{km} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial C}{\partial x_m} = \frac{1}{\text{Pe}} D_{ij} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9.1)$$

$$D_{ij} \equiv \langle D_{ik}(y) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_k} \right) \rangle, \quad B \equiv \langle b \rangle$$

$$R_{km} = \langle a(y) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_j} \right) \rangle = A_{km}$$

Постоянные величины B , D_{ij} , R_{km} являются эффективной пористостью, тензором дисперсии и тензором конвективного переноса.

Вектор-функция $\{\varphi_k\}_{k=1}^s$ является 1-периодическим решением задачи

$$L^{(0)} \varphi_k^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_{km} \frac{\partial \varphi_k^{(1)}}{\partial y_m} \right) = - \frac{\partial D_{mk}}{\partial y_m}, \quad y \in Y; \quad \langle \varphi_k^{(1)} \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (9.2)$$

10. Осредненная модель для D -систем. Если подобласть Y_1 в ячейке симметрична по каждой оси, то осредненное уравнение имеет вид

$$B \frac{\partial C}{\partial t} - R_{km} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial C}{\partial x_m} = \frac{1}{Pe} D_{km} \frac{\partial^2 C}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\varepsilon^2}{Pe} D_{kmnj}^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n \partial x_j} \quad (10.1)$$

$$D_{km} \equiv \langle D_{km} + D_{kl} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_l} \rangle, \quad D_{kmnj}^{(2)} \equiv \langle D_{nj} \rho_{km} + D_{\mu} \frac{\partial \varphi_{kmn}}{\partial y_l} \rangle, \quad R_{km} = A_{km}$$

Здесь $D^{(2)}$ является тензором вторичной дисперсии, который учитывает взаимодействия второго порядка. Таким образом, осредненное уравнение меняет тип, так как в нем появляются члены с четвертыми производными, порядок которых не меньше, чем конвективных членов.

Можно доказать, что тензор четвертого ранга $\{D_{kmnj}^{(2)}\}$ распадается на вектор $\{D_k^{(2)}\}_{k=1}^s$ и тензор второго ранга $\{D_{km}^{(2)}\}$, которые определяются через компоненты тензора $D_{kmnj}^{(2)}$ с помощью соотношений

$$D_k^{(2)} \equiv D_{kkkk}^{(2)}, \quad D_{km}^{(2)} \equiv D_{kkmm}^{(2)} + D_{kmmk}^{(2)} + D_{kmmk}^{(2)} + D_{mmkk}^{(2)} + D_{mkkm}^{(2)} + D_{mkkm}^{(2)}, \quad k \neq m$$

Тогда

$$D_{kmnj}^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n \partial x_j} = \sum_{k=1}^s D_k^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_k^4} + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{m=k+1}^s D_{km}^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_k^2 \partial x_m^2} \quad (10.2)$$

Последняя сумма содержит C_s^2 слагаемых. Таким образом, число необходимых коэффициентов сократилось до $S + C_s^2$ (три при $s = 2$, шесть при $s = 3$).

Если среда обладает «максимальной» симметрией: область Y_1 в ячейке Y симметрична одновременно по всем осям, то в плоском случае ($s = 2$) тензор $\{D_{kmnj}^{(2)}\}$ сворачивается в два скаляра: $D_1^{(2)} = D_k^{(2)}$, $D_{11}^{(2)} = D_{12}^{(2)}$, а вместо (10.2) имеет место

$$D_{kmnj}^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n \partial x_j} = D_1^{(2)} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^4 C}{\partial x_k^4} + D_{11}^{(2)} \frac{\partial^4 C}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \quad (10.3)$$

$$D_1^{(2)} = \lambda_1, \quad D_{11}^{(2)} = 2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4); \quad \lambda_1 = \langle D \left(\varphi_{11} + \frac{\partial \varphi_{111}}{\partial y_1} \right) \rangle$$

$$\lambda_2 = \langle D \left(\varphi_{11} + \frac{\partial \varphi_{112}}{\partial y_2} \right) \rangle, \quad \lambda_3 = \langle D \frac{\partial \varphi_{121}}{\partial y_2} \rangle, \quad \lambda_4 = \langle D \frac{\partial \varphi_{122}}{\partial y_1} \rangle$$

В одномерном случае (течение поперек слоев) тензор $D^{(2)}$ обращается в нуль.

Если область Y_1 несимметрична хотя бы по одной из осей, то в осредненном уравнении (10.1) появляется еще одно слагаемое $(\varepsilon/Pe) D_{kmn}^{(1)} \partial^3 C / \partial x_k \partial x_m \partial x_n$ с асимметричным тензором третьего ранга $D^{(1)}$, который отличен от нуля при $s \geq 2$.

Таким образом, появление тензора $D^{(2)}$ может быть связано только с неоднородностью процесса переноса, а тензора $D^{(1)}$ — еще и с отсутствием симметрии течения на ячейке.

11. Осредненные модели для C -систем. В этом случае роль первых производных значительно возрастает и результаты оказываются качественно различными для случаев, когда поле скоростей периодически и непериодично. В случае периодического поля скоростей вместо (8.1) рассматривается одно уравнение

$$b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial t} + v_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\varepsilon}{Pe^*} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right)$$

где v_i стационарные ε -периодические функции. Поле $v(x/\varepsilon)$ считается заданным

и удовлетворяет уравнению неразрывности: $(\partial/\partial x_i)v_i = 0$, здесь по i — суммирование от 1 до s .

Разложение для c ищется по-прежнему в форме (8.2). Для осредненной концентрации $C \equiv \langle c \rangle = c_0 + \varepsilon c_{10} + \varepsilon^2 \dots$, имеет место

$$B \frac{\partial C}{\partial \tau} + W_k \frac{\partial C}{\partial x_k} = \frac{1}{\text{Pe}} D_{km} \frac{\partial C}{\partial x_k \partial x_m} + O(\varepsilon^2) \quad (11.1)$$

$$D_{km} \equiv \langle D_{mi} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) \rangle - \text{Pe}^* \left\{ W_{km}^{(2)} - \frac{\langle b \varphi_k \rangle}{\langle b \rangle} W_m \right\}, \quad W_k \equiv \langle v_k \rangle, \quad \text{Pe}^* \equiv \varepsilon \text{Pe} \sim 1$$

$$- L_0 \varphi_k = \frac{\partial D_{ik}}{\partial y_i} - \text{Pe}^* \left[v_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) - \frac{b}{\langle b \rangle} W_k \right] = 0, \quad \langle \varphi_k \rangle = 0 \quad (11.2)$$

Заметим, что функции $\varphi_k(y)$ определяются иначе, нежели (9.2).

Формально модель записывается так же, как для CD -систем (9.1), но структура тензора D_{km} принципиально различна, так как теперь он зависит от скорости переноса v . Существенно, что конвективные эффекты и диффузионные входят в тензор D_{km} неаддитивно, т. е. представление $D_{km} = D_{km}^d + D_{km}^c$, где D_{km}^d — молекулярная, а D_{km}^c — конвективная диффузия, в общем случае не имеет места.

В случае неперпериодического поля скоростей (рассматривается полная система (8.1)) результаты меняются качественно.

Осредненное уравнение для концентрации имеет вид

$$B \frac{\partial C}{\partial \tau} + W_k(x, \tau) \frac{\partial C}{\partial x_k} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_{km}(x, \tau) \frac{\partial C}{\partial x_m} \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$W_k(x, \tau) = V_k(x, \tau) + \varepsilon \Delta W_k, \quad \Delta W_k = \left\langle b \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} + \frac{b}{B} W_{k0} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \right\rangle, \quad W_{k0} = \langle v_{k0} \rangle$$

$$D_{km}(x, \tau) = \langle D_{mi} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) \rangle - \text{Pe}^* \left\{ \langle v_{m0} \varphi_k \rangle - \frac{\langle b \varphi_m \rangle}{\langle b \rangle} W_k \right\}, \quad V_k = \langle v_{k0} \rangle + \varepsilon \langle v_{ki} \rangle$$

где v_{ki} — i -й коэффициент разложения скорости v_k в ряд по ε .

Для рассматриваемых систем нарушается подобие процесса на ячейках, заключающееся в том, что быстрые и медленные переменные не расщепляются и функции на ячейке $\varphi_k(x, y, \tau)$ теперь зависят и от медленных переменных. Задача на ячейке для них записывается так же, как (11.2), с заменой $v(y)$ на $v_0(x, y, \tau)$ и оказывается теперь различной на разных ячейках.

12. Осреднение процессов конвективно-диффузионного переноса в сильно-неоднородной среде. Введение условия сильной неоднородности на проводимость среды является следующим усложнением рассматриваемых процессов переноса.

Уравнения переноса концентраций в такой среде имеют вид

$$b_r \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial C}{\partial \tau} - a_r \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{Pe}_r} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij}^{(r)} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial c}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega_r, \quad r = 1, 2$$

$$c(x, 0) = c^0(x)$$

Все компоненты $D_{km}^{(0)}$ тензора локальной диффузии в фиксированной подобласти $\Omega^{(0)}$ имеют один порядок, такой же, как их средняя величина $D_{*}^{(0)}$. Тогда число Pe_i определяется как отношение средних по $\Omega^{(0)}$ проводимости и $D_{*}^{(0)}$: $\text{Pe}_i = \langle a \rangle_i / \langle D_{*}^{(0)} \rangle_i$.

Условия на границах Γ блоков и трещин ставятся из следующих соображений. Если в одной из подобластей $\Omega^{(0)}$ диффузия есть, а в другой нет, то возникает разрыв диффузионного потока. При этом возможен и разрыв концентрации. Если диффузия имеет место в обеих областях $\Omega^{(0)}$, то ставятся условия

$$[c]_{\Gamma} = 0, \quad \left[D_{ij}^{(2)} \frac{\partial c}{\partial x_j} n_i \right]_{\Gamma} = 0, \quad D^* = \frac{D}{Pe}$$

Если в одной из подобластей (для определенности $\Omega^{(1)}$) диффузия отсутствует, то ставится условие, вытекающее из законов сохранения полного потока и диффузионного потока компонента

$$\frac{1}{Pe_2} D_{ij}^{(2)} \frac{\partial c}{\partial x_j} n_i \Big|_{\Gamma_2} = a_1 \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \Big|_{\Gamma_1} \cdot [c]_{\Gamma}$$

где индекс Γ_i означает соответствующую сторону границы Γ .

Условие непрерывности концентрации в последнем случае не ставится. Принимается, что

$$b_1/b_2 = \nu \sim 1, \quad a_1/a_2 = \omega \ll 1, \quad D_{ij}^{(1)}/D_{ij}^{(2)} \sim \omega, \quad \varepsilon^2 < \omega < \varepsilon, \quad Pe_1 \sim 1/\varepsilon, \quad Pe_2 \sim 1$$

Это означает, что среда относится к промежуточному типу между источниковым и источниково-сквозным согласно классификации, изложенной в разд. 4; при этом блоки работают в основном как источник, но для давлений имеет место модель (5.1), в которой $A^{(1)} = 0$ (эффект сквозного протекания пренебрежимо мал). Кроме того, принято, что диффузия в блоках мала, а в трещинах — существенна. Системы, в которых диффузия мала хотя бы в одной из подобластей, представляют наибольший интерес. Случай, когда одновременно $Pe_1 \leq 1$ и $Pe_2 \leq 1$, исследуется так же, как ранее.

Исследуется асимптотика при $\varepsilon, \varepsilon_p \rightarrow 0$. Осредненная модель не имеет однозначной формы и существенно зависит от истории изменения давления во времени.

Если давление P_2 во времени монотонно возрастает от начального невозмущенного состояния (при этом градиенты давления направлены из трещин в блоки), то модель имеет вид для средних концентраций

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = \frac{\partial P_2}{\partial \tau} (C_2(x, \tau) - C_1(x, \tau)) \quad (12.1)$$

$$D_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 C_2}{\partial x_i \partial x_j} - (B^{(1)} + B^{(2)}) \frac{\partial C_2}{\partial \tau} + A_{km}^{(2)} \frac{\partial P_2}{\partial x_k} \frac{\partial C_2}{\partial x_m} = Q = 0$$

$$D_{ik}^{(2)} = \left\langle D_{ij}^{(2)} \left[\frac{\partial \varphi_k^{(2)}}{\partial y_j} + \delta_{kj} \right] \right\rangle_2$$

Функции $\varphi_i^{(k)}(y)$ определены так же, как $\psi_i^{(k)}$, с заменой a_2 везде на $D_{ij}^{(2)}$. Модель (12.1) описывает процессы, в которых движение флюида направлено из трещин в блоки.

Функция Q описывает обмен между трещиной и блоком по концентрации. В данном случае она равна нулю, так как затекание части смеси из трещины в блок не приводит к изменению ее состава в трещине.

Волна концентрации распространяется от границы к центру блока так, что радиальная координата $r(t)$ фронта волны (точка слабого разрыва) изменяется по закону

$$\zeta_*(t) = \exp(-[P_2(x, t) - P^0]/3), \quad \zeta \equiv r/\xi$$

где ξ — радиус блока. Как видно, положение фронта в блоке быстро стабилизируется, а его скорость быстро падает во времени. Вблизи границы блока (при $1 - \zeta \sim \omega$), где эффекты диффузии и конвекции одного порядка, получено внутреннее решение методом сращиваемых асимптотических разложений

$$c(x, \xi, t) = C_2(x, t) + 3 \frac{\partial C_2}{\partial t} \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ \xi - 1 + \lambda_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} \left[1 - \exp \left(- \frac{(1 - \xi) \partial P_2}{\lambda_1 \partial t} \right) \right] \right\} \\ \lambda_1 \equiv 3D_2 / \omega b_2 \xi^2$$

Концентрация распространяется в блоке в виде бегущей волны, форма которой зависит от всей истории формирования концентрации в трещинах; скорость волны затухает во времени и зависит от истории изменения трещинного давления. В этом смысле процесс обладает двойной памятью.

Если давление в пласте падает, то течение флюида направлено из блоков в трещины и обменный член Q уже отличен от нуля. Модель принимает вид

$$C_1(x, t) = c^0, \quad Q = -B^{(2)} \alpha (1 - \alpha)^{-1} \frac{\partial P_2}{\partial t} (C_2(x, t) - C^0) \quad (12.2)$$

Реальный процесс закачки смешивающегося агента в нефтяной пласт характеризуется немонотонностью изменения давления во времени. Пусть до момента $t = t_1$ давление возрастало, после чего стало падать в некоторых точках пласта, тогда получим модель с запаздывающим аргументом

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{\partial P_2}{\partial t} (C_2^{\sim}(x, 2\tau_1 - \tau) - C_1(x, t)) \\ Q = -B^{(2)} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} \right) [C_2(x, t) - C_2^{\sim}(x, 2\tau_1 - \tau)] \\ \tau_1(x) \equiv P_2(x, t_1) - P^0, \quad C_2^{\sim}(x, \tau) \equiv C_2(x, t) |_{t=(\tau)} \\ \tau(t; x) \equiv 2P_2(x, t_1) - P_2(x, t) - P^0$$

Закон движения фронта в блоке: $\xi_* = \exp [- (2\tau_1 - \tau) / 3]$.

Модели (12.1), (12.2) не содержат новых характерных времен, поэтому имеет смысл постановка автомодельных задач.

Процесс оказывается несимметричным в случаях повышения давления или его падения. Существенно также, что в сильнонеоднородных средах обмен по концентрации зависит от $\partial P / \partial t$ и, следовательно, отсутствует при установившемся поле давлений. Это объясняется тем, что обменный процесс представляет собой конвективный переток смеси практически без диффузии (так как блок работает как S -система), но при стабилизации поля давлений давления в блоках и трещинах становятся неразличимыми, поэтому конвективные обменные потоки исчезают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory//Lecture Notes in Physics. 127. Berlin: Springer-Verlag, 1980. P. 398.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Панасенко Г. П. Осреднение процессов в сильно неоднородных структурах//Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 1. С. 76—79.
4. Панасенко Г. П. Численно-асимптотический метод многокомпонентного осреднения для уравнений с контрастными коэффициентами//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 2. С. 243—253.
5. Панфилов М. В. Осредненная модель фильтрации в сильно неоднородных средах//Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 313—317.
6. Panfilov M. V. Irregular averaging of filtration transfer processes in heterogeneous media//Proc. 2nd European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Arles, France, September 11—14. 1990. Paris: Technip, 1990. P. 347—350.

7. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах//ПММ. 1960. Т. 24. № 5. С. 852—864.
8. Саламатин А. Н. Математические модели дисперсных потоков. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1987. 172 с.
9. Егоров А. Г., Саламатин А. Н. Об осредненном описании процессов теплопереноса при фильтрации в трещиноватых и пористых средах//Теплофиз. высоких температур. 1984. Т. 22. № 5. С. 919—923.
10. Ибрагимов А. И. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Математический ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. 290 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.III.1992