МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1992

УДК 532.546

© 1992 г. А. В. КОПАЕВ, В. М. РАДЫГИН

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЯМЫХ

В [1—2] на примерах решения задач сопряжения для трех концентрических окружностей и двух концентрических сфер, возникающих при построении потенциалов установившихся фильтрационных течений в кусочно-однородных средах, предложен достаточно универсальный метод «функциональных уравнений».

В настоящей работе показана возможность применения указанного метода к решению задач сопряжения для n параллельных прямых на примере трех таких прямых.

При этом получающееся для полуплоскости функциональное уравнение решается методом интегральных преобразований, в отличие от [1—2], где функциональное уравнение решалось путем разложения его правой и левой частей в соответствующие степенные ряды.

1. Рассмотрим плоскопараллельную установившуюся фильтрацию жидкости в кусочно-однородной пористой среде. В каждой из областей однородности такой среды фильтрационное течение характеризуется комплексным потенциалом $f(z)$, представляющим собой аналитическую функцию, а особые точки фильтрационного течения определяются особыми точками аналитической функции f.

Пусть область фильтрационного течения состоит из областей, разделенных двумя параллельными прямыми, заданными уравнениями

$$\operatorname{Re} z = r_j,\ j = 1,\ 2\ \ (r_1 > r_2)$$

Особые точки фильтрационного течения располагаются произвольно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < r_0$ $(r_0 > r_1)$, исключая границы раздела областей.

Введем обозначения

$$D_j^+ = \{z : \operatorname{Re} z > r_j\},\ \ D_j^- = \{z : \operatorname{Re} z < r_j\}$$

$$l_j = \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta = r_j\},\ \ j = 0, 1, 2$$

$$E_j = \{z : r_j < \operatorname{Re} z < r_{j-1}\},\ j = 1,\ 2$$

Пусть $f_1(z) = u_1 + iv_1$ описывает фильтрационное течение в полуплоскости D_1^+ с проницаемостью k_1; $f_2(z) = u_2 + iv_2$ — в полосе E_2 с проницаемостью k_2; $f_3(z) = u_3 + iv_3$ — в полуплоскости D_2^- с проницаемостью k_3.

При этом на прямых l_1 и l_2 выполняются условия [3]

$$l_j\colon\ u_j = u_{j+1},\ k_j v_j = k_{j+1} v_{j+1},\ \ j = 1, 2 \tag{1.1}$$

Изменим проницаемость в полуплоскости D_0^+ с k_1 на k_0 и найдем комплексные потенциалы $W_j(z) = \varphi_j + i\psi_j$, $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, описывающие возмущенные фильтрационные течения в областях D_0^+, E_1, E_2, D_2^-. Так как изменение проницаемости в полуплоскости D_0^+ не влияет на особые точки течения, то комплексные потенциалы $W_j(z)$ можно представить в виде

$$W_j(z) = f_j(z) + g_j(z),\ j = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.2}$$

где $g_j(z)$, $j = 1,\ 2,\ 3,$— функции, аналитические и ограниченные соответственно в областях E_1, E_2, D_2^-. Учитывая (1.1) и представления (1.2) , условия на границах раздела указанных областей запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&l_0\colon\ g_1 = \frac{k_1+k_0}{2k_1} W_0 + \frac{k_1-k_0}{2k_1}\overline{W_0} - f_1 \\
&l_j\colon\ g_{j+1} = \frac{k_{j+1}+k_j}{2k_{j+1}} g_j + \frac{k_{j+1}-k_j}{2k_{j+1}}\overline{g_j},\quad j=1,2
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Рассмотрим функции

$$
\begin{aligned}
&G_0(z) = \frac{k_0+k_1}{2k_1} W_0(z) - f_1(z) \\
&G_1(z) = g_1(z) + \frac{k_0-k_1}{2k_1}\overline{W_0(2r_0-\bar z)}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

аналитические соответственно в областях D_0^+, E_1, при этом на прямой l_0 выполняется равенство $G_0 = G_1$. Тогда функции $G_0(z)$ и $G_1(z)$ являются аналитическим продолжением друг друга через прямую l_0, т. е. существует функция $H_1(z)$ — аналитическая и ограниченная в полуплоскости D_1^+, такая, что

$$
H_1(z) = \begin{cases} G_0(z), & \operatorname{Re} z > r_0 \\ G_1(z), & r_1 < \operatorname{Re} z < r_0 \end{cases}
\tag{1.5}
$$

На прямой l_1 имеем

$$
H_1(\zeta) = g_1(\zeta) + \frac{k_0-k_1}{2k_1}\overline{W_0(2r_0-\bar\zeta)}
$$

$$
g_2(\zeta) = \frac{k_2+k_1}{2k_2}\left(H_1(\zeta) + \frac{k_1-k_0}{2k_1}\overline{W_0(2r_0-\bar\zeta)}\right) +
$$

$$
+ \frac{k_2-k_1}{2k_2}\left(\overline{H_1(\zeta)} + \frac{k_1-k_0}{2k_1} W_0(\zeta+2h_1)\right),\quad h_1 = r_0 - r_1
$$

Далее, рассуждая аналогично, рассмотрим аналитическую и ограниченную в полуплоскости D_2^+ функцию

$$
H_2(z) = \begin{cases} \dfrac{k_2+k_1}{2k_2} H_1(z) + \dfrac{(k_2-k_1)(k_1-k_0)}{4k_1k_2} W_0(z+2h_1), \quad \operatorname{Re} z > r_1 \\ g_2(z) + \dfrac{k_1-k_2}{2k_2}\overline{H_1(2r_1-\bar z)} + \dfrac{(k_2+k_1)(k_0-k_1)}{4k_1k_2}\overline{W_0(2r_0-\bar z)}, \\ r_2 < \operatorname{Re} z < r_1 \end{cases}
\tag{1.6}
$$

На прямой l_2 имеем

$$
H_2(\zeta) = g_2(\zeta) + \frac{k_1-k_2}{2k_2}\overline{H_1(2r_1-\bar\zeta)} + \frac{(k_2+k_1)(k_0-k_1)}{4k_1k_2}\overline{W_0(2r_0-\bar\zeta)}
$$

$$
g_3(\zeta) = \frac{k_3+k_2}{2k_3}\left(H_2(\zeta) + \frac{k_2-k_1}{2k_2}\overline{H_1(2r_1-\bar\zeta)} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{(k_2+k_1)(k_1-k_0)}{4k_1k_2}\overline{W_0(2r_0-\bar\zeta)}\right) + \frac{k_3-k_2}{2k_3}\left(\overline{H_2(\zeta)} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{k_2-k_1}{2k_2} H_1(\zeta+2h_2) + \frac{(k_2+k_1)(k_1-k_0)}{4k_1k_2} W_0(\zeta+2(h_1+h_2))\right),\quad h_2 = r_1 - r_2
$$

Наконец, рассмотрим целую ограниченную функцию

$$H(z) = \begin{cases} \dfrac{k_3 + k_2}{2k_3} H_2(z) + \dfrac{(k_3 - k_2)(k_2 - k_1)}{4k_2k_3} H_1(z + 2h_2) + \\ + \dfrac{(k_3 - k_2)(k_2 + k_1)(k_1 - k_0)}{8k_1k_2k_3} W_0(z + 2(h_1 + h_2)), \quad \operatorname{Re} z > r_2 \\ g_3(z) + \dfrac{k_2 - k_3}{2k_3} \overline{H_2(2r_2 - \bar{z})} + \dfrac{(k_3 + k_2)(k_1 - k_2)}{4k_2k_3} \overline{H_1(2r_1 - \bar{z})} + \\ + \dfrac{(k_3 + k_2)(k_2 + k_1)(k_0 - k_1)}{8k_1k_2k_3} \overline{W_0(2r_0 - \bar{z})}, \quad \operatorname{Re} z < r_2 \end{cases} \tag{1.7}$$

По теореме Лиувилля

$$H(z) \equiv c = \text{const} \tag{1.8}$$

В итоге получаем основную систему функциональных уравнений (1.4)—(1.8). Исключая из этой системы функции $H(z)$, $H_2(z)$, $g_3(z)$, $g_2(z)$, $g_1(z)$, $W_0(z)$, $G_0(z)$, $G_1(z)$, получим функциональное уравнение для нахождения $H_1(z)$

$$H_1(z) + \lambda\mu H_1(z + 2h_1) + \mu\nu H_1(z + 2h_2) + \lambda\nu H_1(z + 2(h_1 + h_2)) =$$

$$= -\lambda\mu f_1(z + 2h_1) - \lambda\nu f_1(z + 2(h_1 + h_2)) + (1 + \mu)(1 + \nu) c, \quad \operatorname{Re} z > r_1$$

$$\lambda = \frac{k_1 - k_0}{k_1 + k_0}, \quad \mu = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}, \quad \nu = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = H_1(z) - \frac{k_3(k_0 + k_1)}{k_1(k_0 + k_3)} c \tag{1.9}$$

удовлетворяющую уравнению

$$F(z) + \lambda\mu F(z + 2h_1) + \mu\nu F(z + 2h_2) + \lambda\nu F(z + 2(h_1 + h_2)) =$$

$$= -\lambda\mu f_1(z + 2h_1) - \lambda\nu f_1(z + 2(h_1 + h_2)), \ \operatorname{Re} z > r_1 \tag{1.10}$$

Так как функции $f_1(z)$, $F(z)$ — аналитические и ограниченные в полуплоскостях D_0^+ и D_1^+ соответственно, то они являются преобразованиями Лапласа некоторых обобщенных функций $q(t)$, $Q(t)$ с носителями на полуоси $t \geq 0$ [4].

Используя линейность преобразования Лапласа и теорему смещения для изображения, перейдем от уравнения (1.10) к алгебраическому уравнению для оригиналов $q(t)$, $Q(t)$.

Решая полученное уравнение, найдем

$$Q(t) = -\frac{\lambda \exp(-2h_1t)(\mu + \nu \exp(-2h_2t))\, q(t)}{1 + \lambda\mu \exp(-2h_1t) + \mu\nu \exp(-2h_2t) + \lambda\nu \exp(-2(h_1 + h_2)t)}, \quad t \geq 0$$

Теперь, последовательно отбрасывая постоянные, определяем функции $F(z)$, $W_j(z)$, $j = 0, 1, 2, 3$

$$F(z) \doteqdot Q(t)$$

$$W_0(z) = (1 + \lambda)[f_1(z) + F(z)], \quad \operatorname{Re} z > r_0$$

$$W_1(z) = f_1(z) + F(z) + \frac{k_1 - k_0}{2k_1} \overline{W_0(2r_0 - \bar{z})}, \quad r_1 < \operatorname{Re} z < r_0$$

$$W_2(z) = f_2(z) + \frac{k_1 - k_2}{2k_2} \nu F(z + 2h_2) + \frac{k_2 - k_1}{2k_2} \overline{F(2r_1 - \bar{z})} +$$

$$+\frac{(k_0-k_1)(k_1+k_2)}{4k_1k_2}\nu W_0(z+2(h_1+h_2))+\frac{(k_1-k_0)(k_1+k_2)}{4k_1k_2}\overline{W_0(2r_0-\bar z)},$$

$$r_2<\operatorname{Re} z<r_1 \tag{1.11}$$

$$W_3(z)=f_3(z)+\frac{k_2-k_1}{k_2+k_3}\overline{F(2r_1-\bar z)}+\frac{(k_1-k_0)(k_1+k_2)}{2k_1(k_2+k_3)}\overline{W_0(2r_0-\bar z)}$$

$$\operatorname{Re} z<r_2$$

Полученные формулы (1.11) составляют фильтрационную теорему о трех параллельных прямых. Из нее при $k_3=k_2$, $f_3(z)=f_2(z)$ следует фильтрационная теорема о двух прямых

$$W_0(z)\doteqdot\frac{1+\lambda}{1+\lambda\mu\exp(-2h_1t)}q(t),\quad \operatorname{Re} z>r_0$$

$$W_1(z)=f_1(z)-\frac{\lambda\mu}{1+\lambda}W_0(z+2h_1)+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{W_0(2r_0-\bar z)}$$

$$r_1<\operatorname{Re} z<r_0 \tag{1.12}$$

$$W_2(z)=f_2(z)+\frac{k_1-k_0}{k_1+k_2}\overline{W_0(2r_0-\bar z)},\quad \operatorname{Re} z<r_1$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{1+\lambda\mu\exp(-2h_1t)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda\mu)^n\exp(-2h_1nt),\quad t\geq 0$$

приходим в формулах (1.12) к результату, полученному в [5] методом источников.

Полагая в формулах (1.12) $k_2=k_1$, $f_2(z)=f_1(z)$, получим фильтрационную теорему о прямой [3].

Следует отметить, что функциональное уравнение (1.10) можно решить, разлагая его левую и правую части в ряды экспонент вида [6]

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\alpha_nz),\quad \operatorname{Re}\alpha_n>0 \tag{1.13}$$

Однако практическое использование такого решения вызывает дополнительные трудности при оценке точности вычислений. Это связано с тем, что коэффициенты ряда (1.13) даже для элементарных аналитических функций выражаются через интегралы, вычисляемые приближенно.

2. Приведем пример применения полученных теорем о прямых. Пусть в однородной среде с проницаемостью k_3 задано фильтрационное течение, описываемое комплексным потенциалом вида

$$W=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-z_0}{z-\bar z_0},\quad z_0=-\alpha+i\beta\ (\alpha,\beta>0)$$

Используя фильтрационную теорему о прямых, построим комплексные потенциалы течения в кусочно-однородной пористой среде с границами раздела в виде трех параллельных прямых проницаемостью k_0 в полуплоскости $\operatorname{Re} z>r_0$, k_1, k_2 — соответственно в полосах $r_1<\operatorname{Re} z<r_0$, $0<\operatorname{Re} z<r_1$, k_3 — в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$. Имеем

$$W_0(z)=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)q}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta t}{t}\frac{\exp[-(z+\alpha)t]}{\Phi(t)}dt,\quad \operatorname{Re} z>r_0$$

$$W_1(z)=\frac{(1+\mu)(1+\nu)q}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta t}{t}\frac{\exp[-(z+\alpha)t]}{\Phi(t)}dt-$$

$$-\frac{\lambda(1+\mu)(1+\nu)q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\frac{\exp[-(2r_0-z+\alpha)t]}{\Phi(t)}\,\mathrm{d}t,\quad r_1<\operatorname{Re} z<r_0$$

$$W_2(z)=\frac{(1+\nu)q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\frac{(1+\lambda\mu\exp[-2(r_0-r_1)t])\exp[-(z+\alpha)t]}{\Phi(t)}\,\mathrm{d}t-$$

$$-\frac{(1+\nu)q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\frac{(\mu+\lambda\exp[-2(r_0-r_1)t])\exp[-(2r_1-z+\alpha)t]}{\Phi(t)}\,\mathrm{d}t$$

$0<\operatorname{Re} z<r_1$

$$W_3(z)=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}+\frac{\nu q}{2\pi}\ln\frac{z+\bar z_0}{z+z_0}-$$

$$-\frac{(1-\nu^2)q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\frac{(\mu+\lambda\exp[-2(r_0-r_1)t])\exp[-(2r_1-z+\alpha)t]}{\Phi(t)}\,\mathrm{d}t$$

$\operatorname{Re} z<0$

$$\Phi(t)=1+\lambda\mu\exp[-2(r_0-r_1)t]+\mu\nu\exp(-2r_1t)+\lambda\nu\exp(-2r_0t)$$

Здесь использована теорема об интегрировании изображения, а также учтено, что

$$\left(\ln\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}\right)'=\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-\bar z_0}\doteqdot\exp(z_0t)-\exp(-\bar z_0t)=2i\exp(-\alpha t)\sin(\beta t)$$

Авторы благодарят П. Я. Кочину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копаев А. В., Радыгин В. М.* Фильтрационные теоремы об окружностях//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 179—183.
2. *Копаев А. В., Радыгин В. М.* Фильтрационные теоремы о сферах// Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 105—109.
3. *Радыгин В. М., Голубева О. В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
5. *Костицына Л. И.* К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной пористой среде//Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. 1966. Т. 164. Вып. 6. С. 67—82.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука. 1976. 536 с.

Москва
Орел

Поступила в редакцию
26.VI.1991