

УДК 532.517.2

© 1992 г. А. А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Ф. Б. КАПЛАНСКИЙ

**ДИНАМИКА ТОНКИХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ
В МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

Разделение области течения на вихревую и потенциальную части широко используется в численных методах вихревой динамики жидкости [1]. В связи с этим проблема согласования распределения концентрированной завихренности с потенциальным течением приобретает особую значимость даже в простых случаях [2]. Для вихревого кольца в маловязкой жидкости эта проблема связана с проявлением действия вязкости при больших числах Рейнольдса только в локализованном вихревом ядре [3]. Такой режим течения в отличие от рассмотренного в [4] диффузионного режима естественно назвать инерционным.

Существующие аналитические решения для вихревых колец непригодны для описания инерционного режима из-за используемых предположений о малости числа Рейнольдса [4] или о постоянстве циркуляции [3].

Экспериментальное изучение инерционного режима движения вихревого кольца [5] привело к зависимостям от времени для циркуляции и внешнего радиуса кольца $\Gamma \sim t^{-2/3}$, $R_* \sim t^{1/3}$, не согласующимся с имеющимися решениями.

В данной работе для описания нестационарного течения вязкой жидкости, индуцированного торообразным распределением завихренности, используется метод двухмасштабных разложений [6]. С его помощью получено распределение завихренности в ядре тонкого вихревого кольца, согласованное с внешним потенциальным течением. Зависимости найденных характеристик течения от времени подтверждают экспериментальные результаты для инерционного режима. В качестве примера исследовано взаимодействие соосных вихревых колец.

1. Постановка задачи. Осесимметричное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в переменных вихрь — функция тока описывается системой уравнений (см., например, [7])

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\zeta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\zeta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \nu \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -r\zeta \quad (1.2)$$

где r, z — радиальная и аксиальная координаты, ζ — завихренность, Φ — функция тока.

Граничные условия для кольцевого вихря состоят из условий симметрии на оси z

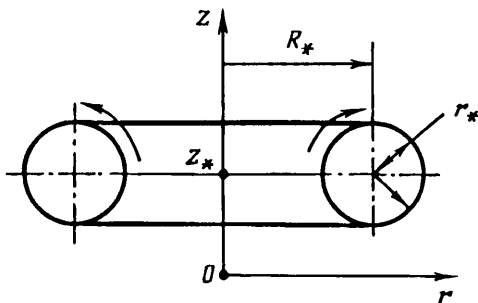
$$\Phi(0, z) = \zeta(0, z) = 0$$

и отсутствия возмущений на бесконечности

$$r^2 + z^2 \rightarrow \infty: \zeta \rightarrow 0, \Phi \rightarrow 0$$

Ненулевое решение уравнений (1.1)—(1.2) должно удовлетворять условию сохранения импульса вихря

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \zeta r^2 dz dr = M_0 = \text{const} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Решение задачи о движении вихревого кольца естественно искать в классе функций, отражающих его торообразную форму. В такой постановке в качестве начальных условий необходимо задать внешний R_0 и внутренний r_0 радиусы тора локализованной завихренности в начальный момент времени t_0 (фиг. 1)

$$R_*(t_0) = R_0, \quad r_*(t_0) = r_0$$

Для автомодельного решения этого достаточно, а полное нестационарное решение требует задания начальных распределений завихренности и функции тока.

Ниже рассматривается инерционный режим течения вихревого кольца, характерный для начальной стадии его развития [8], когда внутренний радиус много меньше внешнего.

2. Двухмасштабное разложение. В инерционном режиме в поле течения жидкости, индуцированного кольцевым вихрем, можно условно выделить две области — область внешнего потенциального течения и область вихревого ядра, в которой влияние вязкости существенно [3]. Каждая из этих областей характеризуется своим масштабом длины. Для вихревого ядра характерен масштаб вязкой диффузии $r_*(t) = \sqrt{2\nu t}$. Внешнее течение определяется другим масштабом длины, который естественно назвать инерционным. Обычно этот масштаб отождествляется с текущим внешним радиусом кольца $R_*(t)$.

В соответствии с определением инерционного режима течения вихревого кольца отношение масштабов длины представляет собой малый параметр $\varepsilon = r_*/R_* \ll 1$.

По классификации [6], задача, содержащая малый параметр, являющийся отношением линейных масштабов, есть задача сингулярных возмущений. Для ее решения применим метод разных масштабов [6]. Введем два вида безразмерных переменных, осуществляя перенос начала координат в центр поперечного сечения тора завихренности

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{r - R_*}{R_*}, & y^* &= \frac{z - z_*}{R_*}, & \tau^* &= \frac{R_0}{R_*} \\ x &= \frac{r - R_*}{r_*}, & y &= \frac{z - z_*}{r_*}, & \tau &= \frac{r_0}{r_*} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Искомые функции представим в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых зависит только от одного вида переменных

$$\frac{\xi}{\omega_0} (r, z, t; \varepsilon_0) = w^* (x^*, y^*, \tau^*; \varepsilon_0) + \frac{w}{\varepsilon_0^2} (x, y, \tau; \varepsilon_0) \quad (2.2)$$

$$\frac{\Phi}{\omega_0 R_*^3} (r, z, t; \varepsilon_0) = \psi^* (x^*, y^*, \tau^*; \varepsilon_0) + \psi (x, y, \tau; \varepsilon_0) \quad (2.3)$$

где $\omega_0(t)$ — некоторый характерный масштаб завихренности, который будет определен

позже, а в качестве параметра разложения искоемых функций выбрано отношение $\varepsilon_0 = r_0/R_0$, не зависящее от времени и имеющее тот же порядок малости, что и ε .

Преобразование переменных (2.1)—(2.3) приводит к уравнениям для функции тока и завихренности в безразмерной форме. Разделяя функции, зависящие только от внешних переменных x^* , y^* , τ^* и только от внутренних переменных x , y , τ , получим две части уравнения, каждая из которых должна быть равна одной и той же постоянной. Соответствующие части уравнений отличаются на два порядка по ε_0 . Это дает право каждую из частей приравнять нулю по отдельности.

В частности, для распределения завихренности внутри ядра имеем

$$\begin{aligned} & \frac{w}{\omega_0^2} \frac{d\omega_0}{dt} - \frac{1}{\omega_0 r_*} \frac{dr_*}{dt} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) + \frac{u}{r_*} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{1}{\omega_0} - \\ & - \frac{v}{r_*} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(x^* + 1)} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left(x\varepsilon, y\varepsilon, \tau \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \left(x\varepsilon, y\varepsilon, \tau \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{1}{(x^* + 1)} \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{w}{\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} w = \\ & = \frac{1}{\text{Re}_*} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2 w}{\beta^2} \right] \\ \text{Re}_* & = \frac{\omega_0 r_*^2}{\nu}, \quad \frac{dR_*(t)}{dt} = u(t), \quad \frac{dz_*}{dt} = v(t), \quad \beta = \varepsilon x + 1 \end{aligned}$$

Уравнение для функции тока приобретает форму

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 (\Delta \psi^* + (x^* + 1)w^*) &= -\Delta \psi - \beta w \\ \Delta \psi^* &= \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{1}{x^* + 1} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \\ \Delta \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Далее рассматриваются внутренняя и внешняя задачи.

3. Внутреннее решение. Выпишем уравнения для внутренней задачи, отождествляя компоненты скорости в центре завихренности с компонентами скорости внешнего течения для согласования внутреннего течения с внешним

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^* + 1} \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \left(x\varepsilon, y\varepsilon, \tau \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) R_* \omega_0 &= u(t) \\ - \frac{1}{x^* + 1} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \left(x\varepsilon, y\varepsilon, \tau \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) R_* \omega_0 &= v(t) \end{aligned}$$

В результате внутреннее течение описывается уравнением для завихренности во внутренних переменных

$$\begin{aligned} \frac{w}{\omega_0^2} \frac{d\omega_0}{dt} - \frac{1}{\omega_0 r_*} \frac{dr_*}{dt} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \\ + \frac{1}{\beta} \left[\frac{B(t)}{\omega_0} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] w = \frac{1}{\text{Re}_*} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2 w}{\beta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$B(t) = \frac{u(t)}{R_*(t)} = \frac{\dot{R}_*(t)}{R_*(t)} \quad (3.2)$$

Для функции тока имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\beta w \quad (3.3)$$

Преобразуем систему уравнений (3.1)—(3.3) к полярным координатам

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

пренебрегая членами порядка ϵ и выше. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{w}{\omega_0^2} \frac{d\omega_0}{dt} - \frac{1}{\omega_0 r_*} \frac{dr_*}{dt} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \tau \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\delta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] + \\ & + \frac{1}{\delta} \left[\frac{B(t)}{\omega_0} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] w = \\ & = \frac{1}{\text{Re}_*} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -w, \quad \delta = \epsilon \rho \cos \theta + 1 \quad (3.5)$$

Вблизи центра вихря будем считать течение симметричным относительно центра, а решение системы уравнений (3.4), (3.5) разыскивать в виде асимптотических разложений

$$w(\rho, \theta, \tau; \epsilon_0) = w_0(\rho, \tau) + \epsilon_0 \cos \theta w_1(\rho, \tau) + \epsilon_0^2 \cos 2\theta w_2(\rho, \tau) + \dots \quad (3.6)$$

$$\psi(\rho, \theta, \tau; \epsilon_0) = \psi_0(\rho, \tau) + \epsilon_0 \cos \theta \psi_1(\rho, \tau) + \epsilon_0^2 \cos 2\theta \psi_2(\rho, \tau) + \dots$$

справедливых при $\epsilon_0 \rightarrow 0$ для фиксированных значений ρ, τ .

Кроме того, используем разложение

$$\frac{1}{(\epsilon \rho \cos \theta + 1)} = 1 - \epsilon \rho \cos \theta + \epsilon^2 \rho^2 \cos^2 \theta - \dots \quad (3.7)$$

Подстановка разложений (3.6), (3.7) в систему уравнений (3.4), (3.5) и приравнивание нулю коэффициентов $\epsilon_0^{-1}, \epsilon_0^0$ позволяет получить уравнения для определения искомых функций w_0, w_1, w_2 и ψ_0, ψ_1, ψ_2

$$[\psi_0' w_0 + \psi_0' w_1 - \psi_1 w_0'] = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[\psi_0' w_0 \rho + \frac{\alpha}{2} (\psi_0' w_1 \rho - \psi_0' w_1 - \psi_1' w_0 - \psi_1 w_0 - \psi_1 w_0' \rho) + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha^2}{2} (\psi_1 w_1' - \psi_1' w_1 - 4\psi_0' w_2 + 4\psi_2 w_0') \right] \sin 2\theta + \frac{w_0 \dot{\omega}_0}{\omega_0^2} - \\ & - \frac{\dot{r}_*}{\omega_0 r_*} (\rho w_0' + \tau w_0^*) - \frac{B(t) w_0}{\omega_0} - \frac{1}{\text{Re}_*} \left[w_0'' + \frac{1}{\rho} w_0' \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\psi_0'' + \frac{1}{\rho} \psi_0' = -w_0 \quad (3.10)$$

$$\psi_1'' + \frac{1}{\rho} \psi_1' = -w_1 \quad (3.11)$$

$$\psi_2'' + \frac{1}{\rho} \psi_2' = -w_2 - \Delta \psi_0^* \quad (3.12)$$

Здесь точками обозначены производные по t , штрихами — по ρ , звездочкой — по τ , $\alpha = \epsilon/\epsilon_0$. Далее ограничимся первыми членами разложения (3.6). Уравнение для определения w_0 следует из (3.9) вследствие независимости искомых функций от θ .

$$2k w_0 - \left(\rho \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + \tau \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \right) + c w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \quad (3.13)$$

Здесь приняты степенные зависимости от времени для масштаба длины $R_*(t) \sim t^p$ и масштаба завихренности $\omega_0(t) \sim t^k$. Константа $c = 2tB(t)$ определяется влиянием внешнего течения на течение в ядре вихря. Ее значение выбирается из условий существования автомодельного решения уравнения (3.13)

$$c = -2k - 2 \quad (3.14)$$

При таком выборе автомодельное решение уравнения (3.13), затухающее на бесконечности, имеет вид

$$w_0 = e^{-(\rho^2 + \tau^2)/2} I_0(\rho\tau) \quad (3.15)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

Соответствующее распределение функции тока может быть определено из (3.10). Решение задачи в нулевом приближении будет закончено после нахождения показателей степени k и p . Для их определения используем условие сохранения импульса вихря, считая завихренность во внешней области потенциального течения равной нулю.

4. Интегральные характеристики. Циркуляцию скорости для кольцевого вихря найдем прямым интегрированием, используя полученное распределение завихренности (3.15)

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi dr dz = \pi \omega_0 R_0^2$$

Соответственно значение импульса вихря также определяется прямым интегрированием вследствие (1.3)

$$M_0 = \pi \omega_0 R_0^4 = \Gamma R_0^2 \quad (4.1)$$

Используя соотношения (3.2), (3.14), представленные в виде

$$\frac{\dot{R}_*(t)}{R_*(t)} 2t = -2k - 2 \quad (4.2)$$

определим зависимости от времени масштаба завихренности и внешнего радиуса кольца. Значения k и p удовлетворяют системе уравнений, вытекающих из условий (4.1), (4.2)

$$k + 4p = 0, \quad p = -k - 1$$

Решение: $p = 1/3$, $k = -4/3$. Значения показателей степени для характерного масштаба завихренности определяются только нулевым приближением, так как значение импульса вихря не зависит от ϵ_0 . Отсюда следуют зависимости от времени для внешнего радиуса кольца и масштаба завихренности

$$R_*(t) = R_0 t^{1/3} t_0^{-1/3}, \quad \omega_0(t) = A t^{-4/3} t_0^{1/3} \quad (4.3)$$

Константа A определяется из закона сохранения импульса вихря, равного его начальному значению

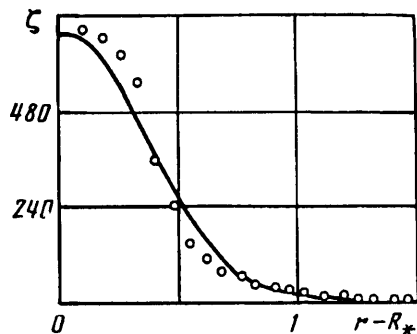
$$A = \frac{M_0 t_0}{\pi R_0^4}$$

Соответственно зависимость от времени для циркуляции скорости принимает вид

$$\Gamma = \frac{M_0}{R_0^2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3} = \Gamma_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3} \quad (4.4)$$

Как видно из (4.3) и (4.4), полученные зависимости от времени для циркуляции скорости и внешнего радиуса вихревого кольца соответствуют экспериментальным [5].

Сопоставление распределения завихренности в ядре вихря в форме (3.15) и экспериментальных данных [8] приведено на фиг. 2. Исходя из параметров эксперимента $Re = 2 \cdot 10^4$, $R_0 = 2,5$ см, $\nu = 0,01$ см²/с, $\zeta_{max} = 680$ с⁻¹, получим $M_0 = 1,3 \cdot 10^3$ см⁴/с. Значение $r_* = 0,217$ см обеспечивает наилучшее согласование дан-



Фиг. 2

ных. В этом случае $t_0 = 0,8$ с и $t = 2,36$ с. Сравнение теоретической кривой нулевого приближения и экспериментальных данных (точки) подтверждает заключение о симметрии течения в ядре вихревого кольца, что отмечалось еще при анализе экспериментальных данных в [8]. Своеобразие рассматриваемого движения жидкости состоит в ведущей роли течения в ядре вихря. Распределение завихренности (3.15) приводит к возникновению циркуляции порядка единицы. Эта циркуляция определяет внешнее потенциальное течение.

5. Внешнее решение. Для внешней задачи вся завихренность сосредотачивается в точках окружности радиуса R_* . Поэтому для внешнего течения получается классическая задача для круговой вихревой нити с заданной циркуляцией Γ , зависящей от времени по формуле (4.4). Распределение функции тока в этом случае известно [9]

$$\Phi(r, z) = \frac{\Gamma (R_*, r)^{1/2}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (5.1)$$

$$k^2 = \frac{4R_* r}{z^2 + (R_* + r)^2}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Значение циркуляции может быть выражено через начальные значения параметров кольца

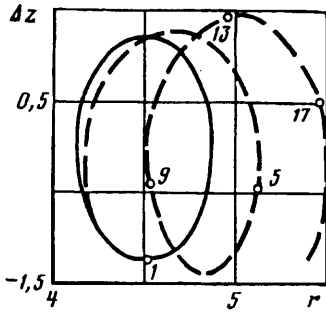
$$\Gamma = \frac{M_0 r_0^{4/3}}{R_0^2 (2\nu)^{2/3}} t^{-2/3}$$

Таким образом, полученное распределение завихренности в ядре вихря в виде (3.15) индуцирует внешнее потенциальное течение такое же, как у вихревой нити с циркуляцией, затухающей во времени. Это соответствует общим представлениям о влиянии вязкости на движение вихревых колец в инерционном режиме.

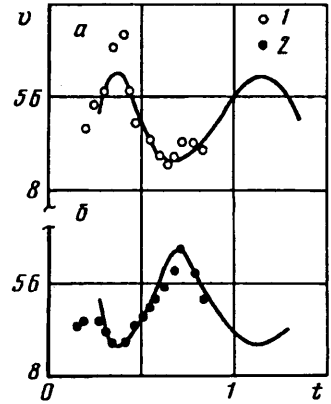
6. Совместное движение двух соосных вихревых колец. Изучение движения двух соосных кольцевых вихрей является первым шагом в общей задаче взаимодействия вихревых колец. Известная «чехарда» колец вновь и вновь привлекает внимание исследователей (см., например, [10—13]). Именно поэтому взаимодействие вихревых колец в рамках моделей идеальной жидкости подробно исследовано [12, 13]. Это позволяет использовать для описания нестационарного взаимодействия вихревых колец в вязкой жидкости хорошо разработанный аппарат потенциальных течений. Численное решение системы уравнений движения двух соосных вихревых колец основано на подходе, описанном в [12]. Эта система уравнений представляется в виде

$$\frac{dz_1}{dt} = V_1 + \Gamma_2 F(r_1, \Delta z, r_2)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = V_2 + \Gamma_1 F(r_2, -\Delta z, r_1)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\frac{dr_1}{dt} = u_1 + \Gamma_2 \Phi(r_1, \Delta z, r_2)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = u_2 + \Gamma_1 \Phi(r_2, -\Delta z, r_1), \quad \Delta z = z_1 - z_2$$

где $\Gamma_i F$ и $\Gamma_i \Phi$ — компоненты скорости одиночного вихревого кольца, определяемые функцией тока для потенциального течения в виде (5.1). В отличие от [12] здесь добавлены скорости расширения вихревых колец u_1 и u_2 , которые вычисляются с использованием (4.3) для текущего радиуса

$$u = \frac{1}{3} R_* (t^{-23}) t_0^{-13}$$

Тем самым рассматриваемый процесс представляется в виде суперпозиции движений, вызванных, с одной стороны, взаимодействием колец в невязкой жидкости и, с другой стороны, самостоятельной эволюцией каждого кольца вследствие вязкости. Скорость переноса находится при помощи известной формулы [14]

$$v_i = \frac{\Gamma_i}{4\pi R_*} \left[\ln 8 - \frac{1}{2} + Z \right] + o\left(\frac{\Gamma_i r_0}{R_0^2} \ln \frac{r_0}{R_0}\right) \quad (6.1)$$

$$Z = \int_0^L \Gamma^{*2} \frac{ds}{s} - \ln \frac{r_*}{R_*} \quad (6.2)$$

$$\Gamma^*(s) = \frac{\pi}{\Gamma_L} \int_0^s s w_0(s) ds, \quad \Gamma^*(L) = 1 \quad (6.3)$$

$$\Gamma_L = \pi \int_0^L s w_0(s) ds \quad (6.4)$$

где s — переменная интегрирования, а w_0 — решение внутренней задачи (3.15).

Верхний предел интегрирования L в (6.2) и (6.4) в конкретных расчетах выбирался равным 3,75. Это, с одной стороны, обеспечивало применимость аппроксимации модифицированной функции Бесселя многочленом [15] и, с другой стороны, заведомо превышало относительный размер ядра вихря. Значение Z определялось по формуле Симпсона и, в частности, при $\tau = 1$ $Z = 0,7933$.

Результаты расчетов взаимодействия двух тонких соосных вихревых колец в вязкой жидкости представлены на фиг. 3. При выполнении расчетов начальные значения параметров каждого из колец принимались одинаковыми и равными $\Gamma_i = 4 \text{ см}^2/\text{с}$; $R_0 = 4,5 \text{ см}$, $t_0 = 1 \text{ с}$, $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$. Расстояние между кольцами вдоль оси 1 см. Фазовый портрет «игры» двух колец является наглядной иллюстрацией отличия найденных решений от стационарного случая идеальной жидкости (фиг. 3). Изображенная сплошной кривой замкнутая фазовая траектория соответствует случаю идеальной жидкости [12]. Рассматриваемый подход приводит к незамкнутой расширяющейся фазовой траектории, изображенной штриховой линией. Цифрами отмечены значения текущего времени в секундах.

Нестационарность процесса проявляется в нерегулярности движения изображающей точки вдоль фазовой траектории из-за чехарды колец на фоне общего замедления вследствие вязкости.

Сопоставление результатов расчета движения системы двух соосных вихревых колец с экспериментальными данными (точки 1, 2) по изменению скорости подъема колец со временем приведено на фиг. 4 (а — кольцо 1; б — кольцо 2). Начальные значения параметров колец соответствовали экспериментальным [10]. Расчеты показывают, что влияние вязкости проявляется в увеличении длительности цикла чехарды колец.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sarpkaya T.* Computational methods with vortices: the 1988 Freeman scholar lecture//Trans. ASME J. Fluid Engng. 1989. V. 111. № 1. P. 5—52.
2. *Айранетов А. Б.* Движение первоначально точечного вихря в потоке вязкой жидкости//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 430—434.
3. *Ting L., Tung C.* Motion and decay of a vortex ring in a nonuniform stream//Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 6. P. 1039—1051.
4. *Березовский А. А., Капланский Ф. Б.* Диффузия кольцевого вихря//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 10—15.
5. *Maxworthy T.* The structure and stability of vortex rings//J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 1. P. 15—32.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. *Этчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. *Maxworthy T.* Some experimental studies of vortex rings//J. Fluid Mech. 1977. V. 81. Pt 3. P. 465—495.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. *Yamada H., Matsui T.* Mutual slip — through of a pair of vortex rings//Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 7. P. 1245—1249.
11. *Oshima Y.* Interactions of vortices//Inst. Space and Astronaut. Sci. Report. 1985. № SP3. P. 3—15.
12. *Бояринцев В. И., Савин А. С.* Исследование движения вихревых колец в однородных и стратифицированных средах: Препринт № 299. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР. 1987. 63 с.
13. *Гуржий В. В., Константинов М. Ю., Мелешко В. В.* Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 73—84.
14. *Fraenkel L. E.* Examples of steady vortex rings of small crosssection in an ideal fluid//J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 1. P. 119—135.
15. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.*

Таллинн

Поступила в редакцию
4.VI.1991