

УДК 532.546

© 1992 г. Р. Д. КАНЕВСКАЯ, М. И. ШВИДЛЕР

ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА
НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ
ПРИ АНИЗОТРОПИИ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ

Осредненное описание фильтрационного переноса неоднородных жидкостей в неоднородных по проводимости средах приводит к системе уравнений многофазной фильтрации с тензорными функциями абсолютной и фазовых проницаемостей [1]. Решение задач фильтрации в том случае, когда относительные фазовые проницаемости — тензорные функции, сопряжено со значительными сложностями и требует специального анализа. В работе исследуется система уравнений двумерной двухфазной фильтрации в среде, анизотропной по абсолютной и относительным проницаемостям. Рассматриваются простейшие примеры течения.

1. Рассмотрим глобально осредненную систему уравнений двумерной двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей, полагая, что масштаб осреднения много больше масштаба неоднородности, а распределение средних насыщенных по компонентам композитной среды является квазиравновесным [1]. Во многих практически важных случаях эффективным капиллярным скачком давления между фазами можно пренебречь по сравнению с внешним перепадом, поэтому в последующем рассмотрении примем, что эффективные давления в фазах равны

$$m \frac{\partial s_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$s_1 = s, \quad s_2 = 1 - s$$

$$\mathbf{V}_i = - \frac{K f_i}{\mu_i} \nabla p \quad (1.2)$$

Здесь m — пористость, K — тензор абсолютной проницаемости, s — насыщенность порового пространства смачивающей фазой, p — давление, $\mathbf{V}_i = (u_i, v_i)$ — вектор скорости фильтрации i -й фазы, $f_i(s)$ — тензор относительной проницаемости i -й фазы, μ_i — вязкость.

Положим, что $\mathbf{V} = (u, v) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ — суммарная скорость фильтрации; $\psi_x = f_{1x}/\mu_1 + f_{2x}/\mu_2$, $\psi_y = f_{1y}/\mu_1 + f_{2y}/\mu_2$ — суммарные подвижности фаз в направлениях главных осей тензоров абсолютной и относительной проницаемостей, которые предполагаются совпадающими; $F_x = \psi_x^{-1} f_{1x}/\mu_1$, $F_y = \psi_y^{-1} f_{1y}/\mu_1$ — доли смачивающей фазы в потоке в соответствующих направлениях. Из уравнений (1.2) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{u}{k_x \Psi_x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{v}{k_y \Psi_y}$$

В области существования и непрерывности вторых смешанных производных давления система (1.1), (1.2) может быть преобразована к виду

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u F_x}{\partial x} + \frac{\partial v F_y}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{k_y \Psi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{k_x \Psi_x} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3) — (1.5) представляют собой замкнутую систему относительно трех неизвестных функций: s , u , v .

Семейство характеристических поверхностей системы (1.3) — (1.5) $\lambda = \text{const}$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} & (\lambda_x m + \lambda_x u F_{xs} + \lambda_y v F_{ys}) \left(\frac{\lambda_x^2}{k_y \Psi_y} + \frac{\lambda_y^2}{k_x \Psi_x} \right) - \\ & - \lambda_x \lambda_y (F_x - F_y) \left(\lambda_x \frac{v \Psi_{ys}}{k_y \Psi_y^2} - \lambda_y \frac{u \Psi_{xs}}{k_x \Psi_x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$F_{x,ys} = \frac{dF_{x,y}}{ds}, \quad \Psi_{x,ys} = \frac{d\Psi_{x,y}}{ds}$$

Здесь $(\lambda_x, \lambda_x, \lambda_y)$ — вектор нормали к характеристической поверхности в точке (t, x, y) .

Характеристическое соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_x^2}{k_y \Psi_y} + \frac{\lambda_y^2}{k_x \Psi_x} \right) m \frac{\partial s}{\partial t} + \left\{ u F_{xs} \left(\frac{\lambda_x^2}{k_y \Psi_y} + \frac{\lambda_y^2}{k_x \Psi_x} \right) - \lambda_x \lambda_y (F_x - F_y) \frac{v \Psi_{ys}}{k_y \Psi_y^2} \right\} \frac{\partial s}{\partial x} + \\ & + \left\{ v F_{ys} \left(\frac{\lambda_x^2}{k_y \Psi_y} + \frac{\lambda_y^2}{k_x \Psi_x} \right) + \lambda_x \lambda_y (F_x - F_y) \frac{u \Psi_{xs}}{k_x \Psi_x^2} \right\} \frac{\partial s}{\partial y} + \\ & + \frac{\lambda_y}{k_x \Psi_x} (F_x - F_y) \left[\lambda_y \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_x \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_x}{k_y \Psi_y} (F_x - F_y) \left[\lambda_x \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda_y \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \\ & = \lambda_x \lambda_y (F_x - F_y) \left[\frac{v}{k_y^2 \Psi_y} \frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{u}{k_x^2 \Psi_x} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

В частности, из уравнений (1.6), (1.7) следует, что при $F_x = F_y$ характеристические поверхности являются изосатами $s = \text{const}$. Другой случай, когда на характеристических поверхностях насыщенность постоянна, имеет место, если $\partial k_y / \partial x = \partial k_x / \partial y = 0$ и постоянен вектор скорости фильтрации вдоль линий пересечения характеристических поверхностей плоскостями $t = \text{const}$. При этих условиях каждое из выражений в квадратных скобках в (1.7) обращается в ноль. Пример такого течения будет рассматриваться ниже.

2. Система уравнений (1.1), (1.2) допускает разрывные решения. Условия на скачке имеют вид

$$Wm[s] = \lambda_x [u F_x] + \lambda_y [v F_y] \quad (2.1)$$

$$\lambda_x [u] + \lambda_y [v] = 0 \quad (2.2)$$

$$\lambda_x [p] = \lambda_y [p] = 0 \quad (2.3)$$

Здесь (λ_x, λ_y) — единичный вектор нормали к линии разрыва в плоскости (x, y) , W — скорость движения разрыва, $[A] = A^+ - A^-$ — разность значений величины A по разные стороны от разрыва. Из соотношений (2.2), (2.3) следует, что разрывы представляют собой «поверхности скольжения», на которых давление p и нормальная к линии разрыва составляющая суммарной скорости фильтрации $u \lambda_x + v \lambda_y$ непрерывны. Допускаются скачки тангенциальной компоненты скорости $u \lambda_y - v \lambda_x$ и насыщенности s . Как и в одномерном случае, на скачке насыщенности терпит разрыв и градиент давления. На скачке ∇p имеем

$$\lambda_x \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] - \lambda_y \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0$$

или

$$\lambda_x \left[\frac{v}{k_y \Psi_y} \right] - \lambda_y \left[\frac{u}{k_x \Psi_x} \right] = 0 \quad (2.4)$$

Если $[s] \neq 0$, то:

$$W = \lambda_x \frac{[uF_x]}{m[s]} + \lambda_y \frac{[vF_y]}{m[s]} \quad (2.5)$$

Если при этом суммарная скорость фильтрации непрерывна: $[u] = [v] = 0$, то

$$W = \lambda_x \frac{u}{m} \frac{[F_x]}{[s]} + \lambda_y \frac{v}{m} \frac{[F_y]}{[s]}$$

В противном случае из уравнений (2.2), (2.5) с учетом того, что $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$, имеем

$$W = \frac{[v] [uF_x] - [u] [vF_y]}{m [s] \sqrt{[u]^2 + [v]^2}}$$

Для единственности обобщенного решения требуется выполнение дополнительных условий допустимости (устойчивости относительно изменения начальных данных) разрывов. В случае, когда обобщенное решение уравнения (1.3) является кусочно-гладкой функцией в некоторой окрестности точки разрыва, условие допустимости сводится к тому, что вдоль поверхности разрыва для любого постоянного значения s выполняется неравенство [2]

$$\begin{aligned} & -m |s^+ - s^-| W + \text{sign}(s^+ - s^-) \{ (uF_x)^+ - uF_x(s) \} \lambda_x + \text{sign}(s^+ - s^-) \{ (vF_y)^+ - vF_y(s) \} \lambda_y \leq \\ & \leq -m |s^- - s^+| W + \text{sign}(s^- - s^+) \{ (uF_x)^- - uF_x(s) \} \lambda_x + \text{sign}(s^- - s^+) \{ (vF_y)^- - vF_y(s) \} \lambda_y, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда, в частности подстановкой $s = s^+$ и $s = s^-$, может быть получено условие на скачке (2.5). Можно показать, что для любого значения $s \in (s^+, s^-)$ условие допустимости (2.6) эквивалентно следующим неравенствам:

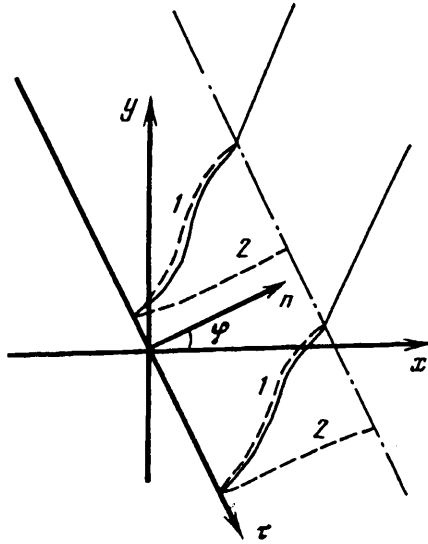
$$\begin{aligned} & \frac{(uF_x)^+ - uF_x}{s^+ - s} \lambda_x + \frac{(vF_y)^+ - vF_y}{s^+ - s} \lambda_y \leq mW = \frac{[uF_x] \lambda_x}{[s]} + \frac{[vF_y] \lambda_y}{[s]} \leq \\ & \leq \frac{(uF_x)^- - uF_x}{s^- - s} \lambda_x + \frac{(vF_y)^- - vF_y}{s^- - s} \lambda_y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что в одномерном случае, когда $\lambda_x = 0$ или $\lambda_y = 0$, неравенства (2.7) совпадают с известными неравенствами [3].

Таким образом, обобщенное решение любой задачи двумерной двухфазной фильтрации в среде, анизотропной не только по абсолютной, но и по фазовым проницаемостям, в области непрерывности должно удовлетворять системе (1.3)–(1.5), а на скачке — условиям (2.1)–(2.4) и, кроме того, условию допустимости (2.7).

3. Рассмотрим простейший пример двухфазного течения в однородно-анизотропной среде — вытеснение нефти водой от бесконечной галереи, расположенной под произвольным углом к главным осям тензора проницаемости, при заданном расходе и давлении нагнетания. Пусть s_0 — начальная насыщенность, s^0 — насыщенность на нагнетательной галерее, $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ — координаты единичного вектора нормали к линии нагнетания в системе координат, связанной с главными осями тензора проницаемости (фиг. 1).

Введем новую систему координат (n, τ) , ось τ которой направлена вдоль линии нагнетания, а ось n ортогональна к ней. Пусть $w_n = u \cos \varphi + v \sin \varphi$,



Фиг. 1

$w_x = u \sin \varphi - v \cos \varphi$ — проекции вектора скорости фильтрации W на направления n и τ . В соответствии с граничными условиями

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial w_\tau}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение (1.4) с учетом (3.1) дает $\frac{\partial w_n}{\partial n} = 0$, т. е. $w_n = w_n(t)$. Из уравнений (1.2) и (3.1) имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{u}{k_x \Psi_x \cos \varphi} = \frac{v}{k_y \Psi_y \sin \varphi}$$

$$w_n = - (k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi) \frac{\partial p}{\partial n} \quad (3.2)$$

$$u = w_n \frac{k_x \Psi_x \cos \varphi}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi}$$

$$v = w_n \frac{k_y \Psi_y \sin \varphi}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi}$$

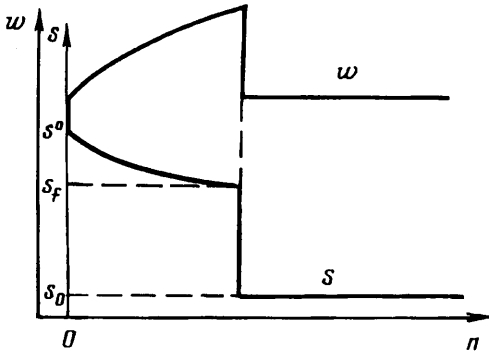
Согласно условиям (3.1), $\partial u / \partial \tau = \partial v / \partial \tau = 0$. Поэтому из уравнений (1.6), (1.7), определяющих характеристические поверхности, следует что на этих поверхностях насыщенность постоянна: $s = \text{const}$. Кроме того, $\lambda_x = \cos \varphi$, $\lambda_y = \sin \varphi$. Для определения λ_t воспользуемся уравнением (1.6)

$$\lambda_t = - \frac{w_n}{m} \left(\frac{k_x \Psi_x F_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y F_y \sin^2 \varphi}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi} \right); \quad (3.3)$$

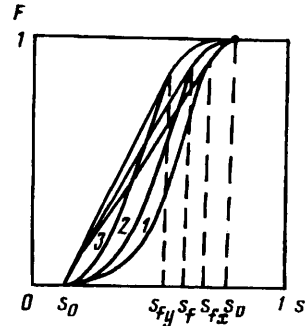
Таким образом, характеристические поверхности представляют собой плоскости, параллельные линии нагнетания.

Рассматриваемая задача имеет разрывное решение. Очевидно, что линия разрыва удовлетворяет условию $\lambda_x = \cos \varphi$, $\lambda_y = \sin \varphi$. Скорость движения разрыва задается уравнением (2.5), которое с учетом (2.2) и (3.2) дает

$$W = \frac{w_n}{m} \left[\frac{k_x \Psi_x F_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y F_y \sin^2 \varphi}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi} \right] [s]^{-1} \quad (3.4)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

На разрыве $W = -\lambda$, причем фронтовое значение насыщенности определяется в соответствии с условиями допустимости (2.7).

На основе уравнений (3.2), (3.3), (3.4) можно ввести модифицированные абсолютную k_M и относительные f_{iM} проницаемости, а также модифицированную функцию F_M доли вытесняющей фазы в потоке в направлении нормали к линии нагнетания

$$F_M = (k_x \Psi_x F_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y F_y \sin^2 \varphi) (k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi)^{-1}$$

$$k_M \left(\frac{f_{1M}}{\mu_1} + \frac{f_{2M}}{\mu_2} \right) = k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi$$

Отсюда

$$k_M f_{iM} = k_x f_{ix} \cos^2 \varphi + k_y f_{iy} \sin^2 \varphi, \quad k_M = k_x \cos^2 \varphi + k_y \sin^2 \varphi \quad (3.5)$$

Итак, распределение насыщенности зависит только от координаты $n = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ и времени t и определяется аналогично классическому решению задачи Баклея — Леверетта [4], но с использованием модифицированных функций фазовых проницаемостей (3.5) (фиг. 2)

$$m (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \left[\int_0^s w_n(\omega) d\omega \right]^{-1} = \frac{dF_M}{ds}, \quad s_f \leq s \leq s^0$$

$$s = s_0, \quad m (x \cos \varphi + y \sin \varphi) > \int_0^s w_n(\omega) d\omega \frac{dF_M(s_f)}{ds}$$

Здесь s_f — насыщенность на фронте вытеснения, которая определяется на плоскости $(s, F_M(s))$ как абсцисса точки касания прямой, проведенной через точку $(s_0, F_M(s_0))$, и кривой $F_M(s)$ (фиг. 3). На фиг. 3 кривые F_x , F_M и F_y обозначены цифрами 1, 2, 3 соответственно.

Поскольку модифицированные фазовые проницаемости являются средневзвешенными соответствующих значений вдоль направлений x и y , то функция F_M заключена в интервале между F_x и F_y . При изменении угла φ , определяющего ориентацию линии нагнетания, значение насыщенности на фронте s_f также меняется от $s_f = s_{fx}$ при $\varphi = 0$ до $s_f = s_{fy}$ при $\varphi = \pi/2$, которые, как показано на примерах в [1], могут существенно различаться.

Распределение скоростей фильтрации в среде, анизотропной по фазовым проницаемостям, также имеет существенные отличия.

Если нормальная к нагнетательной галерее компонента суммарной скорости фильтрации w_n определяется только граничными условиями на линии нагнетания, то тангенциальная компонента w_t зависит также от угла φ и насыщенности s . Из (3.2) имеем

$$w_{ti} = w_n \frac{k_x f_{xi} - k_y f_{yi}}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.6)$$

$$w_z = w_n \frac{k_x \Psi_x - k_y \Psi_y}{k_x \Psi_x \cos^2 \varphi + k_y \Psi_y \sin^2 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi$$

Отсюда, в частности, следует, что $w_z = 0$ в случае, когда нагнетательная галерея параллельна одной из главных осей тензора проницаемости, и w_z максимальна при $\varphi = \pi/4$. При заданном φ величина w_z меняется в зависимости от s и на скачке насыщенности терпит разрыв. Это приводит к изменению суммарной скорости фильтрации $w = \sqrt{w_n^2 + w_z^2}$ не только по величине, но и по направлению (фиг. 1, 2). На фиг. 1 сплошными линиями показаны линии тока поля суммарной скорости фильтрации в фиксированный момент времени; линия разрыва показана штрихпунктиром. Линии тока отдельных фаз показаны пунктирными линиями 1 и 2 соответственно номеру фазы. На фиг. 2 наряду с распределением насыщенности вдоль оси n приведен характерный график суммарной скорости фильтрации w .

Таким образом, при вытеснении в анизотропной среде от нагнетательной галереи, не параллельной главным осям тензора проницаемости, происходит «снос» потока, причем «снос» каждой из фаз различен. В частности, если анизотропия фазовых проницаемостей порождена слоистостью микроструктуры среды [1], то продольная эффективная фазовая проницаемость смачивающей жидкости существенно меньше поперечной, тогда как для несмачивающей жидкости картина обратная. Поэтому из формулы (3.6) следует, что $w_{z1} w_{z2} < 0$, т. е. отклонение направления потоков каждой из фаз от нормали n происходит в противоположные стороны; направление фильтрации смачивающей фазы ближе к продольному, а несмачивающей — к поперечному. Поток каждой жидкости отклоняется от общего потока в том направлении, в котором выше фазовая проницаемость этой жидкости.

4. Рассмотрим теперь приток двухфазной жидкости к одиночной скважине, имитируемой точечным стоком, расположенным в начале координат бесконечного анизотропного пласта. Пусть s^* — начальная водонасыщенность ($s_0 < s^* < s^{\circ}$), $Q(t)$ — заданный отбор на скважине. В отличие от течения с изотропными фазовыми проницаемостями, $s \equiv \text{const}$ не является решением в данном случае.

Действительно, предположим, что $s \equiv \text{const}$ — решение. Тогда из уравнения (1.3) с учетом (1.4) имеем

$$(F_x - F_y) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Таким образом, тривиальное решение $s \equiv \text{const}$ может иметь место, только если $F_x = F_y$, например в пласте, изотропном по фазовым проницаемостям, либо если $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y = 0$. Второе условие выполняется, в частности, в случае притока к галерее (см. разд. 3). Приведенные рассуждения предопределяют полезность рассмотрения притока к точечному стоку в анизотропном пласте при постоянной начальной насыщенности.

Пусть для простоты $\Psi_x = \Psi_y = \Psi \approx \text{const}$, т. е. $d\Psi/ds \approx 0$, но $f_{ix} \neq f_{iy}$. Изучаемое течение симметрично относительно осей x и y , поэтому можно рассматривать только четверть координатной плоскости $x \geq 0, y \geq 0$.

Введем эллиптическую систему координат (z, φ) таким образом, что линии $z = \text{const}$ являются изобарами, а угол φ определяется уравнением $\text{tg } \varphi = y \sqrt{k_x} / x \sqrt{k_y}$. Перейдем к новым переменным

$$u' = u \sqrt[4]{\frac{k_y}{k_x}}, \quad v' = v \sqrt[4]{\frac{k_x}{k_y}}, \quad x' = x \sqrt[4]{\frac{k_y}{k_x}}, \quad y' = y \sqrt[4]{\frac{k_x}{k_y}},$$

Из уравнений (1.2) получим

$$u' = -\sqrt{k_x k_y} \Psi \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'}, \quad v' = -\sqrt{k_x k_y} \Psi \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'}$$

Введем вектор $\vec{w}' = (u', v')$ и обозначим через w'_n и w'_z его компоненты, направленные соответственно по нормали и вдоль изобары.

Можно показать, что в случае, когда $\Psi_x = \Psi_y$, изобары являются эллипсами $z^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 \sqrt{k_y/k_x} + y^2 \sqrt{k_x/k_y}$. В частности, при $k_x = k_y$ линии равного давления представляют собой концентрические окружности. Поскольку $u \partial z / \partial y' - v \partial z / \partial x' = 0$, то $w'_t = 0$. Отсюда

$$w' = w'_n = -\sqrt{k_x k_y} \psi \frac{\partial p}{\partial z}$$

Заметим, что упрощающее допущение $\Psi \approx \text{const}$ приводит к тому, что w'_n не зависит от φ . Поскольку $\text{tg } \varphi = y'/x'$, то $\partial z / \partial x' = \cos \varphi$, $\partial z / \partial y' = \sin \varphi$, $u = w'_n \cos \varphi$, $v = w'_n \sin \varphi$ и уравнение (1.4) принимает вид

$$\frac{\partial w'_n}{\partial z} + \frac{w'_n}{z} = 0$$

Для определения w'_n воспользуемся заданным отбором $Q(t)$. Поскольку жидкости несжимаемые, расход через любой замкнутый контур, внутри которого заключен сток, равен $Q(t)$. В частности, имеем

$$Q(t) = \int_{z=\text{const}} w_n dl$$

Здесь dl — элемент дуги изобары $z = \text{const}$

$$z^2 = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} x^2 + \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} y^2$$

$$dl = \sqrt{x^2 + y^2} d\varphi = z \left(\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \cos^2 \varphi + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \sin^2 \varphi \right)^{1/2} d\varphi$$

Учитывая, что

$$w_n = u \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \frac{x}{z} + v \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \frac{y}{z} = \frac{u'x'}{z} + \frac{v'y'}{z} = u' \cos \varphi + v' \sin \varphi = w'_n$$

получим

$$w'_n = Q(t)/zE \tag{4.1}$$

$$E = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \cos^2 \varphi + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \sin^2 \varphi \right)^{1/2} d\varphi$$

При $k_x = k_y$ имеем $w_n = Q(t)/2\pi z$.

Переходя в уравнении (1.7), определяющем распределение насыщенности на характеристической поверхности, к новым переменным (z, φ) и учитывая (4.1), получим

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{Q(t)}{zE} (F_{xs} \cos^2 \varphi + F_{ys} \sin^2 \varphi) \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{Q(t)}{z^2 E} (F_{ys} - F_{xs}) \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \\ = -\frac{Q(t)}{z^2 E} (F_y - F_x) \cos 2\varphi \end{aligned} \tag{4.2}$$

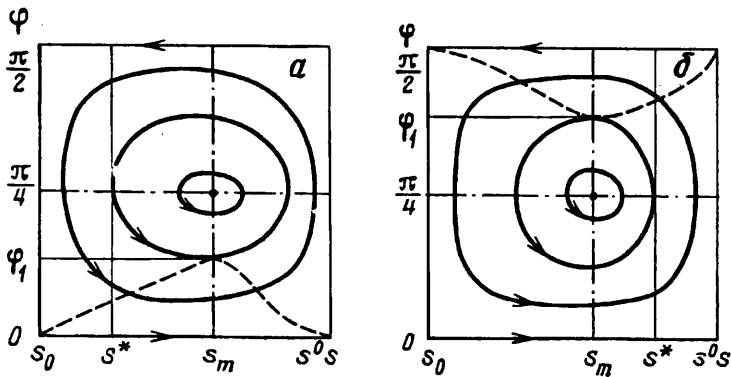
Уравнение (4.2) и начальные условия допускают введение автомодельной переменной

$$\begin{aligned} \xi = -\frac{1}{2} m E z^2 \left(\int_0^t Q(\omega) d\omega \right)^{-1} \\ - (\xi + (F_{xs} \cos^2 \varphi + F_{ys} \sin^2 \varphi)) \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{F_{ys} - F_{xs}}{4\xi} \sin 2\varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \\ = \frac{(F_y - F_x)}{2\xi} \cos 2\varphi, \quad s(\infty \varphi) = s^* \end{aligned} \tag{4.3}$$

Заметим, что притоку жидкости соответствует случай $Q(t) < 0$, поэтому $\xi \geq 0$. Характеристики уравнения (4.3) определяются следующим образом:

$$\frac{ds}{d\xi} = -\frac{F_y - F_x}{2\xi (\xi + (F_{xs} \cos^2 \varphi + F_{ys} \sin^2 \varphi))} \cos 2\varphi \tag{4.4}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{F_{ys} - F_{xs}}{4\xi (\xi + (F_{xs} \cos^2 \varphi + F_{ys} \sin^2 \varphi))} \sin 2\varphi \tag{4.5}$$



Фиг. 4

Система (4.4), (4.5) имеет первый интеграл. Вдоль характеристик выполняется соотношение

$$(F_y - F_x) \sin 2\varphi = C = \text{const} \quad (4.6)$$

Уравнение для линии разрыва (2.5) после введения новых переменных имеет вид

$$\frac{d\xi_f}{d\varphi} = \frac{\xi_f + [F_x \cos^2 \varphi + F_y \sin^2 \varphi] / [s]}{\sin \varphi \cos \varphi [F_y - F_x] / [s]} 2\xi_f \quad (4.7)$$

Подстановка выражений (4.5), (4.7) в условия допустимости разрыва (2.7) приводит к следующим неравенствам:

$$\frac{d\xi^-}{d\varphi} \left(\frac{d\xi^-}{d\varphi} - \frac{d\xi_f}{d\varphi} \right) \leq 0 \leq \frac{d\xi^+}{d\varphi} \left(\frac{d\xi^+}{d\varphi} - \frac{d\xi_f}{d\varphi} \right) \quad (4.8)$$

При построении решения для определенности будем рассматривать случай $F_y - F_x \geq 0$ (фиг. 3). При $F_y - F_x \leq 0$ решение строится аналогично.

В соответствии с (4.6) образы характеристических кривых на плоскости (s, φ) являются участки замкнутых линий $(F_y - F_x) \sin 2\varphi = \text{const}$ (фиг. 4). Причем движению вдоль фиксированной характеристики соответствует движение вдоль определенной линии на плоскости (s, φ) . В случае притока жидкости к стоку значение ξ вдоль характеристики уменьшается. Из уравнений (4.4), (4.5) видно, что при убывании ξ , насыщенность s возрастает, если $0 \leq \varphi < \pi/4$, и убывает, если $\pi/4 < \varphi \leq \pi/2$, а угол φ убывает, если $s_0 \leq s < s_m$, и возрастает, если $s_m < s \leq s^0$. Здесь s_m — значение насыщенности, при котором разность $F_y - F_x$ максимальна. Соответствующее направление движения вдоль характеристик на фиг. 4 показано стрелками. Начальное условие на плоскости (s, φ) изображается прямой $s = s^0$. Затем насыщенность меняется вдоль характеристик в соответствии с указанным направлением.

Исследуем асимптотическое поведение решения уравнений (4.4), (4.5). При $\xi \rightarrow \infty$ из (4.5) имеем $d\varphi/d\xi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \text{const}$, при этом из (4.4) следует, что $ds/d\xi \rightarrow 0$, т. е. $s \rightarrow s^0$.

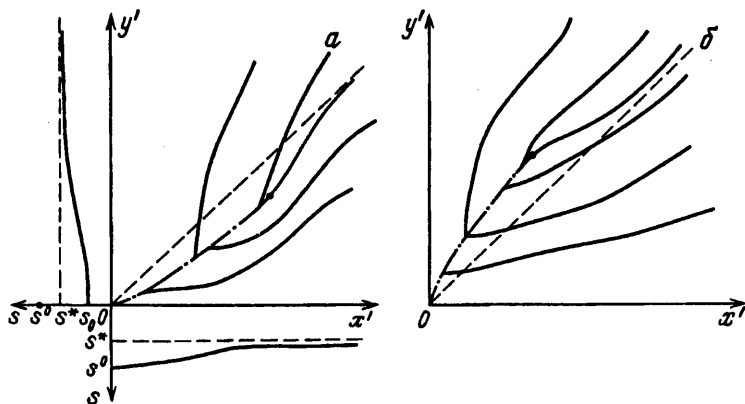
При $\xi \rightarrow 0$ уравнение (4.4) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{d \ln \xi}{ds} = - \frac{F_{xs} + F_{ys}}{(F_y - F_x) \cos 2\varphi} + \frac{F_{ys} - F_{xs}}{F_y - F_x}$$

Отсюда с учетом (4.6) имеем

$$\xi \sim (F_y - F_x) \exp \left[\text{sign} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \int \frac{F_{xs} + F_{ys}}{\sqrt{(F_y - F_x)^2 - C^2}} ds \right]$$

При $\varphi < \pi/4$ насыщенность вдоль характеристик возрастает, а при $\varphi > \pi/4$ убывает, поэтому показатель экспоненты в обоих случаях отрицательный. Если $\xi \rightarrow 0$, то либо $F_y - F_x \rightarrow 0$, либо $\sqrt{(F_y - F_x)^2 - C^2} = (F_y - F_x) |\cos 2\varphi| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что при $\xi \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \pi/4$, за исключением характеристик, на которых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ из (4.5) имеем $d\varphi/d\xi = 0$, т. е. вдоль характеристики $\varphi = \text{const}$. При $\varphi = 0$ из уравнения (4.4) следует, что $ds/d\xi < 0$ и $s \rightarrow s^0$ при $\xi \rightarrow 0$. При $\varphi = \pi/2$ уравнение (4.4) дает $ds/d\xi > 0$ и $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow 0$.



Фиг. 5

Перейдем теперь к построению характеристических кривых уравнения (4.3). Рассмотрим вначале случай $s^* < s_m$ (фиг. 4, а, 5, а). Вдоль характеристик, на которых $0 \leq \varphi(\infty) \leq \pi/4$, при достаточно больших ξ $ds/d\xi < 0$, $d\varphi/d\xi > 0$. Затем по достижении насыщенности значения s_m знак $d\varphi/d\xi$ меняется. Вдоль траекторий, на которых $\pi/4 < \varphi(\infty) \leq \pi/2$, при $\varphi > \pi/4$ выполняются условия $ds/d\xi > 0$, $d\varphi/d\xi < 0$. После пересечения характеристиками луча $\varphi = \pi/4$ насыщенность s вдоль них возрастает при уменьшении ξ . (На фиг. 5 луч $\varphi = \pi/4$ показан пунктиром.) Как видно на фиг. 4, а, угол φ при этом убывает до некоторого значения φ_{\min} при $s = s_m$ и указанные траектории пересекают характеристику, на которой $\varphi(\infty) = \pi/4$, поскольку для любой характеристической кривой, пересекающей луч $\varphi = \pi/4$, имеет место неравенство $\varphi_{\min} < \varphi_1$, а вдоль характеристики, на которой $\varphi(\infty) = \pi/4$, $\varphi \geq \varphi_1$. Здесь φ_1 — соответствующее значение φ_{\min} вдоль характеристики, на которой $\varphi(\infty) = \pi/4$ (фиг. 4, а).

Таким образом, при $s = s_m$, $\varphi = \varphi_1$ возникает разрыв насыщенности. В этой точке $s^+ = s^- = s$ и $[s] = 0$, однако по мере убывания ξ величина $[s]$ меняется. В точке возникновения скачка $d\xi_j/d\varphi$ совпадает со значением $d\xi/d\varphi$ на характеристике, на которой $\varphi(\infty) = \pi/4$. Затем значение s^- приносится траекторией, где $\varphi(\infty) > \pi/4$, а значение s^+ — траекторией, на которой $\varphi(\infty) = \pi/4$. Поэтому в некоторой окрестности начальной точки скачка $[F_y - F_x]/[s] > 0$ и $d\xi_j/d\varphi > 0$. Пусть при $\xi_j \rightarrow 0$ $s^+ \rightarrow s_1^+$, $s^- \rightarrow s_1^-$. Тогда из уравнения (4.7) при $\xi_j \rightarrow 0$ имеем:

$$\xi_j \sim \left((\sin \varphi)^{[F_{x1}]/[s_1]} (\cos \varphi)^{-[F_{y1}]/[s_1]} \right)^{[s_1]/[F_{y1} - F_{x1}]}$$

Отсюда следует, что при $\xi \rightarrow 0$ вдоль линии разрыва $[F_y - F_x] \rightarrow 0$, причем при $[F_y - F_x]/[s] \geq 0$ значение $d\xi_j/d\varphi \geq 0$ и $\varphi < \pi/4$, а при $[F_y - F_x]/[s] \leq 0$ $d\xi_j/d\varphi \leq 0$ и $\varphi > \pi/4$. На фиг. 5, а разрыв показан штрихпунктирной линией. Легко проверить, что построенный разрыв удовлетворяет условиям допустимости (4.8). На фиг. 4, а пунктирными линиями показаны зависимости $s^+(\varphi_j)$ и $s^-(\varphi_j)$.

При $s^* > s_m$ решение строится аналогично (фиг. 4, б и 5, б). При $s^* = s_m$ картина траекторий аналогична приведенной на фиг. 5, б, но вдоль разрыва $\xi \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \pi/4$. Слева от разрыва $ds/d\xi > 0$, $d\varphi/d\xi > 0$ и $s < s_m$. Справа от разрыва при $\varphi_j > \varphi > \pi/4$: $ds/d\xi > 0$, $d\varphi/d\xi < 0$. При $\varphi < \pi/4$ имеем $ds/d\xi < 0$, $d\varphi/d\xi < 0$.

Заметим, что при $F_x = F_y$ из уравнений (4.4), (4.5) следует, что $ds/d\xi = 0$, $d\varphi/d\xi = 0$ и решение задачи о притоке тривиально: $s \equiv s^*$. Таким образом, анизотропия среды по фазовым проницаемостям существенно влияет на распределение насыщенности в процессе притока двухфазной жидкости. На фиг. 5, а показано распределение насыщенности вдоль осей в зависимости от ξ . Вдоль оси x насыщенность выше, чем вдоль оси y . Перераспределение жидкостей в пласте в процессе притока приводит к выравниванию доли каждой из фаз в потоке в различных направлениях, так как в рассматриваемом примере $F_y > F_x$. Поскольку приток первой фазы вдоль направления x менее эффективен, чем вдоль направления y , смачивающая жидкость как бы «накапливается» вдоль оси x при приближении к стоку, тогда как вдоль оси y насыщенность, наоборот, снижается по мере приближения к стоку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Швидлер М. И. Осредненное описание фильтрационного переноса несмешивающихся жидкостей в средах с маломасштабной неоднородностью//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 6. С. 92—99.
2. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сборник. 1970. Т. 81. № 2. С. 228—255.
3. Олейник О. А. Об одном классе разрывных решений квазилинейного уравнения первого порядка// Науч. докл. высш. шк. физ.-мат. наук. 1958. № 3. С. 91—98.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.V.1991