

УДК 532.526.75

© 1992 г. С. В. ПИХТОВ, Е. М. СМИРНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ ПРИ СОНАПРАВЛЕННОМ ВРАЩЕНИИ ОКРУЖАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В рамках метода нормальных мод выполнен анализ устойчивости стационарного автомодельного течения в пограничном слое на вращающемся диске бесконечного радиуса при сонаправленном вращении окружающей жидкости. Спектральная задача для бесконечно малых трехмерных возмущений решена методом коллокаций с разложением амплитудных функций по полиномам Чебышева. Установлено, что при всех значениях параметра $\sigma \geq 0$, равного отношению угловых скоростей жидкости и диска, ниже критическое число Рейнольдса определяется волнами А-типа, развитие которых обусловлено механизмом «параллельной» неустойчивости, типичной для слоя Экмана. Неустойчивость В-типа, связанная с наличием точки перегиба в профиле скорости, исчезает при $\sigma \geq 4$. Рассчитаны нейтральные поверхности для течения Кармана ($\sigma = 0$) и течения Бедевадта ($\sigma \rightarrow \infty$). Получено, что в течении Кармана волны А-типа могут нарастать при значениях числа Рейнольдса в несколько раз меньших, чем критическое число Рейнольдса для спиральных вихрей. Результаты проведенного анализа сопоставляются с имеющимися опытными данными.

1. Введение. В последние 10 лет достигнуты большие успехи в исследовании устойчивости и перехода к турбулентности в пограничном слое на диске, который вращается с постоянной угловой скоростью в безграничном пространстве, заполненном покоящейся жидкостью. Изучение этой проблемы было начато в [1, 2]. Однако только спустя четверть века тщательные опыты [3, 4] и исследования [3—5], выполненные в рамках линейной теории устойчивости с учетом кривизны линий тока и силы Кориолиса, дали близкие экспериментальные и расчетные значения критического числа Рейнольдса и других характеристик спиральных вихрей, развитие которых связано с наличием точки перегиба в профиле радиальной составляющей скорости.

Как известно, при бесконечно большом радиусе диска стационарное основное течение в пограничном слое описывается автомодельным решением Кармана. Задание общего вращения жидкости с угловой скоростью ω_f , отличной от скорости вращения диска ω , приводит к так называемой обобщенной задаче Кармана, допускающей автомодельное решение [6] с параметром $\sigma = \omega_f/\omega$. При $|\sigma - 1| \ll 1$ течение у диска соответствует течению в пристенном слое Экмана [7], а при $\sigma \rightarrow \infty$ обобщенная задача Кармана переходит в задачу Бедевадта [6].

Экспериментальные [8—11] и теоретические [9, 12, 13] исследования слоя Экмана показали, что для него характерны два типа неустойчивостей. Неустойчивость типа А (согласно терминологии, предложенной в [7]), является результатом сложного взаимодействия сил вязкости и силы Кориолиса и называется иногда параллельной неустойчивостью. Вторая неустойчивость (типа В) обусловлена наличием точки перегиба в профиле трансверсальной составляющей скорости, т. е. относится к тому же типу, что и неустойчивость, вызывающая развитие спиральных вихрей на открытом вращающемся диске. Неустойчивости А-типа соответствует глобальный минимум нейтральной поверхности, рассчитанной для трехмерных возмущений [12, 13], а неустойчивости В-типа — локальный минимум при значении числа Рейнольдса, примерно в 2 раза превосходящем критическое. В слое Экмана обе неустойчивости проявляются в виде бегущих волн. Бегущие волны неустойчивости экспериментально обнаружены и в слое Бедевадта [14].

В настоящей работе линейная задача устойчивости для течения в слое у диска рассмотрена при всевозможных значениях параметра σ в интервале от 0 до ∞ . Спектральная задача для бесконечно малых трехмерных возмущений решена методом коллокаций на основе уравнений, которые являются

обобщением уравнений, предложенных в [4]. Установлено, что предел устойчивости основного течения связан с бегущими волнами А-типа при всех значениях параметра σ . В частности, в слое на диске, вращающемся в неподвижной жидкости, волны А-типа могут нарастать при значениях числа Рейнольдса в несколько раз меньших, чем критическое число Рейнольдса для спиральных вихрей. Локальный минимум нейтральной поверхности, соответствующий неустойчивости В-типа, вырождается при больших значениях σ .

2. Основное течение. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , жестко связанную с диском, вращающимся вокруг оси z с угловой скоростью $\omega \geq 0$; на поверхности диска $z = 0$. Полагая, что вдали от диска окружающая жидкость вращается как твердое тело с угловой скоростью $\omega_f \geq 0$, выберем за масштаб скорости относительного движения на радиусе r произведение $|\Delta\omega|r$, где $\Delta\omega = \omega_f - \omega$. Безразмерный параметр $s = (\omega_f - \omega) / \omega = \sigma - 1$ изменяется в интервале $-1 \leq s < \infty$. Этот интервал удобно разбить на два подинтервала: $-1 \leq s \leq 1$ и $1 < s < \infty$.

В случае $|s| \leq 1$ за масштаб изменений координаты z примем величину $\delta = \sqrt{\nu} / \omega$, а поле скорости основного течения представим в виде

$$U = s r \omega g(\eta), \quad V = s r \omega \varphi(\eta), \quad W = -2s \sqrt{\nu \omega} f(\eta), \quad \eta = \frac{z}{\delta} \quad (2.1)$$

где компоненты U, V, W соответствуют r, θ, z . Подстановка (2.1) в уравнения Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости приводит к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} g' + s(\varphi^2 - g^2 + 2fg - 1) &= 2(1 - \varphi) \\ \varphi'' + 2s(f\varphi' - \varphi g) &= 2g, \quad f' = g \end{aligned} \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$f(0) = g(0) = \varphi(0) = 0, \quad g(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = 1 \quad (2.3)$$

При $|s| \ll 1$ систему (2.2) можно линеаризовать, опуская члены, содержащие s как множитель. Линейная задача имеет аналитическое решение, полученное Экманом

$$g(\eta) = -\sin(\eta) \exp(-\eta), \quad \varphi(\eta) = 1 - \cos(\eta) \exp(-\eta)$$

Рассматривая течение при $1 < s < \infty$, перейдем к параметру $\chi = 1/s$, значение которого лежит в интервале $0 < \chi < 1$. Координату z будем относить к длине $\delta_* = \sqrt{\nu / \Delta\omega}$, а решение для основного течения запишем в форме

$$U = \Delta\omega r g_*(\eta_*), \quad V = \Delta\omega r \varphi_*(\eta_*), \quad W = -2\sqrt{\nu \Delta\omega} f_*(\eta_*), \quad \eta_* = \frac{z}{\delta_*} \quad (2.4)$$

Для нахождения функций g_*, f_*, φ_* из уравнений Навье — Стокса получим систему

$$\begin{aligned} g_*'' + \varphi_*^2 - g_*^2 - 2f_* g_* - 1 &= 2\chi(1 - \varphi_*) \\ \varphi_*'' + 2(f_* \varphi_*' - g_* \varphi_*) &= 2\chi g_*, \quad f_*' = g_* \end{aligned} \quad (2.5)$$

с граничными условиями вида (2.3).

При исследовании вопросов устойчивости основного течения задачи (2.2), (2.3) и (2.5), (2.3) решались конечно-разностным методом второго порядка точности с применением алгоритма матричной прогонки. Условия при $\eta = \infty$ сносились на значение $\eta = 20$. Равномерная расчетная сетка содержала 1501 узел. Полученные решения соответствовали приведенным в [6]. Для области значений около $s = -1$, в которой задача (2.2), (2.3) не имеет единственного решения [15], рассчитывалось только одно решение, соответствующее классическому пограничному слою Кармана.

3. Спектральная задача устойчивости. Развитие бесконечно малых возмущений основного течения при всех значениях параметра s будем исследовать в рамках уточненного локально-однородного приближения, которое развито в [3, 4] при анализе устойчивости пограничного слоя на диске, вращающемся в покоящейся жидкости. В отличие от первоначального подхода [2], приводящего к уравнению Орра — Зоммерфельда, в [3, 4] были учтены эффекты силы Кориолиса, кривизны линий тока и влияние составляющей скорости основного течения по нормали к поверхности диска.

Запишем во вращающейся системе координат уравнения Навье — Стокса, линеаризованные относительно бесконечно малых возмущений скорости $q(u, v, w)$ и давления p

$$\begin{aligned} \partial_t u + U \partial_r u + u \partial_r U + \frac{V}{r} \partial_\theta u + w \partial_z U + W \partial_z u - \frac{2vV}{r} - 2\omega v = \\ = -\frac{1}{\rho} \partial_r p + \nu \left[\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u + \partial_z^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta v \right] \\ \partial_t v + u \partial_r V + U \partial_r v + \frac{V}{r} \partial_\theta v + w \partial_z V + W \partial_z v + \frac{uV + Uv}{r} + 2\omega u = \\ = -\frac{1}{\rho r} \partial_r p + \nu \left[\partial_r^2 v + \frac{1}{r} \partial_r v + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 v + \partial_z^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w + u \partial_r W + U \partial_r w + \frac{V}{r} \partial_\theta w + w \partial_z W + W \partial_z w = \\ = -\frac{1}{\rho} \partial_r p + \nu \left[\partial_r^2 w + \frac{1}{r} \partial_r w + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 w + \partial_z^2 w \right] \end{aligned}$$

$$\partial_r(ru) + \partial_\theta v + \partial_z(rw) = 0$$

Компоненты скорости основного течения U, V, W зададим формулами (2.1) или (2.4), а на возмущения наложим граничные условия

$$q = 0, \quad z = 0, \quad q \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Принимая сначала за масштаб длины величину δ , рассмотрим течение в окрестности некоторой точки, находящейся на радиусе r_0 вдали от оси вращения: $r_0 \gg \delta$. За масштаб скорости примем скорость внешнего потока на данном радиусе $U_0 = |\Delta\omega| r_0$, а произведение ρU_0^2 используем в качестве масштаба изменения давления. Безразмерные возмущения будем искать в виде нормальных мод

$$(u, v, w, p) = [F(\eta), H(\eta), \Phi(\eta), \pi(\eta)] \exp [i(\gamma r + \beta R\theta - \alpha ct)] \quad (3.3)$$

где $R = r_0/\delta$, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$. Обращаясь к задаче о развитии возмущений во времени, будем полагать волновые числа γ и β заданными действительными параметрами, а $c = c_r + ic_i$ — искомой комплексной величиной.

Представление решения в виде (3.3) является приближенным (за исключением случая $s \rightarrow 0$), поскольку исходное течение зависит не только от η , но и от r . Асимптотической оценкой его применимости служит условие малости масштаба изменения возмущения в радиальном направлении по сравнению со значением r_0 , т. е. условие $d = 2\pi\delta/(\gamma r_0) \ll 1$. Практически же требуемая степень малости безразмерного параметра d может быть определена путем сопоставления получаемых результатов с имеющимися опытными данными или с возможными частными решениями начально-краевой задачи (3.1) — (3.2). Например, для спиральных волн на вращающемся диске $d = O(10^{-1})$ [3—5], при этом характеристики волн, рассчитанные в предположении (3.3), хорошо согласуются с данными экспериментов.

Подставим (3.3) в уравнения (3.1), предварительно записав их в безразмерном виде с учетом введенных масштабов и формул (2.1) для основного течения. Опустим, следуя [4], все слагаемые порядка $(1/R^2)$ и меньше. В частности,

уравнение неразрывности примет вид $iD\Phi = \gamma F + \beta H$, $D \equiv d/d\eta$. Исключая давление, введя новую функцию $h = \gamma H - \beta F$ и локальное число Рейнольдса $Re = U_0 \delta / \nu = |s| R$, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка для амплитудных функций h и Φ

$$\begin{aligned} (D^2 - \alpha^2)h + s(2fDh - gh - 2i\varphi D\Phi) - 2iD\Phi - \text{sign}(s) \text{Re}[(\gamma\varphi' - \beta g')\Phi - \\ - i(\gamma g + \beta\varphi)h] = -i\alpha \text{Re}h \\ (D^2 - \alpha^2)^2\Phi + s[2f(D^2 - \alpha^2)D\Phi + 2g(D^2 - \alpha^2)\Phi - (g'D\Phi + gD^2\Phi) - \\ - 2i(\varphi'h + \varphi Dh)] + i\text{Re} \text{sign}(s)[(\gamma g'' + \beta\varphi'')\Phi - \\ - (\gamma g + \beta\varphi)(D^2 - \alpha^2)\Phi] - 2iDh = -i\alpha \text{Re}(D^2 - \alpha^2)\Phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подобным же образом можно получить систему амплитудных уравнений, выбирая за масштаб длины величину δ ,

$$\begin{aligned} (D^2 - \alpha^2)h - i\text{Re}(\gamma g_* + \beta\varphi_*)h - 2i\varphi_* D\Phi - g_* h + \text{Re}(\beta g_*' - \gamma\varphi_*')\Phi + \\ + 2f_* Dh - 2i\chi D\Phi = -i\alpha \text{Re}h \\ (D^2 - \alpha^2)^2\Phi - i\text{Re}(\gamma g_* + \beta\varphi_*)(D^2 - \alpha^2)\Phi + i\text{Re}(\gamma g_*'' + \beta\varphi_*'') + \\ + 2[g_*(D^2 - \alpha^2)\Phi + f_*(D^2 - \alpha^2)D\Phi] - (g_*' D\Phi + g_* D^2\Phi) - \\ - 2i(\varphi_*' h + \varphi_* Dh) - 2i\chi Dh = -i\alpha \text{Re}(D^2 - \alpha^2)\Phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\text{Re} = U_0 \delta / \nu = R_*$, $= r_0 / \delta_*$, а основное течение определено выражениями (2.4).

В совокупности с однородными граничными условиями

$$h(0) = \Phi(0) = D\Phi(0) = 0, \quad h(\infty) = \Phi(\infty) = D\Phi(\infty) = 0 \quad (3.6)$$

которые следуют из (3.2), уравнения (3.4) или (3.6) формулируют задачу на собственные значения величины s с четырьмя действительными параметрами: $s, \text{Re}, \gamma, \beta$.

При $s \rightarrow 0$ (3.4), (3.6) сводятся к спектральной задаче устойчивости однородного линейного слоя Экмана [12]. Применение метода нормальных мод для однородного слоя Экмана является строго обоснованным и значение параметра $s = 0$ естественно использовать в качестве отправной точки при исследовании влияния этого параметра на характеристики устойчивости пограничного слоя на вращающемся диске.

4. Метод решения спектральной задачи. Спектральные задачи (3.4), (3.6) и (3.5), (3.6) решались методом коллокаций, отчасти модифицированным в настоящей работе по сравнению с изложенным в [4]. Отметим основные особенности метода.

Область изменения координаты $\eta \in [0, \infty]$ отображалась на конечный интервал $x \in [-1, 1]$ с помощью преобразования $x = 2\eta/(\eta + a) - 1$, $\eta = a(1 + x)/(1 - x)$. Особенности, возникающие при таких преобразованиях, рассматривались ранее в работе [16], где показано, что при расчете возмущений в пограничном слое метод дает хорошие результаты. Значение постоянной a , как и в [4], выбиралось равным 1,8. В интервале $x \in [-1, 1]$ функции $h(\eta(x))$, $\Phi(\eta(x))$ разлагались по базисным функциям, автоматически удовлетворяющим граничным условиям (3.6)

$$h(x) = \sum_{n=0}^N X_n (1 - x^2) T_n(x), \quad \Phi(x) = \sum_{n=0}^N Z_n (1 - x^2)^2 T_n(x)$$

Здесь T_n — полиномы Чебышева. Отметим, что в [4] разложение велось непосредственно по полиномам Чебышева. Точки коллокации выбирались по формулам

$$x_j = \cos \left[\frac{\pi}{2(M+1)} (2M - 2j + 1) \right], \quad j = 0, 1, \dots, N$$

где значение числа $M \geq N$ подбиралось так, чтобы в области $\eta > 20$ попадала только одна точка.

Коэффициенты X_n, Z_n находились путем решения обобщенной алгебраической задачи на собственные значения

$$(A_r + iA_i) \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = c (B_r + iB_i) \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

где $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = (X_0, X_1, \dots, X_N, Z_0, Z_1, \dots, Z_M)$ — комплексный собственный вектор, A_r, A_i, B_r, B_i — вещественные квадратные матрицы размерности $2(N+1) \times 2(N+1)$. Спектр задачи (4.1) содержит $2(N+1)$ собственное значение c . Из найденного спектра выбиралась величина с наибольшим значением c_i (ложные моды исключались). Точки нейтральной поверхности ($c_i = 0$) для всех значений s находились путем подбора (по методу секущих) подходящего значения Re при фиксированных значениях γ, β .

Для определения точности результатов проводились методические расчеты с разными значениями числа N от 9 до 39. В качестве эталона были использованы значения критических параметров для неустойчивостей A - и B -типов в слое Экмана, рассчитанные с высокой точностью в [13]. Для неустойчивости A -типа критическое значение числа Рейнольдса, весьма близкое к $\text{Re}_c^A = 54,155$ [13], получалось при $N \geq 16$. Усредненное по 20 результатам вычислений (с N от 18 до 37) критическое значение числа Рейнольдса составило $\langle \text{Re}_c^A \rangle = 54,158$ со стандартным среднеквадратичным отклонением от среднего, равным 0,003. Для неустойчивости B -типа получено аналогичное среднее $\langle \text{Re}_c^B \rangle = 112,746$ со стандартным отклонением 0,005, хорошо согласующееся со значением $\text{Re}_c^B = 112,759$ [13].

Для проведения серийных расчетов было выбрано значение $N = 24$. В процессе расчетов время от времени проводились проверки путем вычислений с большим числом точек коллокации, при этом существенных различий результатов не обнаруживалось.

В рассчитанных наборах собственных векторов в зависимости от области изменения параметров имелись одна, две или три ложные моды с большими положительными значениями c_i . Эти ложные моды легко отфильтровывались, так как при изменении числа точек коллокации они либо исчезали, либо сильно менялась величина соответствующего собственного значения.

5. Результаты расчетов. Введем угол ϵ между направлением волнового вектора возмущения и местным радиусом. Этот угол связан с γ, β соотношением $\text{tg} \epsilon = \beta/\gamma$ и положителен при отсчете против часовой стрелки. Для каждого значения s нейтральную поверхность будем представлять в пространстве параметров $\text{Re}, \alpha, \epsilon$. Точки минимума этой поверхности по числу Рейнольдса определяют наиболее важные критические значения параметров.

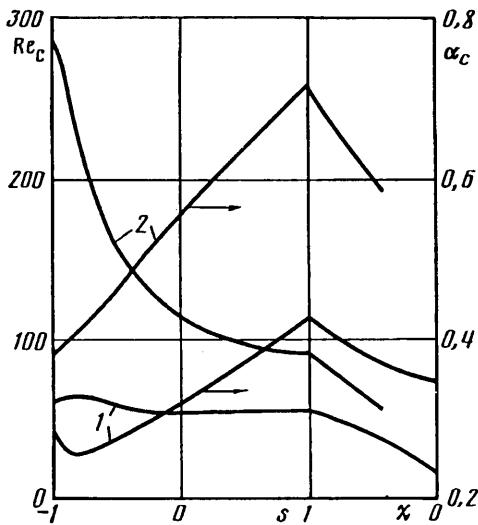
Проведенные расчеты показали, что при всех значениях s в интервале $-1 \leq s \leq 3$ нейтральная поверхность имеет два минимума: глобальный — располагающийся в области отрицательных углов $\epsilon \approx -20^\circ$ и соответствующий неустойчивости типа A , и локальный — отвечающий возмущениям B -типа с $\epsilon > 0$.

На фиг. 1, 2 для обоих типов неустойчивости (кривые 1 — A , 2 — B) показаны зависимости критических параметров от s (слева) и $\chi = 1/s$ (справа). Эти зависимости рассчитывались при постепенном изменении параметра s , начиная со значения $s = 0$.

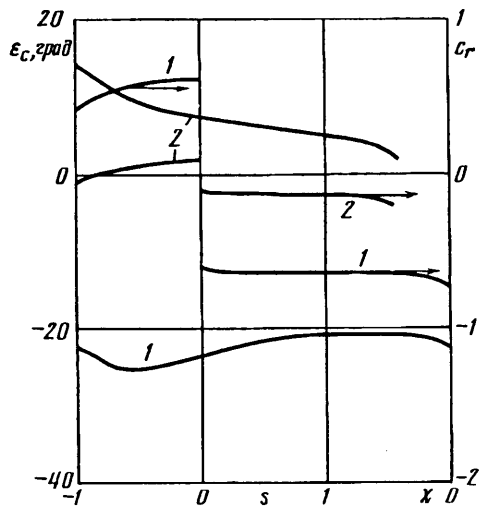
Критическое число Рейнольдса для неустойчивости B -типа достигает наибольшего значения $\text{Re}_c^B = 285,8$, когда $s = -1$, т. е. для слоя на диске, вращающемся в покоящейся жидкости; при этом $\epsilon_c = 13,9^\circ$, $\alpha = 0,383$, $\alpha_c = -0,0091$. Эти значения критических параметров хорошо согласуются с данными [5], где в предположении $c_r = 0$ получено $\text{Re}_c = 285,36$, $\epsilon_c = 11,4^\circ$, $\alpha_c = 0,392$.

В интервале $-1 \leq s \leq 1$ критическое число Рейнольдса Re_c^A для возмущений A -типа изменяется слабо: от 54 до 62. При $s = -1$ получено $\text{Re}_c^A = 59,0$, $\epsilon_c = -22,7^\circ$, $\alpha_c = 0,280$, $\alpha_c = 0,122$. Отметим, что в выводах по работе [4] имеется указание на возможность развития неустойчивости A -типа при $\text{Re} \geq 49$, однако детально этот вопрос в [4] не исследовался.

Критические параметры и форма нейтральной поверхности, рассчитанные для $s = 0$, полностью соответствуют приведенным в [13] для слоя Экмана. При



Фиг. 1



Фиг. 2

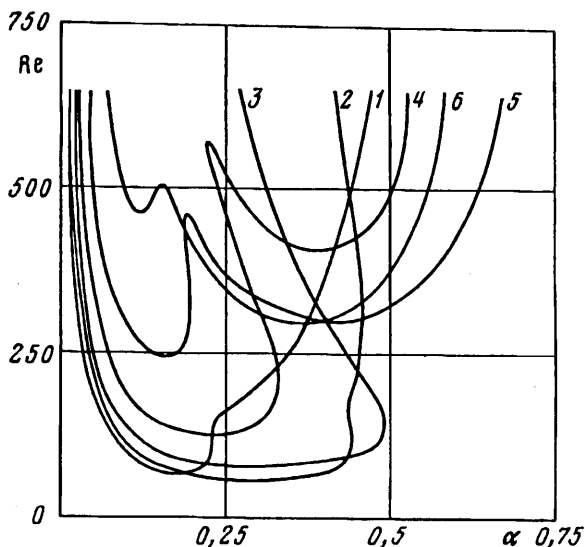
переходе через $s = 0$ направление относительной скорости в основном течении скачком меняется на противоположное и, как следствие, зависимости $c_\lambda(s)$ на фиг. 2 при $s = 0$ имеют разрыв, отражающий изменение знака этой величины. Положительные значения фазовой скорости отвечают волнам, распространяющимся от центра диска на периферию, а значения $c_\lambda < 0$ соответствуют волнам, бегущим к центру.

С ростом $s > 0$ критические числа Рейнольдса Re_c^A и Re_c^B монотонно уменьшаются, приближаясь друг к другу, а при $s \approx 3$ локальный минимум нейтральной поверхности, соответствующий возмущениям В-типа, вырождается. Наименьшей устойчивостью обладает течение в слое Бедевадта ($\chi = 0$): $Re_c^A = 18,8$, при этом $\epsilon_c = -22,4^\circ$, $\alpha_c = 0,348$, $\alpha_c = -0,245$.

Результаты расчета нейтральной поверхности для случая $s = -1$ иллюстрируются на фиг. 3, где изображены линии, полученные путем пересечения поверхности плоскостями $\epsilon = \text{const}$; кривые 1—6 соответствуют $\epsilon = -30, -20, -10, 0, 10, 20^\circ$. Нейтральная поверхность довольно сложна по форме, имеет два минимума и складку, которая особенно отчетливо выражена кривой с $\epsilon = 0$. Вид нейтральной поверхности в окрестности локального минимума $Re = Re_c^B = 285,8$ хорошо согласуется с полученным в [3,5], где вычисления ограничивались значениями $\epsilon > 0$. В расчетах [5] при априорном задании возмущений в виде стоячих волн ($c_\lambda = 0$) был обнаружен локальный минимум, отвечающий $Re = 440,88$, $\epsilon = 19,45^\circ$, $\alpha = 0,140$. Из фиг. 3 видно, что этот минимум соответствует участку складки нейтральной поверхности для возмущений более общего вида. В окрестности глобального минимума критическое число Рейнольдса очень слабо меняется при изменении α от 0,2 до 0,4. Следует ожидать, что это обстоятельство затруднит выделение наиболее опасного возмущения в возможных экспериментах на физическом объекте.

Нейтральная поверхность для возмущений в слое Бедевадта представлена на фиг. 4 двумя сечениями: $\epsilon = 0$ и -20° (кривые 1, 2), и на фиг. 5 — сечением $\alpha = 0,35$; там же приведены и значения фазовой скорости c_λ . Видно, что область неустойчивости имеет вид ямы с пологим дном и крутыми краями вдоль направления изменения волнового числа: резкий рост критического числа Рейнольдса наблюдается только при $\alpha \leq 0,15$ и $\alpha \geq 0,65$.

6. Обсуждение. Экспериментальными методами волны неустойчивости А-типа подробно исследовались на примере слоя Экмана, который формируется при

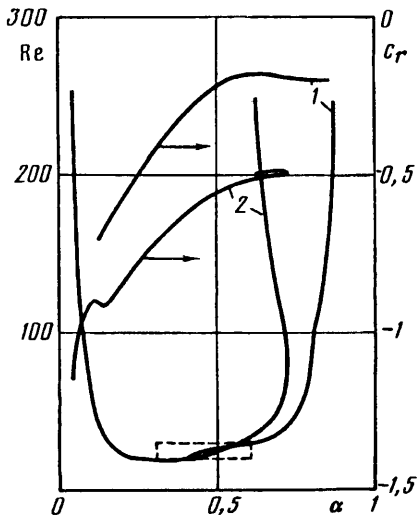


Фиг. 3

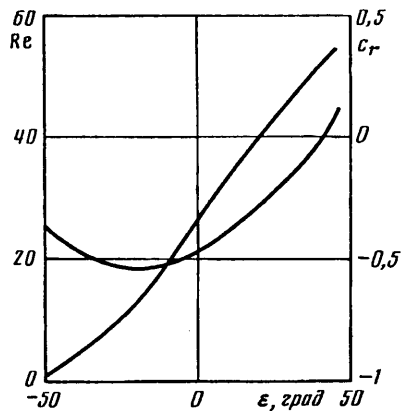
стоковом течении к центру во вращающейся ванне или вращающемся контейнере [7, 9, 10]; получено удовлетворительное согласие с предсказаниями линейной теории. Неустойчивость *B*-типа изучалась главным образом на установках с открытым диском, вращающимся в покоящейся жидкости [1—4]; результатом развития этой неустойчивости является упорядоченная система спиральных вихрей, вращающихся вместе с диском. Волны *B*-типа в слое Экмана наблюдались в [8, 9]. Кроме того, неустойчивость *B*-типа зарегистрирована в течении между вращающимся и неподвижным дисками [17]. При достаточно большой скорости вращения пограничные слои на дисках разделяются, а ядро вращается с угловой скоростью, равной приблизительно $0,3\omega$, чему соответствует значение $s = 0,7$.

Волны неустойчивости *A*-типа ни в одном из известных экспериментов с пограничным слоем на открытом вращающемся диске не наблюдались, хотя именно они теоретически определяют предел устойчивости основного течения. Кажущееся противоречие разрешается следующим образом. Специальными расчетами, которые могут составить предмет отдельной публикации, установлено, что максимальный временной инкремент для этих волн $(\alpha c)_\text{max}$ порядка 10^{-2} . При относительно большой фазовой скорости волны (фиг. 2) этот результат указывает на умеренные значения скорости нарастания амплитуды по радиусу. Таким образом, возмущения *A*-типа не обнаруживались в приведенных экспериментах просто потому, что не успевали нарасти от уровня очень слабых фоновых возмущений при $Re = Re_c^A$ до уровня, достаточного для регистрации при числах Рейнольдса, предшествующих турбулизации слоя. Для экспериментального обнаружения и изучения неустойчивости *A*-типа в данном случае, очевидно, следует обеспечить более высокий уровень начальных возмущений, возбуждая каким-либо образом пограничный слой в центральной части диска. Заметного проявления этой неустойчивости можно ожидать и в случае обдува вращающегося диска слабым осевым потоком, несущим турбулентные пульсации различных масштабов и частот.

В [11] визуальным методом исследовалась неустойчивость *A*-типа в слоях, которые прилегают к торцевым крышкам цилиндрического сосуда, в процессе спинапа [7], вызванного повышением скорости вращения стенок от ω_0 до ω . На начальной стадии спинапа в этих слоях формируется квазистационарное течение, характеризуемое значением параметра $s = (\omega - \omega_0)/\omega$. Волны *A*-типа регистрировались в интервале $-0,5 \leq s \leq -0,1$. Число Рейнольдса, начиная с которого



Фиг. 4



Фиг. 5

они были визуально различимыми, существенно увеличивалось с уменьшением s . В то же время вычисленное значение Re_c^* меняется слабо (фиг. 1). Как и в предыдущем случае, это отличие не является удивительным, поскольку увеличение фазовой скорости, пропорциональной $|s|\omega r$, и уменьшение времени пребывания волны в неустойчивом слое требуют более высоких значений инкремента для обеспечения амплитуды, достаточной для наблюдений, т. е. повышения числа Рейнольдса.

В [14] тоже визуальными методами изучалась устойчивость квазистационарных слоев Бедеватта, образующихся на начальной стадии торможения жидкости после резкой остановки стенок цилиндрической емкости, которая перед этим вместе с жидкостью вращалась с угловой скоростью $\omega_0 = \omega_r$. При $Re > 25 \pm 5$ в слоях наблюдались концентрические волны с $\alpha \approx 0,3 - 0,6$; данная область значений Re , α очерчена на фиг. 4 штриховыми линиями. Сопоставление экспериментальных значений Re_c и α с расчетными дает основание утверждать, что наблюдавшиеся концентрические волны — это не новый вид растущих возмущений, как предполагал автор [14], а осесимметричные возмущения А-типа, возникновение которых определяется процессами в угловых областях осесимметричной емкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith N. H. Exploratory investigations of laminar-boundary-layer oscillations on a rotating disk//NACA Tech. Note. 1947. № 1227. 8 p.
2. Gregory N., Stuart J. T., Walker W. S. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk//Phyl. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. A248. № 943. P. 155—199.
3. Kobayashi R., Kohama Y., Takamadate Ch. Spiral vortices in boundary layer transition regime on a rotating disk//Acta Mech. 1980. V. 35. P. 71—82.
4. Malik M. R., Wilkinson S. P., Orszag S. A. Instability and transition in rotating disk flow//AIAA Journal. 1981. V. 19. № 9. P. 1131—1138.
5. Malik M. R. The neutral curve for stationary disturbances in rotating disk flow//J. Fluid Mech. 1986. V. 164. P. 275—287.
6. Rogers M. H., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of infinite rotating disk//J. Fluid Mech. 1960. V. 7. № 4. P. 617—631.
7. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
8. Faller A. J. An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer//J. Fluid Mech. 1963. V. 15. № 4. P. 560—573.
9. Faller A. J., Kaylor R. E. A numerical study of the instability of the laminar Ekman boundary layer//J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 466—480.

10. *Caldwell D. R., VanAtta C. W.* Characteristics of Ekman boundary layer instabilities//J. Fluid Mech. 1970. V. 44. № 1. P. 79—95.
11. *Weidman P. D.* On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. Pt 2. Measurements and stability// J. Fluid Mech. 1976. V. 77. № 4. P. 709—735.
12. *Lilly D. K.* On the instability of Ekman boundary flow//J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481—494.
13. *Melander M. V.* An algorithmic approach to the linear stability of the Ekman layer//J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 283—293.
14. *Savas O.* Stability of Bodewadt flow//J. Fluid Mech. 1987. V. 183. P. 77—94.
15. *Zandbergen P. J., Dijkstra D.* Non-unique solutions of the Navier-Stokes equations for the Karman swirling flow // J. Engin. Math. 1977. V. 11. № 2. P. 167—188.
16. *Grosch C. E., Orszag S. A.* Numerical solution of problems in unbounded regions. coordinate transforms//J. Comput. Phys. 1977. V. 25. № 3. P. 273—296.
17. *Саньков П. И., Смирнов Е. М.* Бифуркации и переход к турбулентности в зазоре между вращающимися и неподвижным параллельными дисками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 28—36.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1991